多项式导子的像与 Mathieu 子空间

杜现昆

吉林大学数学学院

第三届代数与表示论前沿进展研讨会
北京师范大学
2020/9/19

提要

介绍多项式导子的像及其 Jacobian 猜想的关系以及研究状况.
证明一类三元多项式导子的像是 Mathieu 子空间.
(与田海峰, 赵文华合作)

1 雅可比猜想

2 Mathieu 子空间

3 导子的像

仿射代数几何

14xxx Algebraic geometry

14Rxx Affine geometry ⟶ Affine algebraic geometry

14R05 Classification of affine varieties

14R10 Affine spaces (automorphisms, embeddings, exotic structures, cancellation problem)

14R15 Jacobian problem ⟶ Jacobian conjecture

14R20 Group actions on affine varieties

14R25 Affine fibrations

14R99 None of the above, but in this section

多项式映射

- k: 域.
- $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]$: n 元多项式环.
- 多项式映射:
  设 $F : k^n \to k^n$, $F(u) = (F_1(u), \ldots, F_n(u))$, $\forall u \in k^n$.
  若 $F_i \in k[X]$, 则称 F 是 k^n 的多项式映射, 并记 $F = (F_1, \ldots, F_n)$.
- k^n 上的多项式映射构成一个幺半群, 记作 $End(k^n)$.
  $End(k^n)$ 中的单位元为多项式映射 $X = (x_1, \ldots, x_n)$.
  $End(k^n)$ 中的单位 (可逆元) 称为多项式自同构.
  F 是自同构 $\iff$ F 有逆映射且逆映射也是多项式映射.
- $End(k^n) \xrightarrow{\text{反同构}} End(k[X])$——$k[X]$ 的 k-自同态半群.

雅可比猜想

- 多项式映射 $F = (F_1, \ldots, F_n)$ 的雅可比矩阵:

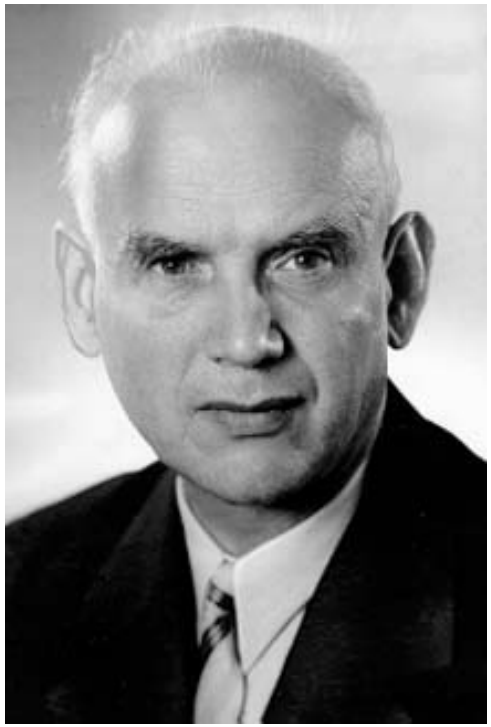
$$JF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

- 链锁法则: $J(G \circ F) = JG|_{X=F} \cdot JF$.
- 若 F 是自同构, 则 $\det JF \in k^*$.
  反之如何?

雅可比猜想 (Jacobian Conjecture)

设 k 是特征 0 的域, F 是多项式映射. 若 $\det JF \in k^*$, 则 F 是自同构.

Keller 与 Jacobi



Ott-Heinrich Keller
德国, 1906—1990

Carl Gustav Jacob Jacobi
德国, 1804—1851

关注过 JC 的著名数学家

- B Segre (1903–1977)
- I R Shafarevich (1923–2017)
- A I Kostrikin (1929–2000)
- M Nagata (1927–2008)
- S Abhyankar (1930–2012)
- S Smale (1930–)
- H Bass (1932–)
- Bourbaki 学派
- 张益唐 (1955–): 设 $F = (f(x,y), g(x,y))$ 且 $\det JF = 1$, 则 $[\mathbb{C}(x,y) : \mathbb{C}(f,g)] \leq \min(\deg f, \deg g)$.
  (JC 等价于 $[\mathbb{C}(x,y) : \mathbb{C}(f,g)] = 1$.)
- M Kontsevich (1964–) (with Belov-Kanel):
  JC 等价于 Dixmer 猜想 (Weyl 代数的自同态都是自同构).

研究进展

- 20 世纪 50-70 年代主要研究二维雅可比猜想.
  W Engle(1955); B Segre (1956-60); G Gröbner(1961);
  S Ahbyankar; T T Moh(莫宗坚);
- 直到六十年代末, 多个数学家把 JC 当做定理.
- 70 年代, 数学界终于认识到 JC 是一个公开问题.
- 莫宗坚认为, 问题的核心是雅可比行列式 (Jacobian), 所以就把这个问题称为 Jacobian Conjecture——雅可比猜想.
- 雅可比猜想, Jacobian Conjecture
  雅可比问题, Jacobian problem
  Keller 问题, Keller's problem

研究进展

- 1982 年, H Bass, E Connell, D Wright 的综述文章.
- 1998 年, Smale 把 JC 列为 21 世纪 18 个数学问题之一.
- 2000 年, MSC: 14R15 (2000-now) Jacobian problem
- 2000 年, van den Essen 出版了关于 JC 的第一部专著:
  Van den Essen A. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Basel: Birkhäuser-Verlag, 2000.

雅可比猜想的条件

雅可比猜想

设 k 是特征 0的域, F 是多项式映射. 若$\det JF \in k^*$, 则 F 是自同构.

- 特征 $p > 0$. 反例: $f(x) = x - x^p$.
- 环上的 JC. 特征 0 的整环上的 JC 都是互相等价的.
- $\det JF(u) \neq 0,\ \forall u \in k^n$.

Real Jacobian Conjecture

设 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是多项式映射. 若 $\det JF(u) \neq 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^n$, 则 F 是单射.

RJC 有反例 (Pinchuk, 1994).

- 非多项式映射. 反例: $F(x, y) = (xe^{-y}, e^y) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

单射、双射、自同构

- 设 $F : k^n \to k^n$ 是线性映射, 则 F 可逆 $\iff$ F 是单射.
- 设 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, 则 F 是双射但不是自同构.

定理

对于 $\mathbb{C}$ 上的多项式映射 F, 下列条件等价.

1. F 是单射.
2. F 是双射. (1) $\Longrightarrow$ (2) 称为 Ax-Grothendieck 定理
3. F 是自同构.

- JC 的等价形式:
  - 设 F 是多项式映射且 $\det JF \in \mathbb{C}^*$, 则 F 是单射.
  - "罗尔型":
    设 $a \neq b \in \mathbb{C}^n$ 使得 $F(a) = F(b)$, 则有 $c \in \mathbb{C}^n$ 使得 $\det JF(c) = 0$.

雅可比条件与反函数定理

反函数定理

设函数 $F = (F_1(X), \ldots, F_n(X)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在点 p 处连续可微且雅可比行列式 $\det F'(p) \neq 0$, 则 F 在 p 的某个邻域上有反函数.

- 设 $F(x; y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, 则 $F'(x, y) > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, 但 F 不是单射.
- 设 $F(x) = x + x^3,\ \forall x \in \mathbb{R}$, 则 $F'(x) = 1 + 3x^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, F 是双射, 但逆映射不是多项式.

维数 VS 次数

维数

- 一维的 JC 平凡地成立.
- 2 维及以上的 JC 都是公开问题.
- 传说: 若 2 维的 JC 成立, 则任意维数的 JC 都成立.
- “共识”: 2 维的 JC 成立, 但三维以上的 JC 不成立.

次数

- 一次的 JC 成立: $F(X) = AX$ 可逆 $\iff \det A \neq 0$.
  JC 可视为线性代数的基本事实" 线性变换可逆 $\iff$ 行列式非零" 的高次推广
- 二次的 JC 成立. (S.S-S. Wang, 1980)
- 若所有维数的三次 JC 都成立, 则 JC 成立. (BCW, 1982; Yagzhev, 1980)
- 100 次以下的二维多项式映射, JC 成立 (T T Moh)

对称的雅可比矩阵

定理 (BCW, 1982; Yagzhev, 1980)

为了证明 *JC*, 只需考虑如下形式的多项式映射:

$$F = X + H$$

其中 $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $H = (H_1, \ldots, H_n)$, 并且
每个 H_i 都是三次齐次的, JH 是幂零的.

定理 (De Bondt, van der Essen, 2005; Meng 2006)

为了证明 *JC*, 只需考虑如下形式的多项式映射:

$$F = X + H$$

其中 $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $H = (H_1, \ldots, H_n)$, 并且
每个 H_i 都是 4 次齐次的, JH 是幂零的、对称的.

对称雅可比矩阵——Hesse 矩阵

设 $f : k^n \to k$ 是多项式函数.

梯度 $\nabla f = (\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n})$.

Hesse 矩阵 $\mathrm{H}(f) = J(\nabla f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$.

Poincaré 引理

对称的雅可比矩阵是 Hesse 矩阵.

幂零 Hesse 矩阵

定理 (De Bondt, van der Essen, 2005; G Meng, 2006)

为了证明 *JC*, 只需考虑如下形式的多项式映射: $F = X + \nabla(f)$,
其中 $X = (x_1, \ldots, x_n)$, f 是 4 次齐次多项式, 具有幂零的 *Hesse* 矩阵.

定理 (Zhao, 2007)

设 $\Delta = \sum_i \partial_i^2$ 是拉普拉斯算子, $P \in \mathbb{C}[X]$ 是齐次多项式. 则

- $\mathrm{H}(P)$ 是幂零的 $\iff$ $\triangle^m(P^m) = 0\ \forall m > 0$.
- $X + \nabla(P)$ 可逆 $\iff$ $\Delta^m(P^{m+1}) = 0\ \forall m \gg 0$.

消逝猜想

Vanishing Conjecture (Zhao, 2007)

设 Δ 是拉普拉斯算子, $P \in \mathbb{C}[X]$ 是齐次多项式.
若 $\Delta^m(P^m) = 0,\ \forall m > 0$, 则 $\Delta^m(P^{m+1}) = 0, \forall m \gg 0$.

定理 (Zhao, 2007)

VC$\Leftrightarrow$ JC.

Van den Essen, W Zhao 证明了上面的 VC 有如下的等价形式.

Vanishing Conjecture (Essen-Zhao, 2008)

设 Δ 是拉普拉斯算子, $P \in \mathbb{C}[X]$ 是齐次多项式.
若 $\Delta^m(P^m) = 0,\ \forall m > 0$, 则 $\forall Q \in k[X]$ 均有 $\Delta^m(QP^m) = 0, \forall m \gg 0$.

1 雅可比猜想

2 Mathieu 子空间

3 导子的像

Mathieu 猜想

Mathieu Conjecture

设 G 是紧的连通实李群, 具有 Haar 测度 σ. 设 f 是 G 上的复值函数, g 是 G 上的复值函数使得轨道 $G \cdot g$ 生成有限维 $\mathbb{C}$-向量空间. 则

$$\int_G f^m d\sigma = 0,\ \forall m > 0 \implies \int_G g f^m d\sigma = 0,\ \forall m > 0.$$

定理 (Mathieu, 1997)

$MC \Longrightarrow JC.$

Mathieu 子空间

定义

设 R 是交换环, A 是 R 代数. 设 M 是 A 的 R-子模. 如果

$$a^m \in M,\ \forall a \in M,\ m > 0 \implies \forall x, y \in R,\ xa^m y \in M,\ \forall m \gg 0,$$

则称 M 是 A 的 *Mathieu* 子空间.

MZ-子空间的性质

对于 A 的子集 V, 定义 V 的根 $r(V) := \{a \in A \mid a^m \in V\ \forall m \gg 0\}$.

定理

设 M 是 A 的 R-子模. 则 M 是 A 的 MZ 子空间当且仅当

$$xa^m y \in M,\ \forall a \in r(M), x, y \in R,\ \forall m \gg 0.$$

定理

设 M 是 A 的 MZ-子空间. 若 $1 \in M$, 则 $M = A$.

MZ-子空间的例子

- 理想是 MS.
- 零迹矩阵构成的子空间是 $M_n(k)$ 的 MS.
- 设 $\operatorname{ch} k = 0$, $R = k[X, X^{-1}]$, 则常数项为零的 Laurent 多项式之集是 R 的 MZ-子空间. (Duistermaat-van der Kallen)
- $\{f(t) \in \mathbb{C}[t] \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ 是 $\mathbb{C}[t]$ 的 MS.

1 雅可比猜想

2 Mathieu 子空间

3 导子的像

多项式导子

设 D 是 $k[X]$ 的 k-导子.

- D 可唯一地表示为 $D = f_1\partial_1 + \cdots + f_n\partial_n$, 其中 $f_i = D_i(x_i)$.
- 若 $D(x_i) \in k[x_{i+1}, \ldots, x_n],\ 1 \leq i < n,\ D(x_n) \in k$, 则称 D 是三角导子.
- 如果 $\forall f \in k[X] \exists m$ 使得 $D^m(f) = 0$, 则称 D 是局部幂零的.
- 如果 $\forall f \in k[X]$, $\{D^i(f) \mid i = 1, 2, \ldots\}$ 张成的子空间是有限的, 则称 D 是局部有限的.
- 三角导子 $\Longrightarrow$ 局部幂零导子 $\Longrightarrow$ 局部有限导子.

Nowicki A. Polynomial derivations and their rings of constants. Toruń, 1994.
Freudenburg G. Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Berlin: Springer, 2017.

导子的像

定理 (EWZ, 2011)

设 D 是 $k[x,y]$ 的局部有限的 k-导子. 则 $\mathrm{Im}\, D$ 是 *MZ*-子空间.

问题. (EWZ, 2011)

设 $\mathrm{ch}\, k = 0$, $D = f\partial_x + g\partial_y$, $f, g \in k[x,y]$, $\mathrm{div} D := \partial_x(f) + \partial_y(g) = 0$.

1. $\mathrm{Im}\, D$ 是否 $k[x,y]$ 的 MZ-子空间?
2. 当 $1 \in \mathrm{Im}\, D$ 时, $\mathrm{Im}\, D$ 是否 $k[x,y]$ 的 MZ-子空间?

定理

问题 1 的答案是否定的. *(孙晓松, 2017)*
问题 2 的答案是肯定的当且仅当 2 维雅可比猜想成立. *(EWZ'11)*

LFED 和 LNED 猜想

The LFED Conjecture

设 K 是特征零的域, A 是 K-代数, δ 是 A 的局部有限的 K-导子或 K-E-导子, 则 $\operatorname{Im}\delta$ 是 A 的 MS.

The LNED Conjecture

设 k 是特征零的域, A 是 k-代数, δ 是 A 的局部幂零的 k-导子或 k-E-导子 δ. 则每个理想 I 的像 $\delta(I)$ 是 A 的 MS.

局部幂零多项式导子像猜想

局部幂零多项式导子猜想 (Zhao, 2017)

设 k 是特征零的域, 则 $k[X]$ 的局部幂零 k 导子的像是 $k[X]$ 的 MS.

这个猜想对于 $n = 1, 2$ 是对的, 对于 $n \geq 3$ 都是未知的.

定理 (EWZ, 2011)

设 D 是 $k[x, y]$ 的局部幂零的 k-导子. 则 $\operatorname{Im} D$ 是 *MS*.

定理 (刘大艳, 孙晓松)

设 $D = y\partial_x - z\partial_y$, 则 $\operatorname{Im} D$ 是 $\mathbb{C}[x, y, z]$ 的 *MS*.

我们对于 $K[x, y, z]$ 的一类三角导子证明了这个猜想. 推广了刘大艳和孙晓松的结果.

主要结果

定理 (D, Tian, Zhao)

设 k 是特征零的域, $D = U(y,z)\partial_x - V(z)\partial_y$ 是 $k[x,y,z]$ 的导子, 其中 $U(y,z)$ 作为 y 在 $\mathbb{C}[z]$ 上的多项式是首一的. 则 $\operatorname{Im} D$ 是 MZ-子空间.

推论 (D, Tian, Zhao)

设 $D = U(y,z)\partial_x - z\partial_y$, 其中 $U(y,z) \in \mathbb{C}[y,z]$, 则 $\operatorname{Im} D$ 是 MZ-子空间.

证明概要

设 $D = U(y,z)\partial_x - V(z)\partial_y$, $\deg_y U = p$.
令 $W \in k[y,z]$ 是 U 关于变量 y 的一个原函数. 则 $\deg_y W = p+1$.
记 $R = k[z]$. 则 $R \subset \ker D$, 故 $\operatorname{Im} D$ 是 R-模.

- 确定 $\operatorname{Im} D$ 有如下的 R-基:

$$V(Vx)^m y^{n-1},\ x^m U W^k,\ x^m y^n U W^k - x^m F_{m,n,k}, \quad m,n,k \in \mathbb{N},\ 1 \le n \le p$$

- 刻画 $\operatorname{Im} D$ 中 y-次数小于 p 的多项式.
- 引入一个函数 wdeg, 把问题转化成定积分计算.
  然后得到, $r(\operatorname{Im} D)$ 的刻画.
- 证明定理对于 $k = \mathbb{C}$ 成立.
- 利用 Lefschetz 原理证明对于特征 0 的域成立.

参考文献 I

- Bass H, et al. Bull. AMS, 1982, 7(2): 287–330.
- van den Essen A. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2000.
- de Bondt M, van den Essen A. JPAA. 196 (2005), 135–148.
- de Bondt M, van den Essen A. Proc. AMS, 2005, 133(8): 2201–2205.
- Meng G. Appl. Math. Lett., 19 (6) (2006), 503-510.
- Zhao W. JPAA. 2010, 214(7): 1200–1216.
- Liu D, Sun X. Bull Austral. Math. Soc., 2017, 96(2): 205–211.
- Liu D, Sun X. Bull. Aust. Math. Soc. online 2019, 1–9.
- Essen van den A , Wright D, Zhao W. JPAA, 2011, 215(9): 2130–2134.
- van den Essen A, Willems R, Zhao W. JPAA. 219 (2015), 3847–3861.

参考文献 II

- Essen A V D, Zhao W. JPAA, 2008, 212(10): 2190–2193.
- Feng Z, Sun X, Czechoslovak Math. J. 2019 Online first.
- Sun X. JA, 2017, 492: 414–418.
- Mathieu O, Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants (Reims, 1995), Sémin. Congr. 2, Soc. Math. France, 263-279 (1997).
- Zhao W. Trans. AMS, 2007, 359: 294–274.
- Zhao W. Acta Math Viet. 2007, 32(3): 107–134.
- Zhao W. JA. 2010, 324(2): 231–247.
- Zhao W. Euro. J Math. 2018(4): 1491–1504.
- Zhao W. Comm Contemp Math., 2018: 1750056.

谢 谢