关于Prüfer环的小finitistic维数

王芳贵

(合作者: 周德川 金焕九 熊涛 孙小武)

2020年9月20日

Bass定义的环的小finitistic维数fPD

- 1960年, Bass引入了环的finitistic(投射)维数:

  $\mathrm{FPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid \mathrm{pd}_R M < \infty\}$.

- 也引入了环的小finitistic维数:

  $\mathrm{fPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid M$是有限生成的, 且$\mathrm{pd}_R M < \infty\}$.
  (Bass H(1960): Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans AMS.)

- 评注: Bass的小finitistic维数的定义对当时众多学者关注的Noether环是够用的.

Bass定义的环的小finitistic维数fPD

- 1960年, Bass引入了环的finitistic(投射)维数:

  $\mathrm{FPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid \mathrm{pd}_R M < \infty\}$.

- 也引入了环的小finitistic维数:

  $\mathrm{fPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid M$是有限生成的, 且$\mathrm{pd}_R M < \infty\}$.

  (Bass H(1960): Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans AMS.)

- 评注: Bass的小finitistic维数的定义对当时众多学者关注的Noether环是够用的.

Bass定义的环的小finitistic维数fPD

- 1960年, Bass引入了环的finitistic(投射)维数:

  $\mathrm{FPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid \mathrm{pd}_R M < \infty\}$.

- 也引入了环的小finitistic维数:

  $\mathrm{fPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid M$是有限生成的, 且$\mathrm{pd}_R M < \infty\}$.
  (Bass H(1960): Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans AMS.)

- 评注: Bass的小finitistic维数的定义对当时众多学者关注的Noether环是够用的.

Bass定义的环的小finitistic维数fPD

- 1960年, Bass引入了环的finitistic(投射)维数:

  $\mathrm{FPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid \mathrm{pd}_R M < \infty\}$.

- 也引入了环的小finitistic维数:

  $\mathrm{fPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid M\text{是有限生成的, 且}\mathrm{pd}_R M < \infty\}$.
  (Bass H(1960): Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans AMS.)

- 评注: Bass的小finitistic维数的定义对当时众多学者关注的Noether环是够用的.

Glaz的修改

- FPR(有限投射分解): 设M是R-模, 若有正合列

  $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$

  其中P_i都是有限生成投射R-模, 则称M有有限投射分解, 记为$M \in \mathrm{FPR}$.

- 环的小finitistic(投射)维数:

  $\mathrm{fPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid M \in \mathrm{FPR}\}.$

  (Glaz S(1989): Commutative Coherent Rings, LNM 1371.)

- 自然问题: $\mathrm{fPD}(R) = 0$刻画的环有哪些性质? $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$刻画的环有哪些性质?

Glaz的修改

- FPR(有限投射分解): 设M是R-模, 若有正合列

  $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$

  其中P_i都是有限生成投射R-模, 则称M有有限投射分解, 记为$M \in \mathrm{FPR}$.

- 环的小finitistic(投射)维数:

  $\mathrm{fPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid M \in \mathrm{FPR}\}.$

  (Glaz S(1989): Commutative Coherent Rings, LNM 1371.)

- 自然问题: $\mathrm{fPD}(R) = 0$刻画的环有哪些性质? $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$刻画的环有哪些性质?

Glaz的修改

- FPR(有限投射分解): 设M是R-模, 若有正合列

  $$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

  其中P_i都是有限生成投射R-模, 则称M有有限投射分解, 记为$M \in \mathrm{FPR}$.

- 环的小finitistic(投射)维数:

  $$\mathrm{fPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid M \in \mathrm{FPR}\}.$$

  (Glaz S(1989): Commutative Coherent Rings, LNM 1371.)

- 自然问题: $\mathrm{fPD}(R) = 0$刻画的环有哪些性质? $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$刻画的环有哪些性质?

Glaz的修改

- FPR(有限投射分解): 设M是R-模, 若有正合列

  $$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

  其中P_i都是有限生成投射R-模, 则称M有有限投射分解, 记为$M \in \mathrm{FPR}$.

- 环的小finitistic(投射)维数:

  $$\mathrm{fPD}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R M \mid M \in \mathrm{FPR}\}.$$

  (Glaz S(1989): Commutative Coherent Rings, LNM 1371.)

- 自然问题: $\mathrm{fPD}(R) = 0$刻画的环有哪些性质? $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$刻画的环有哪些性质?

Dedekind整环

- Dedekind整环的研究: 始于Noether, 1927.
- Dedekind整环的定义: 一维Noether整闭整环.

(Noether, E(1927): Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörpern, Math Ann.)

Dedekind整环

- Dedekind整环的研究: 始于Noether, 1927.
- Dedekind整环的定义: 一维Noether整闭整环.

(Noether, E(1927): Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörpern, Math Ann.)

Dedekind整环

- Dedekind整环的研究: 始于Noether, 1927.
- Dedekind整环的定义: 一维Noether整闭整环.

  (Noether, E(1927): Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörpern, Math Ann.)

Dedekind整环

Dedekind整环的经典刻画

对整环R, 以下各条等价:

(1) R是Dedekind整环.

(2) 每个非零理想是可逆理想.

(3) 投射模的子模是投射模.

(4) $\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.

- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
  其中$I^{-1} = \{x \in K \mid xI \subseteq R\}$, K是整环R的商域.

Dedekind整环

Dedekind整环的经典刻画

对整环R, 以下各条等价:

(1) R是Dedekind整环.

(2) 每个非零理想是可逆理想.

(3) 投射模的子模是投射模.

(4) $\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.

- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
  其中$I^{-1} = \{x \in K \mid xI \subseteq R\}$, K是整环R的商域.

Dedekind整环

Dedekind整环的经典刻画

对整环R, 以下各条等价:

(1) R是Dedekind整环.

(2) 每个非零理想是可逆理想.

(3) 投射模的子模是投射模.

(4) $\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.

- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
  其中$I^{-1} = \{x \in K \mid xI \subseteq R\}$, K是整环R的商域.

Dedekind整环

Dedekind整环的经典刻画

对整环R, 以下各条等价:

(1) R是Dedekind整环.

(2) 每个非零理想是可逆理想.

(3) 投射模的子模是投射模.

(4) $\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.

- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
  其中$I^{-1} = \{x \in K \mid xI \subseteq R\}$, K是整环R的商域.

Prüfer整环

- 最初引入: Prüfer, 1932.
- Prüfer整环 每个非零的有限生成理想是可逆理想.
  (Prüfer H(1932): Untersuchungen Über Teibarketiseigen-schaften in Körpern, J Reine Angew Math.)
- 正式命名: Krull, 1936.
  (Krull W(1936): Beiträge zur Arithmetik Kommutativer Integritätsbereiche, Math Z.)

Prüfer整环

- 最初引入: Prüfer, 1932.
- Prüfer整环 每个非零的有限生成理想是可逆理想.
  (Prüfer H(1932): Untersuchungen Über Teibarketiseigen-schaften in Körpern, J Reine Angew Math.)
- 正式命名: Krull, 1936.
  (Krull W(1936): Beiträge zur Arithmetik Kommutativer Integritätsbereiche, Math Z.)

Prüfer整环

- 最初引入: Prüfer, 1932.
- Prüfer整环 每个非零的有限生成理想是可逆理想.
  (Prüfer H(1932): Untersuchungen Über Teibarketiseigen-schaften in Körpern, J Reine Angew Math.)
- 正式命名: Krull, 1936.
  (Krull W(1936): Beiträge zur Arithmetik Kommutativer Integritätsbereiche, Math Z.)

Prüfer整环

- 最初引入: Prüfer, 1932.
- Prüfer整环 每个非零的有限生成理想是可逆理想.
  (Prüfer H(1932): Untersuchungen Über Teibarketiseigen-schaften in Körpern, J Reine Angew Math.)
- 正式命名: Krull, 1936.
  (Krull W(1936): Beiträge zur Arithmetik Kommutativer Integritätsbereiche, Math Z.)

Prüfer整环

Prüfer整环的经典刻画

对整环R, 以下各条等价:

(1) R是Prüfer整环.

(2) 投射模的有限生成子模是投射模.

(3) 无挠模是平坦模

(4) $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.

Prüfer整环

Prüfer整环的经典刻画

对整环R, 以下各条等价:

(1) R是Prüfer整环.

(2) 投射模的有限生成子模是投射模.

(3) 无挠模是平坦模

(4) $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.

在交换环上Prüfer整环性质推广

- R是交换环, $T(R)$表示R的完全商环(total quotient ring), 即$T(R) = R_S$, 其中S是R的非零因子的乘法封闭集.
- 正则理想: I中有一个非零因子.
- 设I是R的理想, 定义$I^{-1} = \{x \in T(R) \mid xI \subseteq R\}$.
- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
- Prüfer环的定义(Griffin, 1970): 每个有限生成正则理想是可逆理想.
  (Griffin, M(1970): Prüfer rings with zero divisors, J Reine Angew Math.)
- 完全商环(满足$T(R) = R$的环)一定是Prüfer环.

在交换环上Prüfer整环性质推广

- R是交换环, $T(R)$表示R的完全商环(total quotient ring), 即$T(R) = R_S$, 其中S是R的非零因子的乘法封闭集.
- 正则理想: I中有一个非零因子.
- 设I是R的理想, 定义$I^{-1} = \{x \in T(R) \mid xI \subseteq R\}$.
- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
- Prüfer环的定义(Griffin, 1970): 每个有限生成正则理想是可逆理想.
  (Griffin, M(1970): Prüfer rings with zero divisors, J Reine Angew Math.)
- 完全商环(满足$T(R) = R$的环)一定是Prüfer环.

在交换环上Prüfer整环性质推广

- R是交换环, $T(R)$表示R的完全商环(total quotient ring), 即$T(R) = R_S$, 其中S是R的非零因子的乘法封闭集.
- 正则理想: I中有一个非零因子.
- 设I是R的理想, 定义$I^{-1} = \{x \in T(R) \mid xI \subseteq R\}$.
- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
- Prüfer环的定义(Griffin, 1970): 每个有限生成正则理想是可逆理想.
  (Griffin, M(1970): Prüfer rings with zero divisors, J Reine Angew Math.)
- 完全商环(满足$T(R) = R$的环)一定是Prüfer环.

在交换环上Prüfer整环性质推广

- R是交换环, $T(R)$表示R的完全商环(total quotient ring), 即$T(R) = R_S$, 其中S是R的非零因子的乘法封闭集.
- 正则理想: I中有一个非零因子.
- 设I是R的理想, 定义$I^{-1} = \{x \in T(R) \mid xI \subseteq R\}$.
- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
- Prüfer环的定义(Griffin, 1970): 每个有限生成正则理想是可逆理想.
  (Griffin, M(1970): Prüfer rings with zero divisors, J Reine Angew Math.)
- 完全商环(满足$T(R) = R$的环)一定是Prüfer环.

在交换环上Prüfer整环性质推广

- R是交换环, $T(R)$表示R的完全商环(total quotient ring), 即$T(R) = R_S$, 其中S是R的非零因子的乘法封闭集.
- 正则理想: I中有一个非零因子.
- 设I是R的理想, 定义$I^{-1} = \{x \in T(R) \mid xI \subseteq R\}$.
- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
- Prüfer环的定义(Griffin, 1970): 每个有限生成正则理想是可逆理想.
  (Griffin, M(1970): Prüfer rings with zero divisors, J Reine Angew Math.)
- 完全商环(满足$T(R) = R$的环)一定是Prüfer环.

在交换环上Prüfer整环性质推广

- R是交换环, $T(R)$表示R的完全商环(total quotient ring), 即$T(R) = R_S$, 其中S是R的非零因子的乘法封闭集.
- 正则理想: I中有一个非零因子.
- 设I是R的理想, 定义$I^{-1} = \{x \in T(R) \mid xI \subseteq R\}$.
- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
- Prüfer环的定义(Griffin, 1970): 每个有限生成正则理想是可逆理想.
  (Griffin, M(1970): Prüfer rings with zero divisors, J Reine Angew Math.)
- 完全商环(满足$T(R) = R$的环)一定是Prüfer环.

在交换环上Prüfer整环性质推广

- R是交换环, $T(R)$表示R的完全商环(total quotient ring), 即$T(R) = R_S$, 其中S是R的非零因子的乘法封闭集.
- 正则理想: I中有一个非零因子.
- 设I是R的理想, 定义$I^{-1} = \{x \in T(R) \mid xI \subseteq R\}$.
- 可逆理想: $II^{-1} = R$.
- Prüfer环的定义(Griffin, 1970): 每个有限生成正则理想是可逆理想.
  (Griffin, M(1970): Prüfer rings with zero divisors, J Reine Angew Math.)
- 完全商环(满足$T(R) = R$的环)一定是Prüfer环.

2006年Bazzoni和Glaz对Prüfer环研究的收集

Prüfer环的刻画(15条)

对环R, 则以下各条等价:

(1) R是Prüfer环.

(2) 每个2-生成正则理想是可逆理想.

(3) R的每个overring(在$T(R)$-中的扩环)是平坦R-模.

(4) R的每个overring是整闭(在$T(R)$中)的.

(5) 若I, J, L是R的理想, 其中有一个是正则的, 则 $I \bigcap (J + L) = (I \bigcap J) + (I \bigcap L)$.

.....

(Bazzoni S, Glaz S(2006): Prüfer rings, Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra.)

2006年Bazzoni和Glaz对Prüfer环研究的收集

Prüfer环的刻画(15条)

对环R, 则以下各条等价:

(1) R是Prüfer环.

(2) 每个2-生成正则理想是可逆理想.

(3) R的每个overring(在$T(R)$-中的扩环)是平坦R-模.

(4) R的每个overring是整闭(在$T(R)$中)的.

(5) 若I, J, L是R的理想, 其中有一个是正则的, 则 $I\bigcap(J+L)=(I\bigcap J)+(I\bigcap L)$.

.....

(Bazzoni S, Glaz S(2006): Prüfer rings, Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra.)

2006年Bazzoni和Glaz对Prüfer环研究的收集

Prüfer环的刻画(15条)

对环R, 则以下各条等价:

(1) R是Prüfer环.

(2) 每个2-生成正则理想是可逆理想.

(3) R的每个overring(在$T(R)$-中的扩环)是平坦R-模.

(4) R的每个overring是整闭(在$T(R)$中)的.

(5) 若I, J, L是R的理想, 其中有一个是正则的, 则 $I\bigcap(J+L)=(I\bigcap J)+(I\bigcap L)$.

.....

(Bazzoni S, Glaz S(2006): Prüfer rings, Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra.)

2006年Bazzoni和Glaz对Prüfer环研究的收集

Prüfer环的性质举例

(1) 设R是Prüfer环, P是正则素理想, 则R/P是Prüfer整环.
(2) 设$N = nil(R)$. 若R/N是Prufer环, 则R是Prufer环当且仅当R在$T(R)$中是整闭的.

2006年Bazzoni和Glaz对Prüfer环研究的收集

Prüfer环的性质举例

(1) 设R是Prüfer环, P是正则素理想, 则R/P是Prüfer整环.

(2) 设$N = nil(R)$. 若R/N是Prufer环, 则R是Prufer环当且仅当R在$T(R)$中是整闭的.

2006年Bazzoni和Glaz对Prüfer环研究的收集

Prüfer环的性质举例

(1) 设R是Prüfer环, P是正则素理想, 则R/P是Prüfer整环.

(2) 设$N = nil(R)$. 若R/N是Prufer环, 则R是Prufer环当且仅当R在$T(R)$中是整闭的.

Cahen-Fontana-Frisch-Glaz的公开问题

- 评注：这些表述是ring-theoretic, 非module-theoretic或homology-theoretic.
- 2014年, Fontana, Frisch, Glaz三人编辑了一本由20篇综述文章组成的书，《Commutative Algebra》.
- 其中最后一篇：Open Problems in Commutative Ring Theory(Cahen-Fontana-Frisch-Glaz)中提出了44个公开问题.

Problem 1a

Let R be a Prüfer ring. Is $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$?

Problem 1b

Let R be a total ring of quotients. Is $\mathrm{fPD}(R) = 0$?

Cahen-Fontana-Frisch-Glaz的公开问题

- 评注：这些表述是ring-theoretic, 非module-theoretic或homology-theoretic.
- 2014年, Fontana, Frisch, Glaz三人编辑了一本由20篇综述文章组成的书，《Commutative Algebra》.
- 其中最后一篇: Open Problems in Commutative Ring Theory(Cahen-Fontana-Frisch-Glaz)中提出了44个公开问题.

Problem 1a

Let R be a Prüfer ring. Is $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$?

Problem 1b

Let R be a total ring of quotients. Is $\mathrm{fPD}(R) = 0$?

Cahen-Fontana-Frisch-Glaz的公开问题

- 评注：这些表述是ring-theoretic, 非module-theoretic或homology-theoretic.
- 2014年, Fontana, Frisch, Glaz三人编辑了一本由20篇综述文章组成的书，《Commutative Algebra》.
- 其中最后一篇: Open Problems in Commutative Ring Theory(Cahen-Fontana-Frisch-Glaz)中提出了44个公开问题.

Problem 1a

Let R be a Prüfer ring. Is $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$?

Problem 1b

Let R be a total ring of quotients. Is $\mathrm{fPD}(R) = 0$?

Cahen-Fontana-Frisch-Glaz的公开问题

- 评注：这些表述是ring-theoretic, 非module-theoretic或homology-theoretic.
- 2014年, Fontana, Frisch, Glaz三人编辑了一本由20篇综述文章组成的书，《Commutative Algebra》.
- 其中最后一篇: Open Problems in Commutative Ring Theory(Cahen-Fontana-Frisch-Glaz)中提出了44个公开问题.

Problem 1a

Let R be a Prüfer ring. Is $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$?

Problem 1b

Let R be a total ring of quotients. Is $\mathrm{fPD}(R) = 0$?

Cahen-Fontana-Frisch-Glaz的公开问题

- 评注：这些表述是ring-theoretic, 非module-theoretic或homology-theoretic.
- 2014年, Fontana, Frisch, Glaz三人编辑了一本由20篇综述文章组成的书，《Commutative Algebra》.
- 其中最后一篇: Open Problems in Commutative Ring Theory(Cahen-Fontana-Frisch-Glaz)中提出了44个公开问题.

Problem 1a

Let R be a Prüfer ring. Is $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$?

Problem 1b

Let R be a total ring of quotients. Is $\mathrm{fPD}(R) = 0$?

Cahen-Fontana-Frisch-Glaz的公开问题

- 评注：这些表述是ring-theoretic, 非module-theoretic或homology-theoretic.
- 2014年, Fontana, Frisch, Glaz三人编辑了一本由20篇综述文章组成的书，《Commutative Algebra》.
- 其中最后一篇: Open Problems in Commutative Ring Theory(Cahen-Fontana-Frisch-Glaz)中提出了44个公开问题.

Problem 1a

Let R be a Prüfer ring. Is $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$?

Problem 1b

Let R be a total ring of quotients. Is $\mathrm{fPD}(R) = 0$?

Problem 1提出的背景: 考虑几类环的关系

- 半遗传环 凝聚环+$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.
- $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$
- 算术(arithmetical)环: 对任何$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $R_{\mathfrak{m}}$的理想构成一个全序集.
- Gauss环: $c(fg) = c(f)c(g), f, g \in R[x]$.
  (2011年, Donadze-Thomas证明了若R是Gauss环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- Prüfer环:
- (2007年, Bazzoni-Glaz证明了若R是凝聚Prüfer环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- (2011年, Glaz-Schwarz证明了若R是凝聚完全商环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0$或∞.)

Problem 1提出的背景: 考虑几类环的关系

- 半遗传环 凝聚环+$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.
- $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$
- 算术(arithmetical)环: 对任何$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $R_{\mathfrak{m}}$的理想构成一个全序集.
- Gauss环: $c(fg) = c(f)c(g), f, g \in R[x]$.
  (2011年, Donadze-Thomas证明了若R是Gauss环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- Prüfer环:
- (2007年, Bazzoni-Glaz证明了若R是凝聚Prüfer环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- (2011年, Glaz-Schwarz证明了若R是凝聚完全商环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0$或∞.)

Problem 1提出的背景: 考虑几类环的关系

- 半遗传环 凝聚环+$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.
- $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$
- 算术(arithmetical)环: 对任何$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $R_{\mathfrak{m}}$的理想构成一个全序集.
- Gauss环: $c(fg) = c(f)c(g), f, g \in R[x]$.
  (2011年, Donadze-Thomas证明了若R是Gauss环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- Prüfer环:
- (2007年, Bazzoni-Glaz证明了若R是凝聚Prüfer环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- (2011年, Glaz-Schwarz证明了若R是凝聚完全商环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0$或∞.)

Problem 1提出的背景: 考虑几类环的关系

- 半遗传环 凝聚环+$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.
- $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$
- 算术(arithmetical)环: 对任何$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $R_{\mathfrak{m}}$的理想构成一个全序集.
- Gauss环: $c(fg) = c(f)c(g), f, g \in R[x]$.
  (2011年, Donadze-Thomas证明了若R是Gauss环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- Prüfer环:
- (2007年, Bazzoni-Glaz证明了若R是凝聚Prüfer环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- (2011年, Glaz-Schwarz证明了若R是凝聚完全商环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0$或∞.)

Problem 1提出的背景: 考虑几类环的关系

- 半遗传环 凝聚环+$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.
- $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$
- 算术(arithmetical)环: 对任何$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $R_{\mathfrak{m}}$的理想构成一个全序集.
- Gauss环: $c(fg) = c(f)c(g), f, g \in R[x]$.
  (2011年, Donadze-Thomas证明了若R是Gauss环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- Prüfer环:
- (2007年, Bazzoni-Glaz证明了若R是凝聚Prüfer环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- (2011年, Glaz-Schwarz证明了若R是凝聚完全商环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0$或∞.)

Problem 1提出的背景: 考虑几类环的关系

- 半遗传环 凝聚环+$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.
- $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$
- 算术(arithmetical)环: 对任何$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $R_{\mathfrak{m}}$的理想构成一个全序集.
- Gauss环: $c(fg) = c(f)c(g), f, g \in R[x]$.
  (2011年, Donadze-Thomas证明了若R是Gauss环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- Prüfer环:
- (2007年, Bazzoni-Glaz证明了若R是凝聚Prüfer环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- (2011年, Glaz-Schwarz证明了若R是凝聚完全商环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0$或∞.)

Problem 1提出的背景: 考虑几类环的关系

- 半遗传环 凝聚环+$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.
- $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$
- 算术(arithmetical)环: 对任何$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $R_{\mathfrak{m}}$的理想构成一个全序集.
- Gauss环: $c(fg) = c(f)c(g), f, g \in R[x]$.
  (2011年, Donadze-Thomas证明了若R是Gauss环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- Prüfer环:
- (2007年, Bazzoni-Glaz证明了若R是凝聚Prüfer环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- (2011年, Glaz-Schwarz证明了若R是凝聚完全商环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0$或∞.)

Problem 1提出的背景: 考虑几类环的关系

- 半遗传环 凝聚环+$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.
- $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$
- 算术(arithmetical)环: 对任何$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $R_{\mathfrak{m}}$的理想构成一个全序集.
- Gauss环: $c(fg) = c(f)c(g), f, g \in R[x]$.
  (2011年, Donadze-Thomas证明了若R是Gauss环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- Prüfer环:
- (2007年, Bazzoni-Glaz证明了若R是凝聚Prüfer环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- (2011年, Glaz-Schwarz证明了若R是凝聚完全商环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0$或∞.)

Problem 1提出的背景: 考虑几类环的关系

- 半遗传环 凝聚环+$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$.
- $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$
- 算术(arithmetical)环: 对任何$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $R_{\mathfrak{m}}$的理想构成一个全序集.
- Gauss环: $c(fg) = c(f)c(g), f, g \in R[x]$.
  (2011年, Donadze-Thomas证明了若R是Gauss环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- Prüfer环:
- (2007年, Bazzoni-Glaz证明了若R是凝聚Prüfer环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0, 1$或$\infty$.)
- (2011年, Glaz-Schwarz证明了若R是凝聚完全商环, 则$w.\mathrm{gl.dim}(R) = 0$或∞.)

已有的关于w-模的相关概念

- GV-理想: J有限生成, $R \cong \mathrm{Hom}_R(J, R)$.
- GV-理想集合: $\mathrm{GV}(R)$. 这是一个理想的乘法系.
- GV-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathrm{GV}(R)$, 使得$Jx = 0$.
- GV-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- w-模: 设M是GV-无挠模, 且对任何$J \in \mathrm{GV}(R)$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, M) = 0$.
- w-投射模: 对任何$N \in {}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Ext}^1_R(L(M), N)$是GV-挠模. 其中$L(M) = (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w$.

已有的关于w-模的相关概念

- GV-理想: J有限生成, $R \cong \mathrm{Hom}_R(J, R)$.
- GV-理想集合: $\mathrm{GV}(R)$. 这是一个理想的乘法系.
- GV-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathrm{GV}(R)$, 使得$Jx = 0$.
- GV-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- w-模: 设M是GV-无挠模, 且对任何$J \in \mathrm{GV}(R)$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, M) = 0$.
- w-投射模: 对任何$N \in {}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Ext}^1_R(L(M), N)$是GV-挠模. 其中$L(M) = (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w$.

已有的关于w-模的相关概念

- GV-理想: J有限生成, $R \cong \mathrm{Hom}_R(J, R)$.
- GV-理想集合: $\mathrm{GV}(R)$. 这是一个理想的乘法系.
- GV-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathrm{GV}(R)$, 使得$Jx = 0$.
- GV-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- w-模: 设M是GV-无挠模, 且对任何$J \in \mathrm{GV}(R)$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, M) = 0$.
- w-投射模: 对任何$N \in {}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Ext}^1_R(L(M), N)$是GV-挠模. 其中$L(M) = (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w$.

已有的关于w-模的相关概念

- GV-理想: J有限生成, $R \cong \mathrm{Hom}_R(J, R)$.
- GV-理想集合: $\mathrm{GV}(R)$. 这是一个理想的乘法系.
- GV-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathrm{GV}(R)$, 使得$Jx = 0$.
- GV-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- w-模: 设M是GV-无挠模, 且对任何$J \in \mathrm{GV}(R)$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, M) = 0$.
- w-投射模: 对任何$N \in {}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Ext}^1_R(L(M), N)$是GV-挠模. 其中$L(M) = (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w$.

已有的关于w-模的相关概念

- GV-理想: J有限生成, $R \cong \mathrm{Hom}_R(J, R)$.
- GV-理想集合: $\mathrm{GV}(R)$. 这是一个理想的乘法系.
- GV-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathrm{GV}(R)$, 使得$Jx = 0$.
- GV-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- w-模: 设M是GV-无挠模, 且对任何$J \in \mathrm{GV}(R)$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, M) = 0$.
- w-投射模: 对任何$N \in {}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Ext}^1_R(L(M), N)$是GV-挠模. 其中$L(M) = (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w$.

已有的关于w-模的相关概念

- GV-理想: J有限生成, $R \cong \mathrm{Hom}_R(J, R)$.
- GV-理想集合: $\mathrm{GV}(R)$. 这是一个理想的乘法系.
- GV-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathrm{GV}(R)$, 使得$Jx = 0$.
- GV-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- w-模: 设M是GV-无挠模, 且对任何$J \in \mathrm{GV}(R)$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, M) = 0$.
- w-投射模: 对任何$N \in {}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Ext}^1_R(L(M), N)$是GV-挠模. 其中$L(M) = (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w$.

已有的关于w-模的相关概念

- GV-理想: J有限生成, $R \cong \mathrm{Hom}_R(J, R)$.
- GV-理想集合: $\mathrm{GV}(R)$. 这是一个理想的乘法系.
- GV-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathrm{GV}(R)$, 使得$Jx = 0$.
- GV-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- w-模: 设M是GV-无挠模, 且对任何$J \in \mathrm{GV}(R)$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, M) = 0$.
- w-投射模: 对任何$N \in {}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Ext}^1_R(L(M), N)$是GV-挠模. 其中$L(M) = (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w$.

已有的关于w-模的相关概念

- GV-理想: J有限生成, $R \cong \mathrm{Hom}_R(J, R)$.
- GV-理想集合: $\mathrm{GV}(R)$. 这是一个理想的乘法系.
- GV-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathrm{GV}(R)$, 使得$Jx = 0$.
- GV-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- w-模: 设M是GV-无挠模, 且对任何$J \in \mathrm{GV}(R)$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, M) = 0$.
- w-投射模: 对任何$N \in {}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Ext}^1_R(L(M), N)$是GV-挠模. 其中$L(M) = (M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w$.

新引入的关于Lucas模的相关概念

- 半正则理想: I中有一个有限生成子理想I_0, 满足$\mathrm{ann}(I_0) = 0$.
- 有限生成半正则理想: $\mathrm{ann}(I) = 0$.
- 有限生成半正则理想的集合: $\mathcal{Q}$. 这是一个理想的乘法系.
- $\mathcal{Q}$-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathcal{Q}$, 使得$Jx = 0$.
- $\mathcal{Q}$-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- Lucas模: 设M是$\mathcal{Q}$-无挠模, 且对任何$J \in \mathcal{Q}$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, E) = 0$.

新引入的关于Lucas模的相关概念

- 半正则理想: I中有一个有限生成子理想I_0, 满足$\mathrm{ann}(I_0) = 0$.
- 有限生成半正则理想: $\mathrm{ann}(I) = 0$.
- 有限生成半正则理想的集合: $\mathcal{Q}$. 这是一个理想的乘法系.
- $\mathcal{Q}$-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathcal{Q}$, 使得$Jx = 0$.
- $\mathcal{Q}$-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- Lucas模: 设M是$\mathcal{Q}$-无挠模, 且对任何$J \in \mathcal{Q}$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, E) = 0$.

新引入的关于Lucas模的相关概念

- 半正则理想: I中有一个有限生成子理想I_0, 满足$\mathrm{ann}(I_0) = 0$.
- 有限生成半正则理想: $\mathrm{ann}(I) = 0$.
- 有限生成半正则理想的集合: $\mathcal{Q}$. 这是一个理想的乘法系.
- $\mathcal{Q}$-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathcal{Q}$, 使得$Jx = 0$.
- $\mathcal{Q}$-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- Lucas模: 设M是$\mathcal{Q}$-无挠模, 且对任何$J \in \mathcal{Q}$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, E) = 0$.

新引入的关于Lucas模的相关概念

- 半正则理想: I中有一个有限生成子理想I_0, 满足$\mathrm{ann}(I_0) = 0$.
- 有限生成半正则理想: $\mathrm{ann}(I) = 0$.
- 有限生成半正则理想的集合: $\mathcal{Q}$. 这是一个理想的乘法系.
- $\mathcal{Q}$-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathcal{Q}$, 使得$Jx = 0$.
- $\mathcal{Q}$-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- Lucas模: 设M是$\mathcal{Q}$-无挠模, 且对任何$J \in \mathcal{Q}$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, E) = 0$.

新引入的关于Lucas模的相关概念

- 半正则理想: I中有一个有限生成子理想I_0, 满足$\mathrm{ann}(I_0) = 0$.
- 有限生成半正则理想: $\mathrm{ann}(I) = 0$.
- 有限生成半正则理想的集合: $\mathcal{Q}$. 这是一个理想的乘法系.
- $\mathcal{Q}$-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathcal{Q}$, 使得$Jx = 0$.
- $\mathcal{Q}$-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- Lucas模: 设M是$\mathcal{Q}$-无挠模, 且对任何$J \in \mathcal{Q}$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, E) = 0$.

新引入的关于Lucas模的相关概念

- 半正则理想: I中有一个有限生成子理想I_0, 满足$\mathrm{ann}(I_0) = 0$.
- 有限生成半正则理想: $\mathrm{ann}(I) = 0$.
- 有限生成半正则理想的集合: $\mathcal{Q}$. 这是一个理想的乘法系.
- $\mathcal{Q}$-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathcal{Q}$, 使得$Jx = 0$.
- $\mathcal{Q}$-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- Lucas模: 设M是$\mathcal{Q}$-无挠模, 且对任何$J \in \mathcal{Q}$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, E) = 0$.

新引入的关于Lucas模的相关概念

- 半正则理想: I中有一个有限生成子理想I_0, 满足$\mathrm{ann}(I_0) = 0$.
- 有限生成半正则理想: $\mathrm{ann}(I) = 0$.
- 有限生成半正则理想的集合: $\mathcal{Q}$. 这是一个理想的乘法系.
- $\mathcal{Q}$-挠模: 对任何$x \in M$, 存在$J \in \mathcal{Q}$, 使得$Jx = 0$.
- $\mathcal{Q}$-无挠模: 由$Jx = 0$, 其中$x \in M$, $J \in \mathrm{GV}(R)$, 能推出$x = 0$.
- Lucas模: 设M是$\mathcal{Q}$-无挠模, 且对任何$J \in \mathcal{Q}$, 有$\mathrm{Ext}^1_R(R/J, E) = 0$.

已有的DW环的概念

- DW环: R的每个理想是w-理想.

DW环的刻画

对环R, 则以下各条等价:

(1) R是DW环.
(2) R的每个极大理想是w-理想.
(3) 每个R-模是GV-无挠模.
(4) 每个R-模是w-模.
(5) $\mathrm{GV}(R) = \{R\}$.

已有的DW环的概念

- DW环: R的每个理想是w-理想.

DW环的刻画

对环R, 则以下各条等价:

(1) R是DW环.
(2) R的每个极大理想是w-理想.
(3) 每个R-模是GV-无挠模.
(4) 每个R-模是w-模.
(5) $\mathrm{GV}(R) = \{R\}$.

已有的DW环的概念

- DW环: R的每个理想是w-理想.

DW环的刻画

对环R, 则以下各条等价:

(1) R是DW环.
(2) R的每个极大理想是w-理想.
(3) 每个R-模是GV-无挠模.
(4) 每个R-模是w-模.
(5) $\mathrm{GV}(R) = \{R\}$.

新引入的DQ环的概念

定义

若R的每一个理想作为R-模都是Lucas模，则R称为DQ-环.

命题1

(1) 若对R的任何极大理想$\mathfrak{m}$，都有$R_{\mathfrak{m}}$是DQ环，则R是DQ环.

(2) 设$\dim(R) = 0$，则R是DQ环.

定理1

对任何环R，$T(R[x])$是DQ环.

命题2

若R是DQ-环，则$Q_0(R) = R$.

新引入的DQ环的概念

定义

若R的每一个理想作为R-模都是Lucas模，则R称为DQ-环.

命题1

(1) 若对R的任何极大理想$\mathfrak{m}$，都有$R_{\mathfrak{m}}$是DQ环，则R是DQ环.

(2) 设$\dim(R) = 0$，则R是DQ环.

定理1

对任何环R，$T(R[x])$是DQ环.

命题2

若R是DQ-环，则$Q_0(R) = R$.

新引入的DQ环的概念

定义

若R的每一个理想作为R-模都是Lucas模，则R称为DQ-环.

命题1

(1) 若对R的任何极大理想$\mathfrak{m}$，都有$R_{\mathfrak{m}}$是DQ环，则R是DQ环.

(2) 设$\dim(R) = 0$，则R是DQ环.

定理1

对任何环R，$T(R[x])$是DQ环.

命题2

若R是DQ-环，则$Q_0(R) = R$.

新引入的DQ环的概念

定义

若R的每一个理想作为R-模都是Lucas模，则R称为DQ-环.

命题1

(1) 若对R的任何极大理想$\mathfrak{m}$，都有$R_{\mathfrak{m}}$是DQ环，则R是DQ环.

(2) 设$\dim(R) = 0$，则R是DQ环.

定理1

对任何环R，$T(R[x])$是DQ环.

命题2

若R是DQ-环，则$Q_0(R) = R$.

新引入的DQ环的概念

定义

若R的每一个理想作为R-模都是Lucas模, 则R称为DQ-环.

命题1

(1) 若对R的任何极大理想$\mathfrak{m}$, 都有$R_{\mathfrak{m}}$是DQ环, 则R是DQ环.

(2) 设$\dim(R) = 0$, 则R是DQ环.

定理1

对任何环R, $T(R[x])$是DQ环.

命题2

若R是DQ-环, 则$Q_0(R) = R$.

新引入的DQ环的概念

定义

若R的每一个理想作为R-模都是Lucas模, 则R称为DQ-环.

命题1

(1) 若对R的任何极大理想$\mathfrak{m}$, 都有$R_{\mathfrak{m}}$是DQ环, 则R是DQ环.

(2) 设$\dim(R) = 0$, 则R是DQ环.

定理1

对任何环R, $T(R[x])$是DQ环.

命题2

若R是DQ-环, 则$Q_0(R) = R$.

$Q_0(R)$: R的有限分式环 (the ring of finite fractions)

R有限分式环的定义:

$Q_0(R) := \{\alpha \in T(R[x]) \mid 存在 I \in \mathcal{Q}, 使得 I\alpha \subseteq R\}$.

- $Q_0(R)$中的元素描述: 设$\alpha = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i} \in T(R[x])$, 其中$a_i, b_i \in R$.
  则$\alpha \in Q_0(R)$当且仅当对所有下标i, j, 有$a_i b_j = a_j b_i$.

$Q_0(R)$: R的有限分式环 (the ring of finite fractions)

R有限分式环的定义:

$Q_0(R) := \{\alpha \in T(R[x]) \mid$ 存在$I \in \mathcal{Q}$, 使得$I\alpha \subseteq R\}$.

- $Q_0(R)$中的元素描述: 设$\alpha = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i} \in T(R[x])$, 其中$a_i, b_i \in R$.
  则$\alpha \in Q_0(R)$当且仅当对所有下标i, j, 有$a_i b_j = a_j b_i$.

$Q_0(R)$: R的有限分式环 (the ring of finite fractions)

R有限分式环的定义:

$Q_0(R) := \{\alpha \in T(R[x]) \mid$ 存在$I \in \mathcal{Q}$, 使得$I\alpha \subseteq R\}$.

- $Q_0(R)$中的元素描述: 设$\alpha = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i} \in T(R[x])$, 其中$a_i, b_i \in R$.
  则$\alpha \in Q_0(R)$当且仅当对所有下标i, j, 有$a_i b_j = a_j b_i$.

$Q_0(R)$: R的有限分式环 (the ring of finite fractions)

R有限分式环的定义:

$Q_0(R) := \{\alpha \in T(R[x]) \mid$ 存在$I \in \mathcal{Q}$, 使得$I\alpha \subseteq R\}$.

- $Q_0(R)$中的元素描述: 设$\alpha = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i} \in T(R[x])$, 其中$a_i, b_i \in R$.
  则$\alpha \in Q_0(R)$当且仅当对所有下标i, j, 有$a_i b_j = a_j b_i$.

$Q_0(R)$的作用

- 整环的研究方法很多，如何搬到一般交换环上.
- 乘法理想理论对整环的依赖性：商域K的作用(平坦模，内射模，每一K-模是自由模，K中元素表示$\frac{a}{b}$明确具体，$R \subseteq K$).
- 有用完全商环$T(R)$代替整环的商域的作用，此时许多研究必须涉及正则理想.
- Lucas的系列工作：用$Q_0(R)$代替整环商域的作用. 例如，证明了$R[x]$是整闭环(在$T(R[x])$中整闭)当且仅当R在$Q_0(R)$中整闭. (比较：R是整闭整环当且仅当$R[x]$是整闭整环)
- 关系：$R \subseteq T(R) \subseteq Q_0(R)$.
  从而若$Q_0(R) = R$，则一定有$T(R) = R$.

$Q_0(R)$的作用

- 整环的研究方法很多，如何搬到一般交换环上.
- 乘法理想理论对整环的依赖性：商域K的作用(平坦模，内射模，每一K-模是自由模，K中元素表示$\frac{a}{b}$明确具体，$R \subseteq K$).
- 有用完全商环$T(R)$代替整环的商域的作用，此时许多研究必须涉及正则理想.
- Lucas的系列工作：用$Q_0(R)$代替整环商域的作用. 例如，证明了$R[x]$是整闭环(在$T(R[x])$中整闭)当且仅当R在$Q_0(R)$中整闭. (比较：R是整闭整环当且仅当$R[x]$是整闭整环)
- 关系：$R \subseteq T(R) \subseteq Q_0(R)$.
  从而若$Q_0(R) = R$，则一定有$T(R) = R$.

$Q_0(R)$的作用

- 整环的研究方法很多，如何搬到一般交换环上.
- 乘法理想理论对整环的依赖性：商域K的作用(平坦模，内射模，每一K-模是自由模，K中元素表示$\frac{a}{b}$明确具体，$R \subseteq K$).
- 有用完全商环$T(R)$代替整环的商域的作用，此时许多研究必须涉及正则理想.
- Lucas的系列工作：用$Q_0(R)$代替整环商域的作用. 例如，证明了$R[x]$是整闭环(在$T(R[x])$中整闭)当且仅当R在$Q_0(R)$中整闭. (比较：R是整闭整环当且仅当$R[x]$是整闭整环)
- 关系：$R \subseteq T(R) \subseteq Q_0(R)$.
  从而若$Q_0(R) = R$，则一定有$T(R) = R$.

$Q_0(R)$的作用

- 整环的研究方法很多，如何搬到一般交换环上.
- 乘法理想理论对整环的依赖性：商域K的作用(平坦模，内射模，每一K-模是自由模，K中元素表示$\frac{a}{b}$明确具体，$R \subseteq K$).
- 有用完全商环$T(R)$代替整环的商域的作用，此时许多研究必须涉及正则理想.
- Lucas的系列工作：用$Q_0(R)$代替整环商域的作用. 例如，证明了$R[x]$是整闭环(在$T(R[x])$中整闭)当且仅当R在$Q_0(R)$中整闭. (比较：R是整闭整环当且仅当$R[x]$是整闭整环)
- 关系：$R \subseteq T(R) \subseteq Q_0(R)$.
  从而若$Q_0(R) = R$，则一定有$T(R) = R$.

$Q_0(R)$的作用

- 整环的研究方法很多, 如何搬到一般交换环上.
- 乘法理想理论对整环的依赖性: 商域K的作用(平坦模, 内射模, 每一K-模是自由模, K中元素表示$\frac{a}{b}$明确具体, $R \subseteq K$).
- 有用完全商环$T(R)$代替整环的商域的作用, 此时许多研究必须涉及正则理想.
- Lucas的系列工作: 用$Q_0(R)$代替整环商域的作用. 例如, 证明了$R[x]$是整闭环(在$T(R[x])$中整闭)当且仅当R在$Q_0(R)$中整闭. (比较: R是整闭整环当且仅当$R[x]$是整闭整环)
- 关系: $R \subseteq T(R) \subseteq Q_0(R)$.
  从而若$Q_0(R) = R$, 则一定有$T(R) = R$.

$Q_0(R)$的作用

- 整环的研究方法很多, 如何搬到一般交换环上.
- 乘法理想理论对整环的依赖性: 商域K的作用(平坦模, 内射模, 每一K-模是自由模, K中元素表示$\frac{a}{b}$明确具体, $R \subseteq K$).
- 有用完全商环$T(R)$代替整环的商域的作用, 此时许多研究必须涉及正则理想.
- Lucas的系列工作: 用$Q_0(R)$代替整环商域的作用. 例如, 证明了$R[x]$是整闭环(在$T(R[x])$中整闭)当且仅当R在$Q_0(R)$中整闭. (比较: R是整闭整环当且仅当$R[x]$是整闭整环)
- 关系: $R \subseteq T(R) \subseteq Q_0(R)$.
  从而若$Q_0(R) = R$, 则一定有$T(R) = R$.

何时有$Q_0(R) = R$

与$T(R) = R$对比

$T(R) = R$当且仅当每个非零因子是单位，当且仅当R的正则理想只有R.

命题3

$Q_0(R) = R$当且仅当$\mathcal{Q} = \mathrm{GV}(R)$，即有限生成半正则理想只有GV-理想.

何时有$Q_0(R) = R$

与$T(R) = R$对比

$T(R) = R$当且仅当每个非零因子是单位，当且仅当R的正则理想只有R.

命题3

$Q_0(R) = R$当且仅当$Q = \mathrm{GV}(R)$，即有限生成半正则理想只有GV-理想.

何时有$Q_0(R) = R$

与$T(R) = R$对比

$T(R) = R$当且仅当每个非零因子是单位，当且仅当R的正则理想只有R.

命题3

$Q_0(R) = R$当且仅当$\mathcal{Q} = \mathrm{GV}(R)$，即有限生成半正则理想只有GV-理想.

主要结果

Problem 1b:
若R是完全商环, 即$T(R) = R$, 是否有$\mathrm{fPD}(R) = 0$.

解答: 答案是否定的.

Problem 1a:
若R是Prüfer环, 是否有$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

解答: 答案是否定的.

关键定理
若$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$, 则$R$是DW环.

主要结果

Problem 1b:
若R是完全商环, 即$T(R) = R$, 是否有$\mathrm{fPD}(R) = 0$.

解答: 答案是否定的.

Problem 1a:
若R是Prüfer环, 是否有$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

解答: 答案是否定的.

关键定理
若$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$, 则$R$是DW环.

主要结果

Problem 1b:
若R是完全商环, 即$T(R) = R$, 是否有$\mathrm{fPD}(R) = 0$.

解答: 答案是否定的.

Problem 1a:
若R是Prüfer环, 是否有$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

解答: 答案是否定的.

关键定理
若$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$, 则$R$是DW环.

主要结果

Problem 1b:
若R是完全商环, 即$T(R) = R$, 是否有$\mathrm{fPD}(R) = 0$.

解答: 答案是否定的.

Problem 1a:
若R是Prüfer环, 是否有$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

解答: 答案是否定的.

关键定理
若$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$, 则$R$是DW环.

关键引理

- 设$I = (a_1, \cdots, a_n)$是R的有限生成理想. 定义$f_I : R \to R^n$, 由下式给出:
  $f_I(r) = (ra_1, \cdots, ra_n), \qquad r \in R.$
- 当I是R的半正则理想时, 显然有f_I是单同态.

引理1

设$I = (a_1, \cdots, a_n)$是R的半正则理想, 记$M := \mathrm{cok}(f_I)$. 设X是任何R-模. 则有:

(1) 则f_I是分裂的单同态当且仅当$I = R$.

(2) $\mathrm{Ext}^1_R(M, X) \cong X/IX$, 从而当$I \in \mathrm{GV}(R)$时, M是w-投射模.

定理2

设$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$, 则$R$是DW环.

关键引理

- 设$I=(a_1,\cdots,a_n)$是R的有限生成理想. 定义$f_I: R\to R^n$, 由下式给出:
$$f_I(r)=(ra_1,\cdots,ra_n),\qquad r\in R.$$
- 当I是R的半正则理想时, 显然有f_I是单同态.

引理1

设$I=(a_1,\cdots,a_n)$是R的半正则理想, 记$M:=\mathrm{cok}(f_I)$. 设X是任何R-模. 则有:

(1) 则f_I是分裂的单同态当且仅当$I=R$.

(2) $\mathrm{Ext}^1_R(M,X)\cong X/IX$, 从而当$I\in\mathrm{GV}(R)$时, M是w-投射模.

定理2

设$\mathrm{fPD}(R)\leqslant 1$, 则$R$是DW环.

关键引理

- 设$I=(a_1,\cdots,a_n)$是R的有限生成理想. 定义$f_I: R\to R^n$, 由下式给出:
$$f_I(r)=(ra_1,\cdots,ra_n),\qquad r\in R.$$
- 当I是R的半正则理想时, 显然有f_I是单同态.

引理1

设$I=(a_1,\cdots,a_n)$是R的半正则理想, 记$M:=\mathrm{cok}(f_I)$. 设X是任何R-模. 则有:

(1) 则f_I是分裂的单同态当且仅当$I=R$.

(2) $\mathrm{Ext}^1_R(M,X)\cong X/IX$, 从而当$I\in\mathrm{GV}(R)$时, M是w-投射模.

定理2

设$\mathrm{fPD}(R)\leqslant 1$, 则$R$是DW环.

关键引理

- 设$I=(a_1,\cdots,a_n)$是R的有限生成理想. 定义$f_I: R\to R^n$, 由下式给出:
  $f_I(r)=(ra_1,\cdots,ra_n), \qquad r\in R.$
- 当I是R的半正则理想时, 显然有f_I是单同态.

引理1

设$I=(a_1,\cdots,a_n)$是R的半正则理想, 记$M:=\mathrm{cok}(f_I)$. 设X是任何R-模. 则有:

(1) 则f_I是分裂的单同态当且仅当$I=R$.

(2) $\mathrm{Ext}^1_R(M,X)\cong X/IX$, 从而当$I\in \mathrm{GV}(R)$时, M是w-投射模.

定理2

设$\mathrm{fPD}(R)\leqslant 1$, 则$R$是DW环.

关键引理

- 设$I=(a_1,\cdots,a_n)$是R的有限生成理想. 定义$f_I:R\to R^n$, 由下式给出:
  $f_I(r)=(ra_1,\cdots,ra_n),\qquad r\in R.$
- 当I是R的半正则理想时, 显然有f_I是单同态.

引理1

设$I=(a_1,\cdots,a_n)$是R的半正则理想, 记$M:=\mathrm{cok}(f_I)$. 设X是任何R-模. 则有:
(1) 则f_I是分裂的单同态当且仅当$I=R$.
(2) $\mathrm{Ext}^1_R(M,X)\cong X/IX$, 从而当$I\in\mathrm{GV}(R)$时, M是w-投射模.

定理2

设$\mathrm{fPD}(R)\leqslant 1$, 则$R$是DW环.

$\mathrm{fPD}(R)=0$的刻画

定理3

对环R, 以下各条等价:

(1) R是DQ环.

(2) R的每一个素理想都是非半正则理想.

(3) R的每一个极大理想都是非半正则理想.

(4) R的每个真理想都是非半正则理想.

(5) (李文喜陈建龙定理) R的每个有限生成真理想都是非半正则理想, 即$\mathrm{ann}(I)\neq 0$.

(6) $\mathcal{Q}=\{R\}$.

(7) 每一R-模是Lucas模.

(8) $\mathcal{Q}_0(R)=R$, 且R是DW环.

(9) $\mathrm{fPD}(R)=0$.

$\mathrm{fPD}(R) = 0$的刻画

定理3

对环R, 以下各条等价:

(1) R是DQ环.

(2) R的每一个素理想都是非半正则理想.

(3) R的每一个极大理想都是非半正则理想.

(4) R的每个真理想都是非半正则理想.

(5) (**李文喜陈建龙定理**) R的每个有限生成真理想都是非半正则理想, 即$\mathrm{ann}(I) \neq 0$.

(6) $\mathcal{Q} = \{R\}$.

(7) 每一R-模是Lucas模.

(8) $Q_0(R) = R$, 且R是DW环.

(9) $\mathrm{fPD}(R) = 0$.

比较DW环的概念

(Li W X, Chen J L, Kourki F(2013): On strongly C2 modules and D2 modules, J Algebra Appl.)

DW环的刻画

对环R, 则以下各条等价:

(1) R是DW环.

(2) R的每个极大理想是w-理想.

(3) 每个R-模是GV-无挠模.

(4) 每个R-模是w-模.

(5) $\mathrm{GV}(R) = \{R\}$.

比较DW环的概念

(Li W X, Chen J L, Kourki F(2013): On strongly C2 modules and D2 modules, J Algebra Appl.)

DW环的刻画

对环R, 则以下各条等价:

(1) R是DW环.

(2) R的每个极大理想是w-理想.

(3) 每个R-模是GV-无挠模.

(4) 每个R-模是w-模.

(5) $\mathrm{GV}(R) = \{R\}$.

比较DW环的概念

(Li W X, Chen J L, Kourki F(2013): On strongly C2 modules and D2 modules, J Algebra Appl.)

DW环的刻画

对环R, 则以下各条等价:

(1) R是DW环.

(2) R的每个极大理想是w-理想.

(3) 每个R-模是GV-无挠模.

(4) 每个R-模是w-模.

(5) $\mathrm{GV}(R) = \{R\}$.

Problem 1b的反例

通过平凡扩张构造一个环R, 使得$Q_0(R) = R$, 但R不是DQ环, 即R不是DW环, 从而由定理2, 得到$\mathrm{fPD}(R) \neq 0$.

- 设D是整环但不是域, 并设其商域为K. 设$H = (K/D)_w$.
- 作平凡扩张$R = D \propto H$.

引理2

设D是最大公因子整环. 设$J = I \propto H$是R的理想, 且$I \neq 0$. 则有:

(1) 若J是有限生成的, 则$I = I_1 d$, 其中$I_1 \in \mathrm{GV}(D)$.

(2) $J \in \mathcal{Q}$当且仅当$I \in \mathrm{GV}(D)$.

Problem 1b的反例

通过平凡扩张构造一个环R, 使得$Q_0(R) = R$, 但R不是DQ环, 即R不是DW环, 从而由定理2, 得到$\mathrm{fPD}(R) \neq 0$.

- 设D是整环但不是域, 并设其商域为K. 设$H = (K/D)_w$.
- 作平凡扩张$R = D \propto H$.

引理2

设D是最大公因子整环. 设$J = I \propto H$是R的理想, 且$I \neq 0$. 则有:

(1) 若J是有限生成的, 则$I = I_1 d$, 其中$I_1 \in \mathrm{GV}(D)$.

(2) $J \in \mathcal{Q}$当且仅当$I \in \mathrm{GV}(D)$.

Problem 1b的反例

通过平凡扩张构造一个环R, 使得$Q_0(R) = R$, 但R不是DQ环, 即R不是DW环, 从而由定理2, 得到$\mathrm{fPD}(R) \neq 0$.

- 设D是整环但不是域, 并设其商域为K. 设$H = (K/D)_w$.
- 作平凡扩张$R = D \propto H$.

引理2

设D是最大公因子整环. 设$J = I \propto H$是R的理想, 且$I \neq 0$. 则有:

(1) 若J是有限生成的, 则$I = I_1 d$, 其中$I_1 \in \mathrm{GV}(D)$.

(2) $J \in \mathcal{Q}$当且仅当$I \in \mathrm{GV}(D)$.

Problem 1b的反例

通过平凡扩张构造一个环R, 使得$Q_0(R) = R$, 但R不是DQ环, 即R不是DW环, 从而由定理2, 得到$\mathrm{fPD}(R) \neq 0$.

- 设D是整环但不是域, 并设其商域为K. 设$H = (K/D)_w$.
- 作平凡扩张$R = D \propto H$.

引理2

设D是最大公因子整环. 设$J = I \propto H$是R的理想, 且$I \neq 0$. 则有:

(1) 若J是有限生成的, 则$I = I_1 d$, 其中$I_1 \in \mathrm{GV}(D)$.

(2) $J \in \mathcal{Q}$当且仅当$I \in \mathrm{GV}(D)$.

Problem 1b的反例

通过平凡扩张构造一个环R, 使得$Q_0(R) = R$, 但R不是DQ环, 即R不是DW环, 从而由定理2, 得到$\mathrm{fPD}(R) \neq 0$.

- 设D是整环但不是域, 并设其商域为K. 设$H = (K/D)_w$.
- 作平凡扩张$R = D \propto H$.

引理2

设D是最大公因子整环. 设$J = I \propto H$是R的理想, 且$I \neq 0$. 则有:

(1) 若J是有限生成的, 则$I = I_1 d$, 其中$I_1 \in \mathrm{GV}(D)$.

(2) $J \in \mathcal{Q}$当且仅当$I \in \mathrm{GV}(D)$.

Problem 1b的反例

引理3

设D是最大公因子整环, A是D的理想. 则有:
(1) 设$B = A \propto H$, 则B是R的w-理想当且仅当A是D的w-理想.
(2) 仍设$B = A \propto H$, 则$B_W = A_w \propto H$.
(3) 设$M = \mathfrak{m} \propto H$是$R$的理想. 则$M \in w\text{-Max}(R)$当且仅当$\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(D)$.

例1

设D是最大公因子整环. 则有:
(1) $Q_0(R) = R$, 从而有$T(R) = R$.
(2) 若D不是DW整环(例如取$D = F[y, z]$, 其中F是域, y, z是未定元), 则R不是DW环.

Problem 1b的反例

引理3

设D是最大公因子整环, A是D的理想. 则有:
(1) 设$B = A \propto H$, 则B是R的w-理想当且仅当A是D的w-理想.
(2) 仍设$B = A \propto H$, 则$B_W = A_w \propto H$.
(3) 设$M = \mathfrak{m} \propto H$是$R$的理想. 则$M \in w\text{-Max}(R)$当且仅当$\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(D)$.

例1

设D是最大公因子整环. 则有:
(1) $Q_0(R) = R$, 从而有$T(R) = R$.
(2) 若D不是DW整环(例如取$D = F[y, z]$, 其中F是域, y, z是未定元), 则R不是DW环.

Problem 1b的反例

引理3

设D是最大公因子整环, A是D的理想. 则有:
(1) 设$B = A \propto H$, 则B是R的w-理想当且仅当A是D的w-理想.
(2) 仍设$B = A \propto H$, 则$B_W = A_w \propto H$.
(3) 设$M = \mathfrak{m} \propto H$是$R$的理想. 则$M \in w\text{-Max}(R)$当且仅当$\mathfrak{m} \in w\text{-Max}(D)$.

例1

设D是最大公因子整环. 则有:
(1) $Q_0(R) = R$, 从而有$T(R) = R$.
(2) 若D不是DW整环(例如取$D = F[y, z]$, 其中F是域, y, z是未定元), 则R不是DW环.

Problem 1a的反例

例2

刚才的例1满足$T(R) = R$, 故R也是Prüfer环, 但R不是DW环. 从而$\mathrm{fPD}(R) > 1$.

例3

设R如例1, D是Prüfer整环, 但D不是域. 则$D \bigoplus R$是Prüfer环, 但不是DW环. 从而$\mathrm{fPD}(R) > 1$. 此时$T(D \bigoplus R) \neq D \bigoplus R$.

Problem 1a的反例

例2

刚才的例1满足$T(R) = R$, 故R也是Prüfer环, 但R不是DW环. 从而$\mathrm{fPD}(R) > 1$.

例3

设R如例1, D是Prüfer整环, 但D不是域. 则$D \bigoplus R$是Prüfer环, 但不是DW环. 从而$\mathrm{fPD}(R) > 1$. 此时$T(D \bigoplus R) \neq D \bigoplus R$.

Problem 1a的反例

例2

刚才的例1满足$T(R) = R$, 故R也是Prüfer环, 但R不是DW环. 从而$\mathrm{fPD}(R) > 1$.

例3

设R如例1, D是Prüfer整环, 但D不是域. 则$D \bigoplus R$是Prüfer环, 但不是DW环. 从而$\mathrm{fPD}(R) > 1$. 此时$T(D \bigoplus R) \neq D \bigoplus R$.

FT-平坦模和对$\mathrm{fPD}(R)=0$的环的刻画

定义

模M称为FT-平坦模(FT: finitistic), 是指对任何$N\in\mathrm{FPR}$, 有$\mathrm{Tor}_1^R(M,N)=0$.

定理4

对环R, 以下各条等价:

(1) 每个R-模是FT-平坦模.
(2) 每个有限生成R-模是FT-平坦模.
(3) 每个循环R-模是FT-平坦模.
(4) 每个循环的有限表现R-模是FT-平坦模.
(5) $\mathrm{fPD}(R)=0$.

FT-平坦模和对$\mathrm{fPD}(R)=0$的环的刻画

定义

模M称为FT-平坦模(FT: finitistic), 是指对任何$N\in \mathrm{FPR}$, 有$\mathrm{Tor}_1^R(M,N)=0$.

定理4

对环R, 以下各条等价:

(1) 每个R-模是FT-平坦模.
(2) 每个有限生成R-模是FT-平坦模.
(3) 每个循环R-模是FT-平坦模.
(4) 每个循环的有限表现R-模是FT-平坦模.
(5) $\mathrm{fPD}(R)=0$.

FT-平坦模和对$\mathrm{fPD}(R)=0$的环的刻画

定义

模M称为FT-平坦模(FT: finitistic), 是指对任何$N\in\mathrm{FPR}$, 有$\mathrm{Tor}_1^R(M,N)=0$.

定理4

对环R, 以下各条等价:

(1) 每个R-模是FT-平坦模.
(2) 每个有限生成R-模是FT-平坦模.
(3) 每个循环R-模是FT-平坦模.
(4) 每个循环的有限表现R-模是FT-平坦模.
(5) $\mathrm{fPD}(R)=0$.

$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$的环的刻画

定理5

对环R, 以下各条等价:

(1) $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

(2) 平坦模的子模是FT-平坦模.

(3) R的每个理想是FT-平坦模.

(4) R的每个有限生成理想是FT-平坦模.

$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$的环的刻画

定理5

对环R, 以下各条等价:

(1) $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

(2) 平坦模的子模是FT-平坦模.

(3) R的每个理想是FT-平坦模.

(4) R的每个有限生成理想是FT-平坦模.

$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$的整环的刻画

定理6

设R是整环, 则以下各条等价:

(1) $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

(2) 对R的任何非零非单位元素u, $\mathrm{fPD}(R/(u)) = 0$.

(3) 无挠模是FT-平坦模.

(4) 设A是无挠模, 且$A \in \mathrm{FPR}$, 则A是投射模.

定理7

设R是整环. 若$\dim(R) \leqslant 1$, 则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$的整环的刻画

定理6

设R是整环, 则以下各条等价:

(1) $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

(2) 对R的任何非零非单位元素u, $\mathrm{fPD}(R/(u)) = 0$.

(3) 无挠模是FT-平坦模.

(4) 设A是无挠模, 且$A \in \mathrm{FPR}$, 则A是投射模.

定理7

设R是整环. 若$\dim(R) \leqslant 1$, 则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$的整环的刻画

定理6

设R是整环, 则以下各条等价:

(1) $\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

(2) 对R的任何非零非单位元素u, $\mathrm{fPD}(R/(u)) = 0$.

(3) 无挠模是FT-平坦模.

(4) 设A是无挠模, 且$A \in \mathrm{FPR}$, 则A是投射模.

定理7

设R是整环. 若$\dim(R) \leqslant 1$, 则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

比较Gruson-Raynau定理

Gruson-Raynau定理(1971)

设R是Noether环，则$\mathrm{FPD}(R) = \dim(R)$. (从而若$\dim(R) \leqslant 1$，则$\mathrm{FPD}(R) \leqslant 1$.)

例4

定理7的反之未必成立. 事实上，若R是赋值整环，则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$. 任取一个满足$\dim(R) > 1$的赋值整环(例如，取$R = \mathbb{Z}_{(2)} + x\mathbb{Q}[[x]]$，此时$\dim(R) = 2$)即知反之不真.

比较Gruson-Raynau定理

Gruson-Raynau定理(1971)

设R是Noether环，则$\mathrm{FPD}(R) = \dim(R)$. (从而若$\dim(R) \leqslant 1$，则$\mathrm{FPD}(R) \leqslant 1$.)

例4

定理7的反之未必成立. 事实上，若R是赋值整环，则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$. 任取一个满足$\dim(R) > 1$的赋值整环(例如，取$R = \mathbb{Z}_{(2)} + x\mathbb{Q}[[x]]$，此时$\dim(R) = 2$)即知反之不真.

比较Gruson-Raynau定理

Gruson-Raynau定理(1971)

设R是Noether环，则$\mathrm{FPD}(R) = \dim(R)$. (从而若$\dim(R) \leqslant 1$，则$\mathrm{FPD}(R) \leqslant 1$.)

例4

定理7的反之未必成立. 事实上，若R是赋值整环，则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant w.\mathrm{gl.dim}(R) \leqslant 1$. 任取一个满足$\dim(R) > 1$的赋值整环(例如，取$R = \mathbb{Z}_{(2)} + x\mathbb{Q}[[x]]$，此时$\dim(R) = 2$)即知反之不真.

强PRüfer环的小finitistic维数

- 新的逆的定义：设I是$Q_0(R)$的R-子模，定义
  $I^{-1} = \{x \in Q_0(R) \mid xI \subseteq R\}$.
  I称为可逆的，是指$II^{-1} = R$.
- 强Prüfer环：R的每个有限生成半正则理想是可逆理想.

定理8

设R是连通的强Prüfer环，则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

强PRüfer环的小finitistic维数

- 新的逆的定义：设I是$Q_0(R)$的R-子模，定义
  $I^{-1} = \{x \in Q_0(R) \mid xI \subseteq R\}$.
  I称为可逆的，是指$II^{-1} = R$.
- 强Prüfer环：R的每个有限生成半正则理想是可逆理想.

定理8

设R是连通的强Prüfer环，则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

强PRüfer环的小finitistic维数

- 新的逆的定义：设I是$Q_0(R)$的R-子模，定义
  $I^{-1} = \{x \in Q_0(R) \mid xI \subseteq R\}$.
  I称为可逆的，是指$II^{-1} = R$.
- 强Prüfer环：R的每个有限生成半正则理想是可逆理想.

定理8

设R是连通的强Prüfer环，则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

强PRüfer环的小finitistic维数

- 新的逆的定义：设I是$Q_0(R)$的R-子模，定义
  $I^{-1} = \{x \in Q_0(R) \mid xI \subseteq R\}$.
  I称为可逆的，是指$II^{-1} = R$.
- 强Prüfer环：R的每个有限生成半正则理想是可逆理想.

定理8

设R是连通的强Prüfer环，则$\mathrm{fPD}(R) \leqslant 1$.

Adarbeh K, Kabbaj S.

Weak global dimension of Prüfer-like rings.

In Commutative Algebra, Marco Fontana, Sophie Frisch, Sarah Glaz, pp.1–23, Springer, 2104.

Adarbeh K, Kabbaj S.

Matlis semi-regular in trivial ring extensions issued from integral domains.

Colloq Math, 2017, **150**(2): 229–241.

Anderson D D, Anderson D F, Markanda R.

The rings $R(x)$ and $R\langle x\rangle$.

J Algebra, 1985, **95**: 96–115.

Bass H.

Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings.

Trans AMS, 1960, **95**: 466–488.

Bazzoni S, Glaz S.

Prüfer rings.

Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra: pp55–72. New York: Springer, 2006.

Bazzoni S, Glaz S.

Gaussian properties of total rings of quotients.

J Algebra, 2007, **310**: 180–193.

Cahen P J, Fontana M, Frisch S, and Glaz S.

Open problems in commutative ring theory.

In Commutative Algebra, Marco Fontana, Sophie Frisch, Sarah Glaz, pp.353–375, Springer, 2104.

Donadze G, Thomas V Z.

On a conjecture on the weak global dimension of Gaussian rings.

arXiv:1107.0440v1, 2011.

Glaz S.

Commutative Coherent Rings.

LNM 1371. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

Glaz S, Schwarz R.
Prüfer conditions in commutative rings.
Arabian J Sci Eng. 2011, **36**: 967–983.

Göbel R, Trlifaj J.
Approximations and Endomorphism Algebras of modules. de Gruyter Exp Math, **41** I, II.
New York: Walter de Gruyter, 2012.

Griffin, M.
Prüfer rings with zero divisors.
J Reine Angew Math, 1970, **240**: 55–67.

Gruson L, Raynaud M.
Critéres de plattitude et de projectivité.
Invent Math, 1971, **13**: 1–89.

Huckaba J.
Commutative Rings with Zero Divisors.
New York: Marcel Dekker Inc, 1988.

Kaplansky I.
The homological dimension of a quotient field.
Nagoya Math J, 1966, **27**(1): 139–142.

Kang B G.
Prüfer v-multiplication domains and the ring $R[X]_{N_v}$.
J Algebra, 1989, **123**: 151–170.

Klingler L, Lucas T G, Sharma M.
Local types of Prüfer rings.
J Algebra Appl, 2019, **18**: 1950042(1–23).

Krull W.
Beiträge zur Arithmetik Kommutativer Integritätsbereiche.
Math Z, 1936, **41**: 545–577.

Li W X, Chen J L, Kourki F.
On strongly C2 modules and D2 modules.
J Algebra Appl, 2013, **12**: 1350029(1–14).

Lucas T.
Some results on Prüfer rings.
Rocky Mountain J Math, 1986, **124**(2): 333–343.

Lucas T.
Strong Prüfer rings and the ring of finite fractions.
J Pure Appl Algebra, 1993, **84**: 59–71.

Lucas T.

Krull rings, Prüfer v-multiplication rings and the ring of finite fractions.

Rocky Mountain J Math, 2005, **35**: 1251–1326.

Noether, E.

Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörpern.

Math Ann, 1927, **96**(1): 26–61.

Prüfer H.

Untersuchungen Über Teibarketiseigenschaften in Körpern.

J Reine Angew Math, 1932, **168**: 1–36.

Wang F G, Kim H K.
Foundations of Commutative Rings and Their Modules.
New York: Springer, 2016.

Wang F G, Zhou D C.
A Homological characterization of Krull domains.
Bull Korean Math Soc, 2018, **55**(2): 649–657.

Wang F G, Zhou D C, Kim H K, Chen D.
Module-theoretic characterizations of the ring of finite fraction and their applications.
JCA, 2020, 待发表.

谢谢您的关注!