1.1 线性方程组

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足．问雉兔各几何？

——《孙子算经》

通常我们会列个方程组来解决这个问题．

设有鸡和兔子分别为 x 和 y 只，那么

$$\begin{cases} x + y = 35, \\ 2x + 4y = 94, \end{cases}$$

今有五雀六燕，集称之衡，雀俱重，燕俱轻．一雀一燕交而处，衡适平．并雀、燕重一斤．问雀、燕一枚各重几何？

——《九章算术》

问题是说，有 5 雀 6 燕共重 1 斤 (16 两)，雀重而燕轻，如果交换 1 雀 1 燕，则两边一样重．问燕和雀每只各重多少？设一只雀、燕各重 x 和 y 两，用方程表达为

$$\begin{cases} 5x+6y=16, \\ 4x+y=5y+x. \end{cases}$$

假设在三维空间中有 m 个平面, 每个平面的方程可以表示为如下形式.

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

如果我们想知道这些平面在空间中是否有公共点 (即这个点在给定的所有平面上), 有多少个公共点, 可以通过解方程组

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m x + B_m y + C_m z + D_m = 0 \end{cases}$$

解决这个问题.

经济平衡问题. 假设有 n 种产品 $P_1, P_2, \cdots, P_n$, 生产一个单位 P_j 需要 a_{ij} 个单位的 P_i. 如果各种产品的数量是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 那么 P_i 的总消耗是

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n,$$

可供给市场的数量是

$$x_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n).$$

如果我们知道市场对各种产品的需求是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 为使得供需平衡，可通过解下面的方程组得出各类产品需要生产的量。

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) = b_1, \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) = b_n. \end{cases}$$

定义

假设 F 为复数集 $\mathbb{C}$ 的含有至少一个非零元的子集. 若对于 F 中任意元素 a, b 且 $b \neq 0$, $a+b, a-b, ab, a/b$ 都属于 F, 则称 F 为一个**数域**(number field).

例如: $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$. 在本课程中, 可按 $F=\mathbb{R}$ 来理解.

这些方程组都由若干个方程组成, 而每个方程都是关于未知数的一次整式的形式. 假设 F 为数域, 那么这类方程的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

其中

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为变元(variable);

$a_{ij} \in F, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$ 为方程组的系数(coefficient);

b_i 为第 i 个方程的常数(constant).

这样的方程组叫作线性方程组(system of linear equations).

如果用 F 中的有序组 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 替换方程组 (1) 中的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，所有等式都成立，那么称这个有序组为方程组 (1) 的解(solution)。

如果这样的有序组存在，那么称方程组 (1)有解(consistent)，
如果这样的有序组不存在，那么称方程组 (1)无解(inconsistent)。

消元法

解线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 9. \end{cases} \tag{2}$$

解： 第 1 个方程减去第 2 个方程的 4 倍，第 3 个方程加上第 2 个方程的 2 倍，即消去第 1 个和第 3 个方程中的 x_1 得

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$$

交换前两个方程的位置得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ \quad\quad 2x_2 + x_3 = 4, \\ \quad\quad x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$$

第 2 个方程减去第 3 个方程的 2 倍，即消去 x_2 得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ \quad\quad -9x_3 = -18, \\ \quad\quad x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$$

第 2 个方程两边同时除以 -9，并与第 3 个方程交换顺序得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + 5x_3 = 11, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

第 2 个方程减去第 3 个方程的 5 倍，第 1 个方程加上第 3 个方程得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

最后，第 1 个方程减去第 2 个方程的 2 倍得

$$\begin{cases} x_1 & & & = 1, \\ & x_2 & & = 1, \\ & & x_3 & = 2. \end{cases}$$

我们对方程组进行了下面几种基本的操作.

Ⅰ 交换两个方程的位置;

Ⅱ 将某个方程乘一个非零的数;

Ⅲ 将一个方程乘一个数加到另一个方程.

我们把这三种操作称为线性方程组的初等变换(elementary operation).

命题

一个线性方程组经过初等变换后得到的线性方程组与原方程组同解。

矩阵

我们可以很容易地发现，线性方程组有没有解以及有什么样的解只取决于其系数和常数项。像智慧的中国先贤一样，我们可以将方程组 (1) 的系数和常数项排成一个表。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

它包含了方程组 (1) 全部的信息。

定义

数域 F 中，$s \times t$ 个数 c_{ij} 排成一个 s 行 t 列的表

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{st} \end{pmatrix},$$

称为一个 s 行 t 列 (或者 $s \times t$)矩阵(matrix), c_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 (i,j) 元。元素在 F 中 s 行 t 列的矩阵的全体记为 $M_{s,t}(F)$.

在方程组 (1) 中,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组的系数矩阵(coefficient matrix).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

称为方程组的增广矩阵 (augmented matrix)。这里为了能区分常数项，我们在常数项对应列的左侧用竖线区分。

对比线性方程组的初等变换，我们可以定义矩阵的初等变换，有行和列两种初等变换，又称为初等行（列）变换。

定义

矩阵的初等行 (列) 变换是指对一个矩阵施行下列变换.

Ⅰ 交换矩阵的两行 (列);

Ⅱ 矩阵的某一行 (列) 乘一个非零常数;

Ⅲ 矩阵的某一行 (列) 乘一个数加到矩阵的另一行 (列)。

交换 i, j 行的初等变换记为 $\boldsymbol{P}_{ij}$

第 i 行乘一个非零数 λ 的初等变换记为 $\boldsymbol{D}_i(\lambda)$

把第 j 行乘数 c 加到第 i 行的初等变换记为 $\boldsymbol{T}_{ij}(c)$

解方程组2的过程可表达为

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 10 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{T}_{12}(-4)} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{32}(2)} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{P}_{12}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{T_{23}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{D_2(-\frac{1}{9})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{P_{23}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{23}(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{T_{13}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{12}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

以此矩阵为增广矩阵的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 & & & = 1, \\ & x_2 & & = 1, \\ & & x_3 & = 2. \end{cases}$$

由上面的命题可知，该方程组与原方程组同解。

对于任意 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可通过初等行变换化为如下形式.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & l_1 & & & & l_2 & & & & l_r & & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & &
\end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array},
$$

(1) 前 $r \leqslant m$ 行有非零元;

(2) 对 $i = 1, 2, \cdots, r$, 第 i 行第一个非零元为 1，在第 l_i 列;

(3) $l_1 < l_2 < \cdots < l_r$;

(4) 对于 $i = 1, 2, \cdots, r$, 第 l_i 列只有第 i 行非零。

称为 $\boldsymbol{A}$ 的最简行阶梯型(reduced row echelon form), 记 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$.

考虑线性方程组 (1)，利用初等行变换将增广矩阵化为如下形式.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & l_1 & & & & l_2 & & \cdots & & l_r & & & &
\end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\
 & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & b'_2 \\
 & & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & b'_r \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & b'_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right)
\end{array},
$$

记这个矩阵为 $\boldsymbol{C}$. 这里第 $r+1$ 行在 $r<m$ 时出现，且 $b'_{r+1}=0$ 或者 1.

当 $r<m$ 且 $b'_{r+1}=1$ 时，第 $r+1$ 行对应的方程是

$$0=1,$$

此时方程组无解。以 $\boldsymbol{C}$ 作为增广矩阵的线性方程组与原方程组同解，因此，此时原方程组无解。

现假设 $r=m$ 或者 $r<m$，但 $b'_{r+1}=0$。此时以 $\boldsymbol{C}$ 为增广矩阵的线性方程组为

$$\begin{cases} x_{l_1} \quad + c_{1,l_1+1}x_{l_1+1} + \cdots + c_{1,n}x_n = b'_1, \\ \quad x_{l_2} \quad + c_{2,l_2+1}x_{l_2+1} + \cdots + c_{2,n}x_n = b'_2, \\ \qquad \ddots \\ \qquad\quad x_{l_r} + c_{r,l_r+1}x_{l_r+1} + \cdots + c_{r,n}x_n = b'_r. \end{cases} \tag{3}$$

它与原方程组 (1) 同解, 分为两种情形:

情形 1: $r = n$. 此时必然有 $l_i = i, i = 1, 2, \cdots, n$, 从而方程组 (3) 实为 $x_i = b'_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 此时方程组有唯一解。

情形 2: $r < n$. 此时方程组 (3) 可转化为

$$\begin{cases} x_{l_1} = b'_1 - c_{1,l_1+1}x_{l_1+1} - \cdots - c_{1,n}x_n, \\ x_{l_2} = b'_2 - c_{2,l_2+1}x_{l_2+1} - \cdots - c_{2,n}x_n, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{l_r} = b'_r - c_{r,l_r+1}x_{l_r+1} - \cdots - c_{r,n}x_n. \end{cases} \tag{4}$$

需要注意的是因为对所有 $k \neq i$ 有 $c_{k,l_i} = 0$，所以 x_{l_i} 并不出现在方程组 (4) 右边的表达式中。此时我们可以任意给定 $x_k, k \notin \{l_1, l_2, \cdots, l_r\}$ 的值，然后由方程组 (4) 算出 $x_{l_1}, x_{l_2}, \cdots, x_{l_r}$ 的值，从而给出方程组 (4) 的一组解。显然方程组 (4) 的解都是这种形式。需要注意的是方程组 (4) 与原方程组 (1) 同解。此时方程组 (1) 有无穷多组解。这里 $x_{l_1}, x_{l_2}, \cdots, x_{l_r}$ 称为方程的主变元(principal variable)，而其他 $x_k, k \notin \{l_1, l_2, \cdots, l_r\}$ 称为自由变元(free variable)。

例 1： 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -19. \end{cases}$$

解：　方程组的增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -9 & -5 & -19 \end{array}\right).$$

第 1 行加到第 2 行，第 1 行乘 -1 加到第 3 行得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & -24 \end{array}\right),$$

第 2 行乘 -2 加到第 3 行得

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

其中第 3 行对应的方程为 $0 = 5$, 由此可判断方程组无解。

例 2： 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -19. \end{cases}$$

解：　方程组的增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -9 & -5 & -19 \end{array}\right).$$

第 1 行加到第 2 行，第 1 行乘 -1 加到第 3 行得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & -24 \end{array}\right),$$

第 2 行乘 2 加到第 3 行得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

第 2 行乘 $-\dfrac{1}{2}$ 加到第 1 行得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -\dfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

第 2 行乘 $\frac{1}{6}$ 得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

这是最简行阶梯型。由此主变元为 x_1, x_3, 自由变元为 x_2, x_4, 原方程组的解为

$$\begin{cases} x_2 = k_2, \\ x_4 = k_4, \\ x_1 = -1 - 2k_2 + \frac{1}{2}k_4, \\ x_3 = 2 - \frac{1}{2}k_4. \end{cases}$$