1.2 矩阵的运算

矩阵的乘法. 解线性方程组时，矩阵在其中起到了简化记号的作用。在实际中，我们可能会面临这样一种情况: 有两组变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_m$，它们之间满足

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m. \end{array}\right. \tag{1}$$

$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 则满足线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1m}y_m = c_1, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2m}y_m = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{r1}y_1 + b_{r2}y_2 + \cdots + b_{rm}y_m = c_r. \end{cases} \tag{2}$$

将 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的值代入，会得到关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组。可以想象这个方程组的系数将非常复杂。

问题：它的系数矩阵能否由上面两个方程的系数矩阵来表达呢?

答案：矩阵乘法!

空间向量 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $\boldsymbol{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$,

我们中学学过它们的数量积

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

线性方程组中的

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

可以看作两个有 n 个坐标的向量的数量积.

定义

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in M_{m,n}(F), \boldsymbol{B} \in M_{n,r}(F)$, 我们定义它们的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 为 m 行 r 列的矩阵 $\boldsymbol{C}$, 其 (i,j) 元为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的数量积，即

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 5 & 6 & 7 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & 3 \\ \mathbf{1} & 6 & 7 \\ \mathbf{3} & 5 & 8 \\ \mathbf{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{21} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 5 & 6 & 7 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & 3 \\ 1 & \mathbf{6} & 7 \\ 3 & \mathbf{5} & 8 \\ 2 & \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & \mathbf{41} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 5 & 6 & 7 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & 2 & \mathbf{3} \\ 1 & 6 & \mathbf{7} \\ 3 & 5 & \mathbf{8} \\ 2 & 3 & \mathbf{1} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 21 & 41 & \mathbf{45} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}
$$

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{11} \\ 2 & 5 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & 3 \\ \mathbf{1} & 6 & 7 \\ \mathbf{3} & 5 & 8 \\ \mathbf{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 41 & 45 \\ \mathbf{59} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{11} \\ 2 & 5 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & 3 \\ 1 & \mathbf{6} & 7 \\ 3 & \mathbf{5} & 8 \\ 2 & \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 41 & 45 \\ 59 & \mathbf{114} & \\ & & \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 \\
\mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{11} \\
2 & 5 & 8 & 13
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2 & 2 & \mathbf{3} \\
1 & 6 & \mathbf{7} \\
3 & 5 & \mathbf{8} \\
2 & 3 & \mathbf{1}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
21 & 41 & 45 \\
59 & 114 & \mathbf{124} \\
 & &
\end{pmatrix}
$$

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 11 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & 3 \\ \mathbf{1} & 6 & 7 \\ \mathbf{3} & 5 & 8 \\ \mathbf{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 41 & 45 \\ 59 & 114 & 124 \\ \mathbf{59} & & \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 11 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & 3 \\ 1 & \mathbf{6} & 7 \\ 3 & \mathbf{5} & 8 \\ 2 & \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 41 & 45 \\ 59 & 114 & 124 \\ 59 & \mathbf{113} & \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 11 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \mathbf{3} \\ 1 & 6 & \mathbf{7} \\ 3 & 5 & \mathbf{8} \\ 2 & 3 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 41 & 45 \\ 59 & 114 & 124 \\ 59 & 113 & \mathbf{118} \end{pmatrix}$$

线性方程组可以用矩阵的乘法来表达，如线性方程组 (1) 可以很简洁地写成 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 的形式, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

线性方程组 (2) 可以写成 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$, 其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 代入 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$，得到

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$$

这是关于 $\boldsymbol{x}$ 的线性方程组，但其系数矩阵是不是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$？也就是说，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ 是否等于 $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$？ 这本质就是在问矩阵乘法是否满足结合律，答案是肯定的。

定理

矩阵的乘法满足结合律。

矩阵乘法不满足交换律.

- 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times r$ 矩阵，那么 $\boldsymbol{AB}$ 有定义;
- 如果 $m=r$ 但 $m\neq n$，此时虽然 $\boldsymbol{BA}$ 和 $\boldsymbol{AB}$ 有定义，但 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 是不同形状的矩阵，不可能相等;
- 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 同为 n 阶方阵，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 也未必相等，比如

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

所有元素都为 0 的矩阵称为零矩阵(null matrix)，记为 $\boldsymbol{O}$. 上面的例子表明，两个非零的矩阵的乘积可能为零矩阵.

在 $M_{m,n}(F)$ 中用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示 (i,j) 元为 1, 其他元素为 0 的矩阵。

在 $M_n(F)$ 中有

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl} = \begin{cases} \boldsymbol{E}_{il}, & j = k; \\ \boldsymbol{O}, & j \neq k. \end{cases}$$

方阵 $\boldsymbol{A}$ 从左上到右下的对角线称为主对角线(leading diagonal).

对角矩阵(diagonal matrix):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

纯量矩阵 (scalar matrix):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix},$$

单位矩阵 (identity matrix):

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

对角矩阵 $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}[d_1, d_2, \cdots, d_m]$ 和 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 乘积 $\boldsymbol{DA}$ 为将 $\boldsymbol{A}$ 的 m 行分别乘 $d_1, d_2, \cdots, d_m$ 所得的矩阵特别地,

$$\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

类似的，如果 $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}[d_1, d_2, \cdots, d_n]$, 那么 $\boldsymbol{AD}$ 为将 $\boldsymbol{A}$ 的 n 列分别乘 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 所得的矩阵，特别地,

$$\boldsymbol{A} \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}$$

初等变换与矩阵乘法

单位矩阵交换两行得到的矩阵记为 $\boldsymbol{P}_{ij}$:

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} \; & \; & \; & i & \; & \; & \; & j & \; & \; & \; \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array},$$

单位矩阵第 i 行乘非零数 k 得到的矩阵记为 $\boldsymbol{D}_i(\lambda)$:

$$
\boldsymbol{D}_i(\lambda) = \begin{array}{c c}
 & \\
 & \\
 & \\
i & \\
 & \\
 & \\
 &
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \lambda & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix},
$$

将单位矩阵的第 j 行乘 c 加到第 i 行所得的矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(c)$:

$$\boldsymbol{T}_{ij}(c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & c & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

我们称这些矩阵为初等矩阵(elementary matrix)。直接验证:

- $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{A}$ 为交换 $\boldsymbol{A}$ 的 i, j 行所得的矩阵;
- $\boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{A}$ 为将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘 λ 后所得的矩阵;
- $\boldsymbol{T}_{ij}(c)\boldsymbol{A}$ 为将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘 c 加到第 i 行所得的矩阵。

矩阵加法

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘

$\lambda \in F$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_{m,n}(F)$, 定义数乘为

$$\lambda \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的负矩阵(negative matrix) 定义为 $-\boldsymbol{A} := (-1)\boldsymbol{A}$. 由此我们可以定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} := \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}).$$

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}$ 的所有元素都为零，即零矩阵 $\boldsymbol{O}$. 直接验证可以得到矩阵的加法、乘法和数乘具有如下性质.

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$;

(2) $\boldsymbol{O} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$;

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$;

(4) $\lambda(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$, $(\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$;

(5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$, $\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

(6) $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

这里 $\lambda, \mu \in F$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是元素在 F 中的矩阵.

$\boldsymbol{A} \in M_{m,n}(F)$ 的转置矩阵(transposed matrix) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $n \times m$ 矩阵，它的 (i,j) 元为 $\boldsymbol{A}$ 的 (j,i) 元 a_{ji}, 即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

比如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置和加法、乘法以及数乘的关系如下。

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

这里除第 (3) 条外都是显然的.

对称矩阵: $\boldsymbol{A} \in M_n(F)$, 且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$