1.3. 可逆矩阵

在小学, 解方程

$$2x = 6$$

方程两边同时除以 2 得, $x = 3$.

现在我们遇到了线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

是否有类似的方法呢?

假设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 的矩阵，如果存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n,$$

那么

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{I}_n\mathbf{x} = (\boldsymbol{BA})\mathbf{x} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\mathbf{x}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{b}$$

方程组就解出来了, 起到了两边同时“除以 $\boldsymbol{A}$”的效果, 此时我们称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的左逆(left inverse)

若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{I}_m,$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的右逆(right inverse)。

如果 $\boldsymbol{A}$ 既有左逆 $\boldsymbol{B}$ 又有右逆 $\boldsymbol{C}$, 那么

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BI}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{IC}=\boldsymbol{C},$$

也就是说，左逆和右逆相等.

如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 既有左逆又有右逆，那么称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

定义

假设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵。如果存在方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{AB},$$

那么称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵(invertible matrix). 把 $\boldsymbol{B}$ 记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵(inverse matrix).

是不是所有的方阵都是可逆矩阵呢?

- 零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 显然不是可逆矩阵，因为对任意矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都有 $\boldsymbol{BO}=\boldsymbol{O}\neq\boldsymbol{I}$.
- 一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果某一行全为零，那么 $\boldsymbol{AB}$ 的那一行也全为零，不可能是 $\boldsymbol{I}$;
- 如果 $\boldsymbol{A}$ 的某一列全为零，那么 $\boldsymbol{BA}$ 的那一列也全为零，这也不是 $\boldsymbol{I}$

因此，如果 $\boldsymbol{A}$ 的某一行或者某一列全为零，那么 $\boldsymbol{A}$ 总有一边不能乘一个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 得到 $\boldsymbol{I}$，因此这样的 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆的。

可逆矩阵的例子?

- 单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 肯定是可逆的, 因为 $\boldsymbol{II}=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{II}$.
- 下一个能想到的就是初等矩阵:

$$\boldsymbol{P}_{ij}, \quad \boldsymbol{D}_i(\lambda)\ (\lambda\neq 0), \quad \boldsymbol{T}_{ij}(c), \quad 0\neq\lambda\in F, c\in F.$$

- 由于左乘初等矩阵对应初等行变换，因此

$$\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}$$

$$\boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{D}_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{D}_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)\boldsymbol{D}_i(\lambda),$$

$$\boldsymbol{T}_{ij}(c)\boldsymbol{T}_{ij}(-c)=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{T}_{ij}(-c)\boldsymbol{T}_{ij}(c).$$

所有的初等矩阵都是可逆矩阵，且其逆矩阵为同类型初等矩阵。

引理

- 两个可逆矩阵的乘积仍然是可逆矩阵。
- 初等变换不改变矩阵的可逆性。

因此，要判断一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆，我们可以先对它进行初等行变换，化成行最简形式，再进行判断。

引理

任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以通过初等变换化为对角矩阵

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{A}} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

对角线上前 r 个数为 1 $(0 \leqslant r \leqslant n)$，后 $n-r$ 个数为零。

可逆矩阵的判定

由前面的讨论，$\boldsymbol{A}$ 可逆，当且仅当上面引理中的 $\boldsymbol{D_A}$ 可逆。要判断 $\boldsymbol{D_A}$ 是否可逆就很简单了！

- 当 $r = n$ 时，$\boldsymbol{D_A} = \boldsymbol{I}_n$ 是单位矩阵，可逆，多而 A 可逆；
- 当 $r < n$ 时，$\boldsymbol{D_A}$ 至少有一行全为零，因此不可逆，从而 $\boldsymbol{A}$ 不可逆。

总结：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，当且仅当它可以通过初等变换化为 n 阶单位矩阵！

可逆矩阵的判定

定理

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，下面几条等价.

(1) $\boldsymbol{A}$ 可逆;

(2) $\boldsymbol{A}$ 可以通过初等行、列变换变成 $\boldsymbol{I}$;

(3) $\boldsymbol{A}$ 是若干个初等矩阵的乘积;

(4) $\boldsymbol{A}$ 可以通过初等行变换变成 $\boldsymbol{I}$;

(5) $\boldsymbol{A}$ 可以通过初等列变换变为 $\boldsymbol{I}$.

逆矩阵的计算

对于可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$, 由上面的定理知，存在若干个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_r$ 使得

$$\boldsymbol{P}_r \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_r \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1$$

同时对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 做相应的行初等变换

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\boldsymbol{P}_1} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{I}) \xrightarrow{\boldsymbol{P}_2} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{P}_r} (\boldsymbol{P}_r \cdots \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{P}_r \cdots \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{I}).$$

当 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{I}$ 时， $\boldsymbol{I}$ 恰好变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

逆矩阵的计算

例

假设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆，如果可逆，计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 放在一起得

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

进行初等行变换得

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{T}_{21}(-2),\boldsymbol{T}_{31}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{23}(-1)}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{13}(1)}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{12}(-2)}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\boldsymbol{D}_{3}(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

此时，左边已经化为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆，其逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ \dfrac{3}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$