1.5. 矩阵的秩

在解线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 时:

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{行}} \mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \xrightarrow{\text{行}} \mathrm{rref}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的最简行阶梯型 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的非零行数相等，则方程组有解，否则无解！

问题

给定矩阵 $\boldsymbol{A}$， $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 的非零行数是否由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定?

即: 与将 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 所采用的初等行变换的选取无关?

注：实际上，甚至 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 也是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的！

假设 $\boldsymbol{A}$ 的最简行阶梯型 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 有 r 个非零行，比如:

例

$$\text{假设}\,\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}0&1&2&0&3&0&4\\0&0&0&1&2&0&3\\0&0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可对 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 进一步用列初等变换，将其化为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

通过上面的例子可以发现，如果 $\boldsymbol{A}$ 的最简行阶梯型 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 有 r 行非零，可进一步作列初等变换，将其化为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

形式。

引理

上面矩阵中的 r 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的，叫作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩(rank)，记作 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$.

矩阵的秩有下面几条基本的性质。

命题

假设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 行 n 列矩阵，则下列结论成立.

1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 只有 l 行 (列) 非零，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \leqslant l$;
2. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{m, n\}$;
3. 初等变换不改变矩阵的秩;
4. 若 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{PAQ}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$;
5. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$

从定义还容易得到如下结论。

命题

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$.

利用矩阵秩的语言，还可以重新总结线性方程组解的条件。

定理

对于线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A} \in M_{m,n}(F)$, 下列结论成立。

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解，当且仅当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;
2. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解，当且仅当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = n$.
3. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解，当且仅当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) < n$.

一个重要但不显然的结论是

命题

两个矩阵乘积的秩不超过其中任何一个矩阵的秩，即

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\}$$

证明: 假设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = r$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PBQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AP}^{-1}\boldsymbol{PBQQ}^{-1}$. 左右两边同时乘可逆矩阵不改变矩阵的秩，因此

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AP}^{-1}(\boldsymbol{PBQ})).$$

因为 $\boldsymbol{PBQ}$ 只有前 r 列非零，所以 $\boldsymbol{AP}^{-1}(\boldsymbol{PBQ})$ 至多前 r 列非零，即

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AP}^{-1}(\boldsymbol{PBQ})) \leqslant r,$$

即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

此外，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

上述命题有个重要的推论。

推论

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n$，那么 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆且互为逆矩阵。