manuscripta math. 69, 223 - 235 (1990)

manuscripta
mathematica

DIE VEKTORRAUMKATEGORIE ZU EINEM UNZERLEGBAREN PROJEKTIVEN MODUL EINER TUBULAREN ALGEBRA

Changchang Xi

1. Einleitung

Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und A eine endlich–dimensionale zusammenhängende Basisalgebra über k. Dann kann A durch einen Köcher Δ mit Relationen beschrieben werden. Mit A-mod bezeichnen wir die Kategorie aller endlich–dimensionalen A–Linksmoduln und mit A-ind eine volle Unterkategorie von A-mod, die aus jeder Isomorphieklasse unzerlegbarer A–Moduln genau einen Repräsentanten enthält. Zu jedem Punkt x des Köchers Δ gibt es einen projektiven A–Modul $P(x) \in A$-ind. Setze $|\cdot| = Hom_A(P(x), -)$ und

$$S_x^A := \{X \in A\text{–ind} \mid X \neq P(x), |X| \neq 0 = |\tau X|\}.$$

Dann ist $\mathcal{S}_x^A := (add\ S_x^A, |\cdot|)$ eine Vektorraumkategorie. Sie wurde studiert in **[D]** und **[RV]** für darstellungsendliche Algebren und in **[X2]** für zahme verkleideten Algebren. Ziel dieser Arbeit ist, die Kategorie $\mathcal{S}_x^A$ genau zu untersuchen, wenn A eine tubulare Algebra ist. In diesem Fall interessieren wir uns insbesondere für die kritischen Vektorraumkategorien, die in $\mathcal{S}_x^A$ auftauchen.

Sei A eine tubulare Algebra, also A ist eine tubulare Koerweiterung einer zahmen verkleideten Algebra A_∞ und gleichzeitig auch eine tubulare Erweiterung einer zahmen verkleideten Algebra A_0 (siehe **[Ri1]**). Sei x ein Punkt des Köchers von A, der auch ein Punkt der Köcher von A_0 und A_∞ ist. Im zweiten Abschnitt untersuchen wir die Eigenschaften der Kategorie $\mathcal{S}_x^A$ und die kritischen Vektorraumkategorien in $\mathcal{S}_x^A$. Unser Hauptergebnis, Satz 2.10 zeigt, daß die Kategorie $\mathcal{S}_x^A$ viele ähnliche Eigenschaften wie bei zahmen verkleideten Algebren **[X2]** besitzt. Außerdem liefert der Satz 2.9 , daß es in $\mathcal{S}_x^A$ mindestens eine tubulare Vektorraumkategorie **[Ri2]** gibt. Im Abschnitt 3 studieren wir die Menge K_x^A aller Moduln in S_x^A, die zu kritischen Vektorraumkategorien gehören. Satz 3.3 besagt, daß K_x^A eine volle konvexe Unterhalbordnung von S_x^A ist, wenn man auf S_x^A eine Ordnung folgendermaßen definiert:

$$M \leq N \Leftrightarrow \text{es gibt } M_0 = N, M_1, \ldots, M_n = M \text{ in } S_x^A \text{ und } f_i : M_i \to M_{i+1}$$
$$\text{mit } Hom(P(x), f_i) \neq 0 \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Schließlich diskutieren wir im Abschnitt 4 Fasersummen (siehe **[D]**) über $P(x)$. Es wird gezeigt, daß jeder unzerlegbare Modul M mit $M_x \neq 0$, der zu $\mathcal{P}_\infty$ oder zu einer homogenen Röhre in $\mathcal{T}_\infty$ (siehe **[Ri1]**) gehört, eine Fasersumme über $P(x)$ ist.

wir verweisen für die nicht erklärten Begriffe und Bezeichnungen auf **[Ri1]** und **[X2]**.

2. Kritische Mengen in S_x^A.

Sei A eine tubulare Algebra und x ein Punkt, der sowohl zu A_0 als auch zu A_∞ gehört. Wir studieren in diesem Abschnitt die Kategorie $\mathcal{S}_x^A := (add\ S_x^A, |\cdot|)$ mit $|\cdot| = Hom_A(P(x), -)$.

2.1 Lemma.
Sei $M \in S_x^A$. Dann gilt folgendes:
(1) $End_A(M) \cong k$.
(2) $Ext_A^i(M, M) = 0$ für $i \geq 1$.
(3) $dim\ Hom_A(P(x), M) \leq 2$.

Beweis: Falls $M \in \mathcal{P}_0 \vee \mathcal{Q}_\infty$, dann sind (1) und (2) klar. Nun sei $M \in \mathcal{T}_\gamma$ für $\gamma \in \mathbf{Q}^+$. Dann ist $\mathcal{T}_\gamma$ eine standard stabile aufrichtige Röhrenfamilie, und die Summe der Dimensionsvektoren der am Mund einer Röhre liegenden Moduln ist ein aufrichtiger Radikalvektor von χ_A. In diesem Fall gelten (1) und (2). Nun sei M in einer der Ausnahmeröhren $\mathcal{T}_0(\rho)$.Dann gilt $proj.dim M \leq 1$. Wir können $\mathcal{T}_0(\rho)$ als eine Modulklasse in einer großen stabilen Röhre $\mathcal{T}_0'(\rho)$ betrachten. Also gelten (1) und (2), wenn wir $End(M)$ bzw. $Ext^i(M, M)$ in $\mathcal{T}_0'(\rho)$ berechnen. Im Fall $M \in \mathcal{T}_\infty$ ist der Beweis analog.

(3) folgt aus **[X1**, Lemma 2.1].

□

2.2 Lemma.
S_x^A ist eine endliche Menge.

Beweis: Angenommen S_x^A ist unendlich. Setze $\overline{A} = A/Ae_xA$. Dann ist $\chi_{\overline{A}}$ nicht schwach positiv. Nach der Proposition 2.7 in **[Hö]** existiert ein voller Unterköcher Q' mit $Q_0' \subseteq \Delta_0 \setminus \{x\}$, so daß $\chi_{kQ'} = \chi_A|_{Q'}$ kritisch ist. Folglich gibt es einen positiven aufrichtigen Radikalvektor y von $\chi_{Q'}$. Dies ist auch ein Radikalvektor von χ_A, also ist nach **[Ri1**, 5.1(1)] $y = \alpha h_0$ oder $y = \beta h_\infty$ mit $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}^+$. Dies impliziert $y_x \neq 0$, einen Widerspruch.

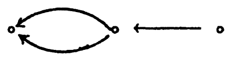
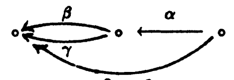
□

2.3 Lemma.
Sei B eine endlich-dimensionale k-Algebra. Seien $N_1, \ldots, N_\gamma$ paarweise nicht isomorphe B-Moduln. Sei J eine Teilmenge von $\{1, \ldots, \gamma\}$. Ist $End_B(N_1 \oplus \ldots \oplus N_\gamma)$ nicht vom wilden Typ (siehe **[Ri2]**), *so auch $End_B(\bigoplus_{j \in J} N_j)$.*

2.4 Lemma.
Seien $M, N \in \mathcal{P}_\infty \cap S_x^A$ mit $M \not\cong N$ und $|M| = |N| \cong k^2$. Dann gilt entweder $Ext^1(M,N) \neq 0$ oder $Ext^1(N,M) \neq 0$.

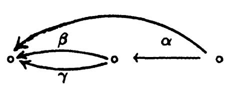
Beweis: Gemäß 2.3 und [**Ri1**, 5.1(5)] ist $B := End(P(x) \oplus M \oplus N)$ nicht vom wilden Typ. O.B.d.A. sei $Hom(M,N) \neq 0$, dann ist $Hom(N,M) = 0$. Angenommen $Ext^1(N \oplus M, M \oplus N) = 0$ gilt.

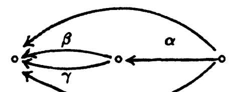
(1) $dim\ Hom_A(M,N) = 1$. Dann ist B zu einer der folgenden Algebren isomorph:


,


,

$\alpha\beta = 0$



,


.

$\alpha\beta = \alpha\gamma$ $\qquad$ $\alpha\beta = \alpha\gamma = 0$

Aber die vier Algebren sind vom wilden Typ. Ein Widerspruch.

(2) $dim\ Hom(M,N) = 2$. In diesem Fall haben wir

$$B = End(P(x) \oplus M \oplus N) = \begin{bmatrix} k & S \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix},$$

wobei $\Gamma \cong \begin{bmatrix} k & k^2 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ und ${}_kS_\Gamma$ ein Bimodule mit $\underline{\dim} S_\Gamma = (2,2)$ ist. Nun betrachten wir die Vektorraumkategorie $Hom_\Gamma({}_kS_\Gamma, mod\,\Gamma)$ (siehe [**Ri2**]). Mit B ist auch $Hom_\Gamma({}_kS_\Gamma, mod\,\Gamma)$ nicht vom wilden Typ. Angenommen S_Γ ist regulär. Aus [**Ri2**, Th. 3.3] folgt: $Hom_\Gamma(S_\Gamma, mod\,\Gamma)$ ist vom Typ $(\tilde{A}_{11}, 1)$. Dies impliziert $\underline{\dim}\ S_\Gamma = (1,1)$. Ein Widerspruch. Also ist S_Γ kein regulärer Γ–Rechtsmodul. Ferner kann S_Γ nicht direkte Summe von einem präprojektiven (präinjektiven) und einem regulären Modul sein. Es ist nur möglich, daß S_Γ eine direkte Summe von einem einfachen projektiven, einem einfachen injektiven und einem einfachen regulären Γ–Rechtsmodul ist. Aber in diesem Fall ist $Hom_\Gamma(S_\Gamma, mod\,\Gamma)$ vom wilden Typ. Das ist jedoch ein Widerspruch.

Da A nicht vom wilden Typ ist, gilt nach [**Ri1**, 5.1 (5)] und 2.3 $dim\ Hom(M,N) \leq 2$.

□

2.5 Eine Teilmenge K in S_x^A heißt kritische Menge vom Typ $\mathcal{C}(i)$ mit $1 \leq i \leq 6$, falls die Vektorraumkategorie $\mathcal{K} := (add\ K, |\cdot|)$ vom Typ $\mathcal{C}(i)$ ist.

Lemma.
Sei $K = \{M_1, \ldots, M_n\} \subseteq S_x^A$ eine kritische Menge vom Typ $\mathcal{C}(i)$. Dann gilt
(a) $M_i \in \mathcal{P}_\infty$. Insbesondere gilt $proj.dim\ M_i \leq 1$.
(b) Es gibt eine exakte Sequenz.

$$0 \longrightarrow P(x)^i \longrightarrow \oplus_{j=1}^n M_j^{t_j} \longrightarrow H \longrightarrow 0,$$

hierbei ist $\underline{\dim}\ H \in rad\ \chi_A$ *und* H *ein unzerlegbarer homogener Modul. Ferner ist* $(\iota_1,\ldots,\iota_n)$ *wie in [X1, 3.1]. Wir nennen* $\gamma := Index(H)$ *den Index der kritischen Menge* $\mathcal{K}$.

Beweis: Es gibt nur endlich viele Moduln M in $\mathcal{T}_\infty\setminus$\{homogene Moduln\} mit $End_A(M)\cong k$. Aus den unendlich vielen homogenen Objekten in $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{K})$ können wir unendlich viele Objekte $H_i = (H_0^{(j)}, H_\omega^{(i)}, \gamma_{H_i})$ $(i = 1,2,\ldots)$ so auswählen, daß ΣH_i nicht in $\mathcal{T}_\infty\setminus$ \{homogene Moduln\} liegen. Demnach gilt $proj.dim\Sigma H_i \leq 1$ und γ_{H_i} injektiv (siehe **[X1]**). Folglich gilt Index(ΣH_i) =Index(ΣH_j) für $i,j\in\mathbb{N}$. Setze γ =Index(ΣH_i). Da es nur endlich viele Moduln $M\in\mathcal{T}_\gamma$ mit $End(M)\cong k$ gibt, die nicht homogen sind, können wir einen Modul $H := \Sigma H_j$ wählen, so daß er homogen ist. Somit ist (b) klar, folglich auch (a).

□

2.6 Folgerung.
$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ *ist ein partieller Kippmodul.*

2.7 Lemma.
Ist $K = \{M_1,\ldots,M_n\}$ *eine kritische Menge vom Typ* $C(i)$ *mit Index* γ, *so ist sie die einzige kritische Menge mit Index* γ.

Beweis: Sei $\{N_1,\ldots,N_m\}$ eine weitere kritische Menge vom Typ $C(j)$ mit Index γ. Nach 2.5 haben wir zwei exakte Sequenzen:

$$0\longrightarrow P(x)^i\longrightarrow \oplus_{j=1}^{n} M_j^{\iota_j}\longrightarrow H\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow P(x)^j\longrightarrow \oplus_{\ell=1}^{m} N_\ell^{\iota'_\ell}\longrightarrow H'\longrightarrow 0$$

mit Index$(H) = \gamma$ =Index(H'). Nach [**X1**, 3.3] gilt $i=j$, denn wir haben $\underline{\dim}\ H = \underline{\dim}\ H'$. Nach 2.6 und einer einfachen Überlegung wissen wir, daß $\bigoplus_{k=1}^{n}(M_k\oplus N_k)$ ein partieller Kippmodul ist. Wegen $\underline{\dim}\bigoplus_{\ell=1}^{n} M_\ell^{\iota_\ell} = \underline{\dim}\bigoplus_{\ell=1}^{n} N_\ell^{\iota'_{\ell'}}$ gilt $\underline{\dim}M_\ell = \underline{\dim}N_\ell$, denn die Dimensionsvektoren eines partiellen Kippmoduls sind $\mathbb{Q}$–linear unabhängig. Nun sagt der Satz [**Ri1**, 5.2(6)], daß $M_\ell\cong N_\ell$ ist.

□

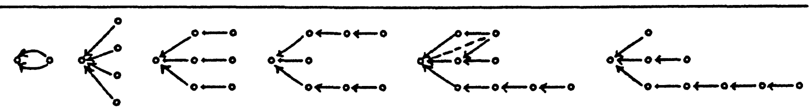
2.8 Satz.
Ist $K = \{M_1,\ldots,M_n\}$ *eine kritische Menge in* S_x^A *mit Index* $\gamma\neq\infty$, *so gibt es genau einen Modul* N *in* $\mathcal{T}_\gamma\cap add\ S_x^A$, *so daß* $P(x)\oplus N\oplus\bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ *ein A-Kippmodul ist. Ferner ist* N *eine direkte Summe aller in* $\mathcal{T}_\gamma\cap S_x^A$ *liegenden Moduln.*

Beweis: Sei γ :=Index$(H) = 0$. Dann gilt $K\subseteq\mathcal{P}_0\cap S_x^A$. Wir erhalten $\mathcal{T}_0$ aus den A_0-Röhren durch Einfügungen von Stahlen. Sei $\mathcal{T}_0(\rho)$ eine Röhre in $\mathcal{T}_0$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß sie von der Gestalt $\Omega(m)[e_x, B_x^S]$ ist (siehe [**Ri1**, 4.6]), denn es gilt $\dim Hom(P(x), X) = 0$ für jeden Modul X in $\mathcal{T}_0(\rho)$, dessen Träger leeren Schnitt mit dem Köcher von A_0 hat.Nun brauchen wir nur wie in **[X2]** die Röhre $\mathcal{T}_0(\rho)$ zu überprüfen, ob sie uns geeignete Moduln in $S_x^A \cap \mathcal{T}_0(\rho)$ liefert. Dies ist einfach, aber mühsam. Z.B. A_0 sei vom Typ $(2,3,5)$ und A vom Erweiterungstyp $(2,3,6)$ sowie $h_x := (\underline{\dim} H)_x = 2$. In diesem Fall können wir fünf Moduln in $\mathcal{T}_0$ erhalten, die alle Moduln in S_x^A liegen, einer davon liegt in einer Röhre vom Rang 3 und die anderen vier Moduln sind in einer Röhre vom Rang 6. Wenn $\gamma \in \mathbb{Q}^+$, sind alle Röhren in $\mathcal{T}_\gamma$ stabil und vom Typ (n_1, n_2, n_3) oder $(2,2,2,2)$. Mit Hilfe des Satzes **[Ril**, 5.1(5)] und Lemma 2.4 können wir analog wie in **[X2]** zeigen, daß es genau einen Modul N in $\mathcal{T}_\gamma \cap S_x^A$ gibt, so daß $N \oplus P(x) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ein Kippmodul ist.

□

2.9 Satz.
Sei $K = \{M_1, \ldots, M_n\}$ eine kritische Menge mit Index $\gamma \neq \infty$ und $M := \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \oplus P(x)$. Falls N das Komplement in $\mathcal{T}_\gamma \cap add\, S_x^A$ zu M zum Kippmodul ist, ist $(add\,(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \oplus N), |\cdot|)$ eine tubulare Vektorraumkategorie.

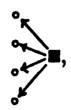
Beweis: Sei K vom Typ $\mathcal{C}(i)$. Dann ist $B_0 := End(P(x) \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} M_j)$ eine zahme verkleidete Algebra der folgenden Form (dabei ist B_0 durch seinen Köcher $\Delta(B_0)$ dargestellt):

i	1	2	3	4	5	6
$\Delta(B_0)$						

Setze $T := \bigoplus_i M_i \oplus P(x) \oplus N$. Aus **[Ril**, 5.5(1)] folgt, daß $B := End_A(T)$ eine tubulare Erweiterung von B_0 ist und den gleichen Erweiterungstyp wie A hat. Sei $P_B(x) = Hom_A(T, P(x))$, dann gilt $Hom(P_B(x), P_B(y)) \neq 0$ für jeden projektiven unzerlegbaren B-Modul. Deswegen läßt B sich aus B_0 durch Hinzufügung von Zweigen mit Unterraumorientierungen erhalten. Um den Satz zu zeigen, genügt es die Kategorie $\mathcal{P}$ aller projektiven B-Moduln zu betrachten, denn $\mathcal{P}$ ist zu *add* T äquivalent und alle einfach regulären B_0-Moduln sind bekannt.

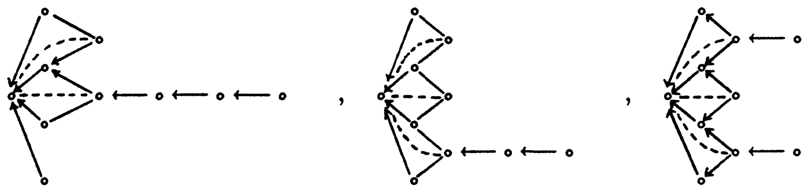
Wir betrachten den Fall $i = 2$. Die anderen Fälle sind analog. Sei $(n_1, \ldots, n_t)$ der Erweiterungstyp von A.

(1) $(n_1, \ldots, n_t) = (2,2,2,2)$. Dann ist B/Be_xB gegeben durch

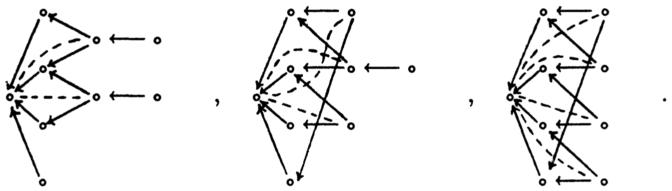


wobei wir mit ■ den unzerlegbaren B–Modul P mit $\dim Hom(P_B(x), P) = 2$ bezeichnen.

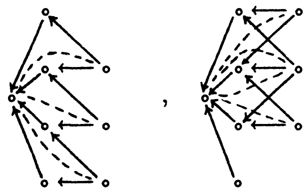
(2) $(n_1, \ldots, n_t) = (2, 3, 6)$. Dann hat der Köcher von B eine der folgenden Gestalten:



(3) $(n_1, \ldots, n_t) = (2, 4, 4)$. Dann hat B eine der folgenden Formen:



(4) $(n_1, \ldots, n_t) = (3, 3, 3)$. Dann hat B eine der folgenden Gestalten:



Nun folgt leicht mit Hilfe des Satzes [**Ri1**, 5.8(1)] und den obigen Überlegungen unsere Behauptung im Fall $i = 2$.

2.10 Sei $K = \{M_1, \ldots, M_n\}$ eine kritische Menge vom Typ $\mathcal{C}(i)$ mit Index $\gamma \in \mathbb{Q}^+$. Dann haben wir eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow P(x)^i \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n} M_j^{t_j} \longrightarrow H \longrightarrow 0$ mit $i = (\underline{\dim} H)_x$. Ferner ist H ein homogener Modul mit Index γ. Setze $h = \underline{\dim} H$ und $\partial_\gamma(Y) = \langle h, \underline{\dim} Y\rangle / (\underline{\dim} Y)_x$ für jeden Modul Y mit $Y_x \neq 0$. Wir definieren

$$L_\gamma(x) := \{Y \in S_x^A \mid \partial_\gamma(Y) = -h_x\}, \quad T_0 = \bigoplus_{Y \in L_\gamma(x)} Y,$$

$$C_\gamma(x) := \{Y \in S_x^A \mid -h_x < \partial_\gamma(Y) < 0\}, \quad M = \bigoplus_{Y \in C_\gamma(x)} Y,$$

$$R_\gamma(x) := \{Y \in S_x^A \mid \partial_\gamma(Y) = 0\}, \quad T_1 = \bigoplus_{Y \in R_\gamma(x)} Y.$$

Satz.

(1) $P(x) \oplus T_0 \oplus M$ *ist ein Kippmodul.*
(2) T_0 *ist das einzige Komplement in* $\mathcal{P}_\gamma$ *zu* $M \oplus P(x)$ *zum Kippmodul.*
(3) $P(x) \oplus T_1 \oplus M$ *ist ein Kippmodul.*
(4) $C_\gamma(x) = K$.

Der Beweis ist analog wie in **[X2]**,deshalb geben wir hier nur eine Skizze des Beweises. Wir fangen mit folgendem Lemma an:

2.11 Lemma.
Sei $Y \in L_\gamma(x)$. *Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow P(x)^m \longrightarrow Y \longrightarrow \tau^{-1}E \longrightarrow 0.$$

Dabei ist E *unzerlegbar mit* $E \in \mathcal{T}_\gamma$ *und* $E_x \neq 0 = (\tau^{-1}E)_x$ *sowie* $m = \dim Y_x$.

Beweis: Sei $f_1, \dots, f_m$ eine Basis von $Hom(P(x), Y)$ und setze $f = (f_1, \dots, f_m)^t$. Dann ist $f \neq 0$ und $C := Koker(f) \neq 0$. Setzen wir $K_1 = Ker(f)$ und $B := Bild(f)$, so folgt aus $End\ (Y) \cong k$ und $Ext^1(Y, B) = 0$ auch $Hom(Y, B) = 0$, demnach ist C unzerlegbar. Ferner gilt $\langle h, \underline{dim} C\rangle = \langle h, \underline{\dim} K_1\rangle \leq 0$. Also ist $proj.dim C \leq 0$. Wenden wir $(Y, -)$ auf $0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P(x)^m \longrightarrow B \longrightarrow 0$ bzw. $(-, K_1)$ auf $0 \longrightarrow B \longrightarrow Y \longrightarrow C \longrightarrow 0$ an, so erhalten wir $Ext^1(Y, K_1) = 0$ bzw. $Ext^1(B, K_1) = 0$. Folglich ist $K_1 = 0$ und f injektiv. Nun ist es trivial, daß $E = \tau C$ alle Bedingungen im Lemma erfüllt.

□

2.12 Aufgrund $\gamma \neq 0, \infty$ können wir wie in **[X2]** argumentieren, daß es $n(A) - (n+1)$ unzerlegbare A–Moduln E_i in $\mathcal{T}_\gamma$ mit den Eigenschaften gibt, daß $Hom(P(x), E_i) \neq 0 = Hom(P(x), \tau^{-1}E_i)$ gilt. Hierbei ist $n(A)$ die Anzahl der einfachen A–Moduln. Für jeden Modul E_i existiert eine exakte Sequenz

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow P(x)^m \longrightarrow T(E_i) \longrightarrow \tau^{-1}E_i \longrightarrow 0$$

mit $T(E_i) \in L_\gamma(x)$. Es gilt $T(E_i) \not\cong T(E_j)$, wenn $E_i \neq E_j$ ist. Also gilt $L_\gamma(x) = \{T(E_i) \mid i = 1, \dots, n(A) - (n+1)\}$. Sei $i \neq j$. Aus (*) folgt $Ext^1(T(E_i), T(E_j)) = 0$, denn $T(E_i) \in \mathcal{P}_\gamma, E_j \in \mathcal{T}_\gamma$ und $Ext^1(T(E_i), \tau^{-1}E_j) = D\ Hom(\tau^{-1}E_j, \tau T(E_i)) = 0$ gelten. Somit folgt (1) des Satzes 2.10.

2.13 Lemma.
Sei $Y \in S_x^A$. *Genau dann gilt* $Y \in K$, *wenn* $Y \in C_\gamma(x)$.

Beweis: Mit Hilfe des Lemmas 2.5 sieht man, daß Y in $C_\gamma(x)$ liegt, wenn $Y \in K$. Nun sei $Y \in C_\gamma(x)$. Wir zeigen, daß $Y \oplus M \oplus P(x) \oplus T_0$ ein Kippmodul ist. Aus (*) und der exakten Sequenz in 2.5 folgt $Ext^1(Y, M) = Ext^1(Y, T_0) = 0$. Sei $f_1, \dots, f_m$ eine Basis von $Hom(P(x), Y)$ und setze $f = (f_1, \dots, f_m)^t$. Dann können wir beweisen, daß $C := Koker(f)$ unzerlegbar und in $\mathcal{T}_\gamma \vee \mathcal{Q}_\gamma$ liegt. Demnach folgt aus der Struktur von

A–mod sofort $Ext^1(T_0, Y) = 0 = Ext^1(M, Y)$. Nach Satz 2.10(1) ist $Y \in C_\gamma(x)$.

□

2.14 Lemma.
Sei $Y \in \mathcal{P}_\gamma$ unzerlegbar mit $Ext^1(Y, M \oplus P(x)) = 0 = Ext^1(M, Y)$. Dann ist entweder $Y \cong P(x), Y \in L_\gamma(x)$ oder $Y \in C_\gamma(x)$.

Beweis: Aus Lemma 2.5 folgt sofort $Y \in S_x^A$, wenn $Y \not\cong P(x)$ ist. Nun sei $Y \notin C_\gamma(x)$. Aus 2.5 folgt die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (H, Y) \longrightarrow (\oplus_{j=1}^n M_j^{t_j}, Y) \longrightarrow (P(x)^{h_x}, Y) \longrightarrow Ext^1(H, Y) \longrightarrow 0$$

und $\langle h, \underline{\dim} Y\rangle / \dim Y_x = \dim Hom(\underset{j}{\oplus} M_j^{t_j}, Y) / \dim Y_x - h_x$. Gemäß 2.13 ist $Hom(\oplus M_j, Y) = 0$, und somit ist $Y \in L_\gamma(x)$.

□

2.15 Den Beweis des Satzes 2.10 erhält man aus 2.12, 2.14 und 2.7.

2.16 Bemerkung.
Für $\gamma = 0, \infty$ gilt auch (4) im Satz 2.10.

Beweis: Nach **[X2]** ist (4) klar für $\gamma = 0$. Im Fall $\gamma = \infty$ folgt (4) unmittelbar aus folgendem Lemma 2.17.

□

2.17 Lemma.
Sei e_∞ das Einselement von A_∞. Sei $K_x^{A_\infty} = \{N_1, \ldots, N_n\}$ die kritische Menge in $S_x^{A_\infty}$ und $R_x^{A_\infty}$ die Menge aller regulären A_∞-Moduln in $S_x^{A_\infty}$. Dann ist $K_\infty := \{Ae_\infty \otimes N_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ die kritische Menge in S_x^A mit Index ∞ und $R_\infty := \{Ae_\infty \underset{A_\infty}{\otimes} N \mid N \in R_x^{A_\infty}\}$ die Menge aller Moduln in $\mathcal{T}_\infty \cap S_x^A$.

Beweis: Setze

$$\begin{aligned} F &= Ae_\infty \otimes - : A_\infty\text{–mod} \longrightarrow A\text{–mod} \\ G &= Hom_{A_\infty}(e_\infty A, -) : A_\infty\text{–mod} \longrightarrow A\text{–mod} \\ R &= Hom_A(Ae_\infty, -) \cong e_\infty A \otimes_A - : A\text{–mod} \longrightarrow A_\infty\text{–mod}. \end{aligned}$$

Unterlemma [Sc].
Die folgenden Aussagen sind richtig für einen unzerlegbaren Modul $X \in A_\infty$-mod:
(1) $F\tau_{A_\infty}^{-1} X \cong \tau_A^{-1} GX$,
(2) $G\tau_{A_\infty} X \cong \tau_A FX$.

Beachte,daß in unserem Fall $Hom_{A_\infty}(e_\infty A, X) \cong X$ gilt.

Sei H' ein homogener A_∞–Modul, dann ist FH' nach (2) im Unterlemma auch homogen in $\mathcal{T}_\infty$. Da F ein voller Einbettungsfunktor ist, überlegt man sich nach dem Unterlemma leicht, daß K_∞ eine kritische Menge mit Index ∞ ist.

Nun sei Y ein unzerlegbarer Modul aus $S_x^A \cap \mathcal{T}_\infty$. Im Fall $Y \in A_\infty$-mod, ist auch $FRY \in A_\infty$-mod, denn es gibt einen injektiven Homomorphismus $FRY \hookrightarrow Y$. Also gilt $FRY \cong R(FRY) \cong (RF)RY \cong RY = Y$. Nun Sei $Y \notin A_\infty$-mod. Nach der Konstruktion der Kategorie A-mod ist RY ein unzerlegbarer regulärer A_∞-Modul und $RY = RFRY$. Also gibt es einen Strahl $V_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow V_i \longrightarrow \ldots \longrightarrow V_j \longrightarrow \ldots \longrightarrow V_n \longrightarrow \ldots$, so daß $V_0 \in A_\infty$-mod, $V_i = FRY$, $V_j = Y$ und $V_n = RY$ gelten. Wegen $(\tau Y)_x = 0$ gilt $i = j$. Also ist Y zu FRY isomorph und $\tau_{A_\infty} RY = \tau_A FRY \cong \tau_A Y$. Somit gilt immer $Y \cong FRY$. Dies liefert die zweite Behauptung des Lemmas.

2.18 Bemerkung.
Für eine kritische Menge K vom Typ $C(i)$ mit Index $\gamma \in \mathbf{Q}^+ \cup \{\infty\}$ gibt es keinen Modul $N \in \mathcal{Q}_\gamma$, so daß $\bigoplus_{M_i \in K} M_i \oplus P(x) \oplus N$ ein partieller Kippmodul ist. Im Fall $\gamma = 0$ existiert kein Modul $N \in \mathcal{Q}_\gamma \cap$ add S_x^A, so daß $N \oplus \bigoplus_{M_i \in K} M_i \oplus P(x)$ ein partieller Kippmodul ist.

3. Konvexität

Wir definieren in diesem Abschnitt eine Ordnung auf S_x^A, die auf folgendem Lemma beruht.

3.1 Lemma.
Es gibt keinen Kreis (siehe **[Ri1]***)*

$$(*) \qquad M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \ldots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_0$$

in S_x^A mit $Hom_A(P(x), f_i) \neq 0$ für alle i.

Beweis: Angenommen es existiert ein solcher Kreis in S_x^A. Dann gilt $n \geq 1$. Nach **[Ri1**, 5.2.7(b)] liegen alle Moduln M_i in einer Röhre $\mathcal{T}_\gamma(\rho)$. Wir wissen schon, daß kein orientierter Kreis im Köcher einer tubularen Algebra existiert, damit folgt $\gamma \neq 0$ aus Satz 2.7 und **[Ri1**, 5.2(5)]. Sei $\gamma \in \mathbf{Q}^+$. Gemäß **[X1**,2] und des Lemmas 2.4 gibt es keinen Modul M_i in $(*)$ mit $\dim Hom(P(x), M_i) = 2$, folglich gilt $f_0 f_1 \ldots f_n \neq 0$ in $End(M_0) \cong k$. Also ist f_0 ein zerfallender Monomorphismus. Dies ist jedoch ein Widerspruch. Nun sei $\gamma = \infty$. Da jeder Modul $M \in S_x^A$ mit $\dim Hom(P(x), M) = 2$ stets zu $\mathcal{P}_\infty$ gehört, gilt $\dim Hom(P(x), M_i) = 1$ für alle i. Demnach existiert ein Widerspruch wie vorher.

□

3.2 Definition.
Seien $M, N \in S_x^A$. Wir definieren $M \leq N$, wenn es in S_x^A Moduln $M_0 = N, M_1, \ldots, M_n = M$ und Homomorphismen $f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ mit $Hom(P(x), f_i) \neq 0$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ gibt. Nach 3.1 ist dann S_x^A eine Halbordnung bzgl. $\leq$. Setze

$$K_x^A = \{M \in S_x^A \mid M \quad \textit{liegt in einer kritischen Menge}\}.$$

3.3 Satz.
K_x^A ist eine volle konvexe Teilmenge von S_x^A bzgl. $\leq$.

Beweis: Sei $Y \in S_x^A$. Sei $K_0 = \{M_1, \ldots, M_n\}$ die kritische Menge mit Index 0 und $K_\infty = \{N_1, \ldots, N_s\}$ die kritische Menge mit Index ∞. Seien $0 \neq f : M_i \longrightarrow Y$ und $0 \neq g : Y \longrightarrow N_j$ Homomorphismen. Wir diskutieren die folgenden drei Fälle:

(i) $Y \in \mathcal{P}_0$. Angenommen $\langle h_0, \underline{\dim} Y \rangle / \dim Y_x \leq \langle h_0, \underline{\dim} P(x) \rangle$ gilt, daraus folgt mit [X2, 5.1], daß ein injektiver Homomorphism $g : P(x) \longrightarrow Y$ mit $Koker(g)$ in $\mathcal{T}_0 \vee \mathcal{Q}_0$ existiert. Somit gilt $Hom(\oplus M_i, Y) = 0$. Dieser Widerspruch zeigt $\langle h_0, \underline{\dim} Y \rangle / \dim Y_x < -(h_0)_x$ und $Y \in K_0 \subseteq K_x^A$.

(ii) $Y \in \mathcal{T}_0$. Nach 2.8 und 2.9 gehört Y stets zu K_x^A.

(iii) $Y \in \mathcal{Q}_0$. Nach der Voraussetzung liegt Y in $\mathcal{P}_\infty$. Angenommen $Y \notin K_x^A$. Dann gilt $\dim Y_x = 1$. Sei $Index(Y) = \gamma$. Also gilt $0 < \gamma < \infty$. Sei $\{X_1, \ldots, X_{r_1}\}$ die kritische Menge mit maximalem Index $\gamma_1 < \gamma$ bzw. $\{Z_1, \ldots, Z_{r_2}\}$ die kritische Menge mit minimalem Index $\gamma_2 > \gamma$, seien

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow P(x)^m \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_1} X_i^{t_i} \longrightarrow H_{\gamma_1} \longrightarrow 0,$$

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow P(x)^{m'} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_2} Z_j^{t_j} \longrightarrow H_{\gamma_2} \longrightarrow 0$$

die durch 2.5 gegebenen Sequenzen. Aus $Y \notin K_x^A$ folgt, daß es keine kritische Menge mit Index γ gibt. Sei $\oplus Y_i'$ ein Komplement zu $\bigoplus_{i=1}^{r_1} X_i \oplus P(x)$ in $\mathcal{T}_{\gamma_1}$ zum Kippmodul. Nach 2.9 erhalten wir dann eine neue kritische Menge $\{M_1, \ldots, M_r\}$ mit Index β. Wir zeigen $\beta = \gamma_2$. Zuerst gilt $\beta > \gamma$ und $\beta \geq \gamma_2$. Angenommen $\beta > \gamma_2$. Für die kritische Menge $\{M_i\}_{i=1}^r$ gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P(x)^n \longrightarrow \oplus_{i=1}^r M_i^{t_i} \longrightarrow H_\beta \longrightarrow 0.$$

Daraus folgt $Ext^1(\oplus_i Z_i, \oplus_j M_j) = 0$. Wegen $\{M_i\} \subseteq \mathcal{T}_{\gamma_1} \vee \mathcal{P}_{\gamma_1}$ erhalten wir $Ext^1(\oplus M_i, H_{\gamma_2}) = 0$ und $Ext^1(\oplus M_i, \oplus Z_j) = 0$, wenn wir $Hom(\oplus M_i, -)$ auf $(**)$ anwenden. Aufgrund $\gamma_2 \neq \infty$ existiert ein Modul $Z' \in \mathcal{T}_{\gamma_2}$, so daß $P(x) \oplus \bigoplus_{j=1}^{r_2} Z_j \oplus Z'$ ein Kippmodul ist. Es gelten $Ext^1(Z', H_\beta) = 0$ und $Ext^1(Z', \bigoplus_{i=1}^{r} M_i) = 0$ sowie $Ext^1(\oplus M_i, Z') = 0$. Also ist $P(x) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r_2} Z_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{r} M_j \oplus Z'$ ein Kippmodul. Dies impliziert $\{M_i\}_{i=1}^r \subseteq \{Z_j\}_{j=1}^{r_2}$. Folglich gilt $\bigoplus_{i=1}^{r} M_i = \bigoplus_{i=1}^{r_2} Z_i$ und $\beta = \gamma_2$. Ein Widerspruch.

Nun sei $\beta = \gamma_2$. Dann ist $\bigoplus_{i=1}^{r_1} X_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{r_2} Z_j \oplus P(x)$ ein Kippmodul. Es gilt $Ext^1(Y, Z_i) = 0$. Weil Z_i in $\mathcal{P}_{\gamma_1} \vee \mathcal{T}_{\gamma_1}$ liegt, gilt auch $Ext^1(Z_i, Y) = 0$. Also ist $Y \oplus P(x) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r_2} Z_i$ ein partieller

Kippmodul. Angenommen $\gamma_2 \neq \infty$. Nach 2.10 gibt es nur ein Komplement in $\mathcal{P}_{\gamma_2}$ zu $\bigoplus_{i=1}^{r_2} Z_i \oplus P(x)$. Also gehört Y stets zu $\{X_1, \dots, X_{r_1}\}$. Dies ist ein Widerspruch zu $Y \notin K_x^A$. Deshalb gilt $\gamma_2 = \infty$. Somit folgt aus der Voraussetzung $Hom(Y, \oplus Z_j) = Hom(Y, \oplus N_j) \neq 0$. Aber $\bigoplus_{i=1}^{r_2} Z_i \in \mathcal{P}_{\gamma_1} \vee \mathcal{T}_{\gamma_1}$ und $Y \in \mathcal{T}_\gamma$ mit $\gamma > \gamma_1$ implizieren $Hom(Y, \bigoplus_{j=1}^{r_2} Z_j) = 0$. Also haben wir mit diesem Widerspruch gezeigt, daß $Y \in K_x^A$ ist.

□

4. Fasersummen über $P(x)$

Wir wollen in diesem Schnitt Fasersummen über $P(x)$ betrachten. Zuerst erinnern wir an die Definition des Funktors $\Sigma : \check{\mathcal{U}}(S_x^A) \longrightarrow A$-mod (siehe **[X1]**). Der Funktor Σ bildet das Objekt $V = (V_0, V_\omega, \gamma_V : P(x) \otimes_k V_\omega \longrightarrow V_0)$ auf $Koker(\gamma_V)$ ab. Ein A-Modul M heißt eine Fasersumme über $P(x)$, wenn M unter dem Funktor Σ ein Bild eines Objektes in $\check{\mathcal{U}}(S_x^A)$ ist (siehe **[D]**).

4.1 Lemma.
Seien $V, W \in \check{\mathcal{U}}(S_x^A)$ mit W unzerlegbar und $f : V \longrightarrow W$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(1) $(\Sigma f)_x = 0$,
(2) f zerfällt über einem Objekt $Q = \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{X}_i$ in $\check{\mathcal{U}}(S_x^A)$ mit $X_i \in S_x^A$ für alle i.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1) ist trivial, denn $(\Sigma Q)_x = 0$ gilt. Umgekehrt sei $(\Sigma f)_x = 0$. Sei $V_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ und $Q = \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{M}_i$. Betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
P(x) \underset{k}{\otimes} V_\omega \arrow[rrr, "\gamma_V"] \arrow[dr, hook, "i=1\otimes\tilde{\gamma}"] \arrow[ddd, "f_\omega"'] & & & V_0 \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "1"] \arrow[ddd, "f_0"'] & & \Sigma V \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "f_1"] \arrow[ddd, "\Sigma f"'] & 0 & \\
& P(x) \otimes \operatorname{Hom}(P(x), \bigoplus_{i=1}^{n} M_i) \arrow[rrr, "\varepsilon"] \arrow[ddl, dashed, "j"] \arrow[d, dashed, "j'"] & & & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \arrow[rr] \arrow[ddl, "f_0"] & & \Sigma Q \arrow[r] \arrow[ddl, dashed, "f_2"] & 0 \\
& B \arrow[drr, hook] & & & & & & \\
P(x) \underset{k}{\otimes} W_\omega \arrow[ur, two heads] \arrow[rrr, "\gamma_W"'] & & & W_0 \arrow[rr, "\pi'"] & & \Sigma W \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Da $0 = \pi_x(\Sigma f)_x = (\pi(\Sigma f))_x = (f_0)_x \pi'_x$ gilt, ist $\varepsilon f_0 \pi' = 0$. Also existieren Homomorphismen j' und j sowie f_2, so daß das obige Diagramm kommutativ ist. Da W unzerlegbar ist, gilt $Hom(P(x), Ker(\gamma_w)) = 0$. Aus $ij\gamma_W = \gamma_V f_0 = f_\omega \gamma_W$ folgt, daß $ij - f_\omega$ über $Ker(\gamma_W)$ zerfällt, also ist $ij - f_\omega = 0$ und $ij = f_\omega$.

□

4.2 Folgerung.
$\mathcal{U}'$ ist zu Bild$(\Sigma)/\mathcal{M}_x$ äquivalent (siehe **[X1]***), wobei $\mathcal{M}_x = \{X \in A\text{-mod} \mid X_x = 0\}$.*

4.3 Lemma.
Sei $0 \longrightarrow \tau C \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten- Sequenz mit $C \notin S_x^A$. Sind τC und C Fasersummen über $P(x)$, so ist auch B.

Beweis: Seien $V = (V_0, V_\omega, \gamma_V)$, $W = (W_0, W_\omega, \gamma_V) \in \check{\mathcal{U}}(S_x^A)$ mit $\Sigma V = \tau C$ und $\Sigma W = C$. $B_1 = Bild(\gamma_V)$ und $B_2 = Bild(\gamma_W)$. Wir betrachten nun das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(x)\otimes V_\omega \arrow[rr] \arrow[dd, "\gamma_V"'] \arrow[dr, two heads] & & P(x)\otimes(V_\omega\oplus W_\omega) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, "\pi'"] & & P(x)\otimes W_\omega \arrow[rr] \arrow[dd, "\gamma_W"'] \arrow[dr, two heads] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & B_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, hook] & & K_0 \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, hook, "\mu"] & & B_2 \arrow[r] \arrow[dl, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_0 \arrow[rr, "{[1,0]}"'] \arrow[d, "\pi_V"] & & V_0\oplus W_0 \arrow[rr, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"'] \arrow[d, "\pi"] & & W_0 \arrow[rr] \arrow[d, "\pi_W"] \arrow[dll, "\sigma"] & & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau_A C \arrow[rr, "i"'] & & B \arrow[rr, "p"'] & & C \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

Wegen $C \notin S_x^A$ ist π_W kein erfallender Epimorphismus, deshalb gibt es einen Homomorphismus $\sigma : W_0 \longrightarrow B$ mit $\pi_W = \sigma p$. Definiert man $\pi : V_0 \oplus W_0 \longrightarrow B$ durch $(v, w) \longmapsto v\pi_V i + w\sigma$ und setzt $K_0 = Ker(\pi)$, so erhält man ein kommutatives Diagramm. Analog definiert man $\pi' : P(x) \otimes (V_\omega \oplus W_\omega) \twoheadrightarrow K_0$. Aus obigem Diagramm folgt sofort Lemma 4.3.

4.4 Lemma.
Sei A eine tubulare Algebra. Sei $M \in A_\infty$-mod mit $Ae_\infty \underset{A_\infty}{\otimes} M \cong M$. Ist M eine Fasersumme über $P_{A_\infty}(x)$, so ist M auch eine Fasersumme über $P(x)$.

Beweis: Nach dem Unterlemma von 2.17 ist die Behauptung trivial: wenn $V' = (V_0', V_\omega', \gamma_{V'}) \in \check{\mathcal{U}}(S_x^{A_\infty})$ mit $Koker(\gamma_{V'}) = M$, so gilt $\Sigma(Ae_\infty \underset{A_\infty}{\otimes} V_0, V_\omega', Ae_\infty \otimes \gamma_V') = M$.

□

4.5 Folgerung.
Sei M unzerlegbarer Modul über einer tubularen Algebra A mit $M_x \neq 0$. Ist $M \in \mathcal{Q}_\infty$, so ist M eine Fasersumme über $P(x)$.

Beweis: Wegen $\tau_A(Ae_\infty \underset{A_\infty}{\otimes} M) \cong \tau_{A_\infty} M$ haben wir $Ae_\infty \underset{A_\infty}{\otimes} M \cong \tau_A^{-1}(\tau_{A_\infty} M) \cong M$.

□

4.6 Satz.
Sei A eine tubulare Algebra and M ein unzerlegbarer Modul. Ist M ein Modul in $\mathcal{P}_\infty$ oder homogener Modul in $\mathcal{T}_\infty$, und gilt $M_x \neq 0$, so ist M eine Fasersumme über $P(x)$.

Beweis: Aus 4.5 und [**X1**, 1.2] folgt der Satz sofort.

□

An dieser Stelle möchte ich C.M. Ringel für hilfreiche und geduldige Diskussionen über diese Arbeit und D. Happel für sorgfältige Nachprüfung der deutschen Formulierung herzlich danken. Ich danke der Deutschen Forschungsgemeinschaft für Unterstützung und Frau Köllner für das Schreiben dieser Arbeit.

Literaturverzeichnis

[D] Dräxler,P.: $\mathcal{U}$-Fasersummen in darstellungsendlichen Algebren. J. Algebra **113** (1988). 430–437

[Hö] v.Höhne,H.: Ganze quadratische Formen und Algebren. Dissertation, Berlin 1986

[Ri1] Ringel,C.M.: Tame algebras and integral quadratic forms. SLNM, **1099** (1984)

[Ri2] Ringel,C.M.: Tame algebras. SLNM, **831** (1979)

[RV] Ringel,C.M. und Vossieck,D.: Hammocks. Proc. London Math. Soc. (3) **54** (1987), 216–246

[S] Simson,D.: Vector space category, right peak rings and their socle projective modules. J. Algebra, **92** (1985), 532–571

[Sc] Scheuer,T.: The canonical decomposition of the poset of a Hammock. Prepint

[X1] Xi,C.C.: Die Vektorraumkategorie zu einem unzerlegbaren projektiven Modul einer Algebra. Erscheint in J. Algebra

[X2] Xi,C.C.: Die Vektorraumkategorie zu einem unzerlegbaren projektiven Modul einer zahmen verkleideten Algebra. Erscheint in J. Algebra

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstraße 25
4800 Bielefeld 1
Federal Republic of Germany

Department of Mathematics
Shaanxi Normal University
Xi'an, Shaanxi
China

(Eingegangen am 28. März 1990)