2018 年 1 月 第 41 卷 第 1 期
四川师范大学学报(自然科学版)
Journal of Sichuan Normal University(Natural Science)
Jan.,2018 Vol.41,No.1

代数和模的控制维数

惠昌常[1,2]

(1. 首都师范大学 数学科学学院，北京 100048； 2. 河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007)

摘要:同调维数在表示论、同调代数等学科及相关领域的研究中是一个重要的研究课题.对代数和模的控制维数的发展历史和研究进展做一些综述,希望引起有兴趣的读者从导出模范畴角度研究控制维数的兴趣.对控制维数的深入理解,也许会引导我们对著名的 Nakayama 猜想有更好的理解.

关键词:控制维数；投射模；内射分解；导出等价；倾斜模；Nakayama 猜想

中图分类号:O153 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-8395(2018)01-0001-08

doi:10.3969/j.issn.1001-8395.2018.01.001

1 控制维数的定义和著名的 Nakayama 猜想

在环与代数的研究中,利用同调性质或维数来分类代数和模是一个常用而且非常有效的方法.控制维数的引入就是一个典型的例子.早在 1958 年,Nakayama[1]就提出利用代数的控制维数来分类代数.我们回顾一下控制维数定义的历史和最终的定义.

总假设 A 是域 k 上的一个有限维代数,并限定在代数 A 的有限生成左模范畴 A-mod 中讨论问题.将代数 A 的有限生成的右模范畴记作 mod-A,或 A^{op}-mod,其中 A^{op} 表示 A 的反代数;代数 A 的有限生成 A-A-双模范畴记作 A-mod-A,或 A^{e}-mod,这里 A^{e} 表示代数 A 的包络代数 $A\otimes_k A^{op}$.在双模范畴 A^{e}-mod 中考察代数 A 的一个双模正合序列

$$0\to {}_AA_A\to I_0\to I_1\to\cdots\to I_{n-1},$$

其中 $I_0,I_1,\cdots,I_{n-1}$ 作为双模,既是投射的也是内射的.Nakayama 在文献[1]中提出按照这种分解的长度来分类代数,并猜想:如果一个代数存在一个无限长的这种内射分解,则这个代数必定是自入射的,即 ${}_AA$ 是一个内射模.随后,Tachikawa[2]研究了具有这种分解的代数,证明了在长度 $n>0$ 的情况下它们都是 QF-3 代数,即具有极小忠实投射-内射模的代数.Tachikawa 在文献[3]中放松了上述的分解条件,即只在 A-mod 中来讨论上述问题,也给出了相应的猜想.这样,一个代数 A 的控制维数记作

$$\mathrm{dom.dim}(A),$$

就定义为:在 ${}_AA$ 的极小内射分解

$$0\to {}_AA\to I_0\to I_2\to\cdots\to I_n\to\cdots$$

中使得 $I_0,I_1,\cdots,I_{n-1}$ 为投射模的最大的自然数 n.严格地讲,这样定义的控制维数应该叫做“左控制维数”.当然这里一个很自然的问题是:如果用右模来定义,得到的右控制维数又会是怎样的呢?左、右控制维数相等吗?在文献[4]中,Müller 证明了对于一个有限维代数 A 来说,它的左控制维数、右控制维数和 Nakayama 定义的双边控制维数都是相等的.这就是为什么今天在讨论代数的控制维数时,只用左模来定义控制维数就够了.显然,自入射代数的控制维数是无限的.这句话的逆命题就是 Nakayama 猜想了,它可以叙述为:

Nakayama 猜想 设 A 是域上的一个有限维代数,如果 $\mathrm{dom.dim}(A)=\infty$,则 A 是自入射代数,即 ${}_AA$ 是内射模.

这个猜想也列在著名代数表示理论专家 Auslander 等在 1995 年出版的专著中(文献[5]的猜想(8)),已有60 年的历史了,但它依然是公开问题.对于分次的代数,这个猜想是成立的[6-7].

收稿日期:2017-08-27

基金项目:国家自然科学基金(11331006)

作者简介:惠昌常(1960—),男,教授,主要从事代数表示论的研究,E-mail:xicc@cnu.edu.cn

为了叙述方便,将控制维数的定义扩展到任意的 A -模 X 上. 设

$$0 \to {}_AX \to I_0(X) \to I_1(X) \to \cdots \to I_n(X) \to \cdots$$

是 X 的一个极小内射分解. 设 I 是一个内射 A -模, $0 \leqslant n \leqslant \infty$. 如果 n 是使得所有 $I_0, I_1, \cdots, I_{n-1}$ 都属于 add (I) 的最大者,就说 X 关于 I 的控制维数是 n,记作

$$I - \mathrm{dom.\,dim}\,(X) = n,$$

这里 add (I) 表示在 A -mod 中由 I 生成的可加满子范畴. 当 add (I) 是所有投射 - 内射模构成的范畴时,把

$$I - \mathrm{dom.\,dim}\,(X)$$

简单写作 dom. dim(X),并称它为 X 的控制维数.

2 控制维数对代数的分类

在 20 世纪 60 年代的后期,Müller 在控制维数方面做了大量有意义的工作[8-9],包括前面提到的一些工作. 这里介绍利用控制维数对代数分类的一些结果. 先回忆一些概念.

设 A 是一个 k -代数, M 是一个 A -模. 称 M 为极小忠实模,如果它是忠实的(faithful),并且对任意的忠实模 N 都有一个直和分解: $N \simeq M \oplus N'$,其中 N' 是一个 A -模. 代数 A 叫做 QF-3 代数,如果它有一个极小忠实左模和极小忠实右模. 注意,极小忠实模一定是投射的. 模 ${}_AM$ 叫做生成子,如果每个不可分解投射模都同构于 M 的一个直和项;叫做余生成子,如果每个不可分解内射模都同构于 M 的一个直和项;叫做生成 - 余生成子,如果它既是生成子也是余生成子. 在一些文献上,生成 - 余生成子也叫做完全忠实模(fully faithful module).

定理 2.1 假设 A 是一个有限维 k -代数.

1) dom. dim$(A) \geqslant 1$ 当且仅当 A 是 QF-3 代数[2].

2) dom. dim$(A) \geqslant 2$ 当且仅当存在一个代数 B,一个生成 - 余生成子 ${}_BV$,使得 $A \simeq \mathrm{End}_B(V)$ [4].

事实上,Müller[4] 证明了如下更一般的事实.

命题 2.2[4] 设 A 是一个有限维代数, A -模 M 是一个生成 - 余生成子,令 B 表示 A -模 M 的自同态代数,则 dom. dim $(B) \geqslant n+2$ 当且仅当对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathrm{Ext}_A^i(M,M) = 0$.

Hoshino[10] 给出控制维数至少是2的代数的另一种刻画.

命题 2.3[10] 设 R 是左、右 Noether 环,则 dom. dim $(R) \geqslant 2$ 当且仅当函子 $(\,)^{**}: R-\mathrm{mod} \to R-\mathrm{mod}$ 是左正合的,这里 $(\,)^*: = \mathrm{Hom}_R(-, R)$.

Hoshino 的上述结论被 Colby 在文献[11]中利用倾斜模(定义见本文第 4 节)的控制维数做了大幅度的推广.

对于任意的 n,目前还没有见到对控制维数是 n 的这类代数的刻划. 如果将控制维数和整体维数相结合来刻划代数,这方面的工作首先是 Auslander 对整体维数不超过 2,控制维数至少是 2 的代数进行的刻划,他证明了这类代数是表示有限型代数的可加生成子的自同态代数[12],这类代数称为 Auslander 代数. 近年来,Iyama 等[13] 讨论了整体维数不超过 n,控制维数至少是 n 的代数.

控制维数在张量积下有如下的计算公式[4]:对任意的 k - 代数 R 和 S,

$$\mathrm{dom.\,dim}(R \otimes_k S) = \min\{\mathrm{dom.\,dim}(R), \mathrm{dom.\,dim}(S)\}.$$

对于控制维数无限的代数,Martinez - Villa 利用函子反变有限子范畴(contravariantly finite subcategory)研究了相关的挠对(torsion pair)和代数的自入射性,更详细的讨论见文献[14 - 15].

最后指出,在 Frobenius 扩张下,控制维数与几乎凝聚环(almost coherent ring)的关系在文献[16]中有深入的研究.

3 控制维数与 Schur 代数

控制维数在 Schur 代数或更一般的 q - Schur 代数的上同调群研究中也扮演着一个特别有用的角色. 假设 k 是一个域, $n \geqslant r$ 是两个自然数,用 $S(k,n,r)$ 表示域 k 上关于对称群 Σ_r 的 Schur 代数(详细定义见文献[17]). 在 Schur 代数的模范畴和对称群代数的模范畴之间有一个 Schur 函子

$$F: S(k,n,r) - \mathrm{mod} \to k\Sigma_r - \mathrm{mod},$$

这个函子把 $S(k,n,r)$ -mod 中具有 Weyl 模滤链的模范畴 $\mathscr{F}$ 映射到 $k\Sigma_r$ -mod 中具有对偶 Specht 模滤链的模范畴 $\mathscr{F}'$. 文献[18]证明了这类模的上同调群之间有一个同构的关系,他们的结果是针对更广泛的一类代数而证明的,限制到 Schur 代数就有如下结论.

定理 3.1[18] 设域 k 是无限域,特征是 $p > 0$,

$n \geqslant r \geqslant p$，对任意的 $M \in \mathscr{F}$，任意的 $X \in S(k,n,r)$ - mod，都有：

1) $\mathrm{Ext}^i_{S(k,n,r)}(X,M) \simeq \mathrm{Ext}^i_{k\mathfrak{S}_r}(FX,FM)$，$0 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{dom.\,dim}(S(k,n,r)) - 2$；

2) $\mathrm{dom.\,dim}(S_k(n,r)) = 2(p-1)$.

这个结果也推广了文献[19 - 20] 中的相应结论，事实上，在文献[19 - 20] 中，要求 $p > 5$ 和 $n \geqslant r$.

关于控制维数与 Schur - Weyl 对偶的联系和一些应用，参见文献[21].

4　导出等价下控制维数的变化

在代数与范畴的研究中，有 3 种基本的等价关系是比较重要的，它们是 Morita 等价、稳定等价和导出等价.

我们知道如果两个代数的模范畴是等价的，就称这两个代数是 Morita 等价. 这个概念最早源于 Morita 的著名工作[22]. 但就是这个今天经常要用到的工作，在一开始时并没有受到重视，所以这篇文章就只好发表在大学学报一级的杂志上了. 由 Morita 等价的定义可以看出，控制维数在 Morita 等价下是不变的.

两个代数叫做稳定等价的，如果它们的稳定范畴是等价的. 这里稳定范畴是指模范畴模掉投射模子范畴而得到的商范畴[5]. 容易看出，稳定等价不保持控制维数：域 k 上的 2×2 上三角代数与代数 $k[x]/(x^2)$ 是稳定等价的，但前者的控制维数是 1，而后者的控制维数是无限. 然而一种特殊的稳定等价 - Morita 型稳定等价保持控制维数. 域 k 上的两个代数 A 和 B 叫做 Morita 型稳定等价，如果存在双模 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 使得 M 和 N 作为单边模都是投射的，且有双模同构：$M\otimes_B M \simeq A \oplus P$，$N \otimes_A M \simeq B \oplus Q$，其中 P 和 Q 分别是投射双 A - 模和投射双 B - 模[23]. 关于 Morita 型稳定等价有丰富的文献资料，如文献[24 - 30].

下面回顾导出等价的定义，为此先引入一些符号.

设 R 是一个有单位元的环，R - 模构成的复形是指一个如下的序列

$$\cdots \to X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \to \cdots \to X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \to \cdots,$$

这里 X^i 是 R - 模，d_X^i 是模同态，并且要求 $d_X^i d_X^{i+1} = 0$，$i \in \mathbf{Z}$. 通常将这个序列记为

$$X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i\in\mathbf{Z}},$$

称 d_X 为 $X^\bullet$ 的微分. 复形 $X^\bullet$ 到 $Y^\bullet$ 的态射是一簇的模同态 $(f^i)_{i\in\mathbf{Z}}$，其中 $f^i: X^i \to Y^i$ 满足

$$f^i d_Y^i = d_X^i f^{i+1},$$

即对任意的 $i \in \mathbf{Z}$，有如下的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^{i-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

复形的态射可按照自然的方法合成. 如果令 $\mathscr{C}(R)$ 表示 R - 模的所有复形的全体，则 $\mathscr{C}(R)$ 就构成一个范畴，容易看出，它是一个 Abel 范畴. 利用这个复形范畴，可以定义它上面的同伦范畴(homotopy category)，记作 $\mathscr{K}(R)$. 如果一个复形

$$X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i\in\mathbf{Z}}$$

只有有限多个 X^i 不为 0，就称它是一个有界复形. 用 $\mathscr{C}^b(R-\mathrm{proj})$ 表示有限生成投射 R - 模的有界复形范畴，用 $\mathscr{K}^b(R-\mathrm{proj})$ 表示 $\mathscr{C}^b(R-\mathrm{proj})$ 的同伦范畴.

如果将同伦范畴 $\mathscr{K}(R)$ 中的拟同构可逆化，就得到 R - 模范畴的导出范畴，记作 $\mathscr{D}(R)$. 注意 $\mathscr{D}(R)$ 是一个三角范畴，这个三角范畴的平移函子记为[1]，它在复形 $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ 上的作用是这样一个复形：

$$(X^\bullet[1])^i = X^{i+1}, \quad d^i_{X^\bullet[1]} = -d_X^{i+1}.$$

值得注意的是，$\mathscr{D}(R)$ 的态射集合的描述比较复杂，有兴趣的读者可以参考文献[31].

导出范畴和等价或者更一般的三角范畴和等价(triangulated category and triangle equivalence)是由大数学家 Grothendieck 和他的学生 Verdier 在 20 世纪的 60 年代引入的[32]. 1986 年，Happel 将三角范畴的理论和方法应用于有限维代数的表示理论的研究，取得了丰硕的成果[33-34]. 随后，Cline 等[35] 推广了 Happel 的结论到一般的环上，而 Rickard[36] 将 Happel 的这一想法做了全面的推广，建立了环的导出范畴的 Morita 理论.

关于导出等价，Keller[37] 从微分分次代数的角度作了深入的探讨，建立了微分分次代数的导出等价理论. 限于篇幅，不在此进行介绍，建议读者阅读

Keller 的有关论文. 下面叙述 Rickard 关于环的导出等价的一个主要结论.

两个环 R 和 S 称为是导出等价的,如果它们的导出范畴 $\mathscr{D}(R)$ 和 $\mathscr{D}(S)$ 作为三角范畴是等价的. 例如,如果 ${}_AT$ 是一个倾斜 A - 模,Happel[33] 证明了 A 与 $\mathrm{End}_A(T)$ 导出等价. 关于环的导出等价有下面非常有用的结论.

定理 4.1[36] 环 R 和 S 是导出等价的充分必要条件是存在一个复形 $T^\bullet \in \mathscr{K}^b(R-\mathrm{proj})$ 使得:

1) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^b(R-\mathrm{proj})}(T^\bullet,T^\bullet[n])=0$,对任意$n\neq 0$;

2) $\mathscr{K}^b(R-\mathrm{proj})$ 可由 $T^\bullet$ 作为可加、三角满子范畴生成;

3) $S\simeq \mathrm{End}_{\mathscr{K}^b(R-\mathrm{proj})}(T^\bullet)$.

如果 $\mathscr{K}^b(R-\mathrm{proj})$ 中的一个复形 $T^\bullet$ 称满足条件1)和2),就称 $T^\bullet$ 为 R 的一个倾斜复形(tilting complex over R).

容易看出, Morita 等价的两个代数一定是导出等价的. 反过来是不对的, 这一点可由倾斜模(tilting module) 提供的导出等价看出来. 现在的问题是:

问题 1 导出等价是不是保持控制维数?

对于几乎 Nakayama - 稳定的导出等价(almost ν - stable derived equivalence),控制维数是保持的[38]. 但一般来说,这个问题的答案是否定的,简单的例子就是:路代数 $k(\bullet\to\bullet\to\bullet)$ 与路代数 $k(\bullet\to\bullet\leftarrow\bullet)$ 是导出等价的,但前者的控制维数是1,而后者是0,因为这个代数就没有投射 - 内射模. 于是,进一步的问题就是:

问题 2 如果2个代数是导出等价的,它们的控制维数之间会有什么样的变化规律?

问题 3 在什么条件下导出等价保持控制维数的有限性(或无限性)?

上述的2个问题,可以在下面2种特殊情况下进行讨论:

(a) 在任意的代数类中讨论特殊的导出等价下控制维数的变化规律和无限性;

(b) 在特定的代数类中讨论任意的导出等价下控制维数的变化规律和无限性.

关于这2种特殊情况,最新的结果是文献[39 - 40],其中文献[39] 讨论情况(a),而文献[40] 针对的是情况(b). 现在对其中的一些结果进行介绍.

文献[39] 首先给出构造导出等价的两个代数的方法,使得其中一个的控制维数至少是2,而另一个的控制维数是1. 其次,讨论了倾斜模给出的导出等价下控制维数的变化规律. 我们知道一个 A - 模 $T\in A-\mathrm{mod}$ 称为是倾斜模(tilting module)[41],如果它满足:

1) T 的投射维数有限,即 $\mathrm{pd}({}_AT)=n<\infty$;

2) 对任意的 $j>0$, $\mathrm{Ext}_A^j(T,T)=0$;

3) 存在一个正合列

$$0\to {}_AA\to T_0\to\cdots\to T_n\to 0,\quad T_j\in \mathrm{add}(T),$$

这里 $\mathrm{add}(T)$ 表示在 A - mod 中由 T 生成的可加子范畴.

倾斜模的一个例子:设 A 的控制维数为 $n\geqslant 1$, $E(A)$ 为 ${}_AA$ 的内射包,则 $U:=E(A)\oplus(E(A)/A)$ 就是一个投射维数小于等于1的倾斜模,且

$$\mathrm{dom.dim}({}_AU)\geqslant n-1,$$

见文献[11] 中的命题5. 如果 $\mathrm{dom.dim}(A)=n$,即有 ${}_AA$ 的一个极小内射分解

$$0\to A\xrightarrow{d_0} I_0\to I_1\to\cdots\xrightarrow{d_n} I_n\to\cdots,$$

使得 $I_0,I_1,\cdots,I_{n-1}$ 是投射模,则也可以类似地定义一系列的倾斜模

$$T_j:=I_0\oplus\cdots\oplus I_{j-1}\oplus\mathrm{Coker}(d_{j-1}),\quad j=1,2,\cdots,n,$$

这些模就称为典范倾斜模(canonical tilting modules).

根据定义,每个不可分解的投射 - 内射 A - 模都是任何一个倾斜模的直和项. 令 ω 表示极小的投射 - 内射模,使得 $\mathrm{add}(\omega)$ 正好就是所有投射 - 内射模构成的范畴. 令 $\nu_A=D\mathrm{Hom}_A(-,A)$ 表示 Nakayama 函子,其中 $D=\mathrm{Hom}_k(-,k)$. 令 ε 表示极大的投射 - 内射 A - 模,使得它的每个不可分解直和项对任意的 $i\geqslant 1$ 在 ν_A^i 作用下都是投射模.

设 T 是一个倾斜模,将 T 先分解成两部分: $T=P\oplus T'$,其中 P 是投射的, T' 没有非零的投射直和项. 进一步,将 P 再细分解:令 E 表示 P 的一个直和项,它满足

$$\mathrm{add}(E)=\{X\in\mathrm{add}(P)\mid \nu_A(X)\in\mathrm{add}(T)\},$$

同文献[39] 一样,称 E 是倾斜模 T 的心座(heart). 令 $B:=\mathrm{End}_A(T)$. 关于 A 和 B 的控制维数,有下面的结论.

定理 4.2[39] 1) 如果 $\omega\in\mathrm{add}(\nu_A(E))$,则

$\mathrm{dom.dim}(A) \leqslant \mathrm{dom.dim}(B) + n$;

2) 如果 $\nu_A(E) \in \mathrm{add}(\omega)$, 则 $\mathrm{dom.dim}(B) \leqslant \mathrm{dom.dim}(A) + n$.

根据这个定理, 如果

$$\mathrm{add}(\omega) = \mathrm{add}(\nu_A(E)),$$

则 $\mathrm{dom.dim}(A) = \infty$ 当且仅当 $\mathrm{dom.dim}(B) = \infty$.

这个定理将 A 和 B 的控制维数在假定的条件下联系起来了, 那么是否有满足这些条件的代数和倾斜模呢? 下面给出一类这样的代数. 根据文献[42], 一个 k - 代数 A 叫做 Morita 代数如果它同构于 $\mathrm{End}_B({}_BB \oplus M)$, 其中 B 是自入射代数, M 是一个 B - 模.

命题 4.3　设 A 是一个 Morita 代数, E_0 是 ${}_AA$ 的内射包, 令

$$T := E_0 \oplus \Omega^{-j}({}_AA),$$

这里 $\Omega^{-j}(M)$ 表示 M 的第 j 个余合冲(cosyzygy), 则:

1) 倾斜模 $T := E_0 \oplus \Omega^{-j}(A)$ 满足 $\mathrm{add}(E) = \mathrm{add}(\omega)$, 对任意 $1 \leqslant j < \mathrm{dom.dim}(A) + 1$;

2) $B := \mathrm{End}_A(E_0 \oplus \Omega^{-j}(A))$ 是 Morita 代数, 对任意 $1 \leqslant j < \mathrm{dom.dim}(A) + 1$;

3) $\mathrm{dom.dim}(B) = \mathrm{dom.dim}(A)$, 对任意

$$1 \leqslant j < \mathrm{dom.dim}(A) + 1.$$

关于 Morita 代数有以下命题.

命题 4.4[39]　设 A 是 Morita 代数, T 是投射维数不超过 n 的倾斜模, 令 $B := \mathrm{End}_A(T)$, 则

$$\mathrm{dom.dim}(A) \leqslant \mathrm{dom.dim}(B) + n.$$

进而, 如果 B 也是 Morita 代数, 则

$$|\mathrm{dom.dim}(A) - \mathrm{dom.dim}(B)| \leqslant n.$$

一般说来, Morita 代数上的倾斜模的自同态代数不一定是 Morita 代数.

为了给出自同态代数的控制维数的下界, 下面引入梯度的概念[39]. 根据倾斜模的知识, 对给定的倾斜模 T 以及任意的投射模 X, 存在正合列

$$\cdots \to T_X^{-i} \to T_X^{-i+1} \to \cdots \to T_X^{-1} \to \nu_A(X) \to 0,$$

它是 $\nu_A(X)$ 的极小右 $\mathrm{add}(T)$ - 逼近, 记

$$T_X^0 := \nu_A(X).$$

定义 4.5[39]　设 T 是一个倾斜 A - 模, E 是 T 的心座, $0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to T \to T \to 0$ 是 T 的一个极小投射分解, X 是一个投射 A - 模.

1) X 的 T - 梯度, 记作 $\partial_T(X)$, 定义为

$$\partial_T(X) := \inf\{i \geqslant 0 \mid T_X^{-i-1} \notin \mathrm{add}(\nu_A(E))\};$$

2) 代数 A 的 T - 梯度定义为 $\partial_T({}_AA)$, 代数 A 的整体 T - 梯度定义为

$$\partial(A,T) := \min\{\partial_T(P_i) + i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}.$$

利用 T - 梯度, 可以给出 T 的自同态代数的控制维数的一个下界, 见文献[39]中的推论 4.12.

命题 4.6　1) $\mathrm{dom.dim}(B) \geqslant \partial(A,T) \geqslant \partial_T(A)$;

2) $\partial_T(A) = \mathrm{dom.dim}(T_B) = \nu_A(E) - \mathrm{dom.dim}({}_AT)$.

下面介绍在 Morita 代数类上导出等价对控制维数的影响规律.

定理 4.7[40]　假设 A 和 B 都是 Morita 代数,

$$F : \mathscr{D}^b(A) \to \mathscr{D}^b(B)$$

是一个三角等价, 它对应的倾斜复形的非零项个数是 n, 则

$$|\mathrm{dom.dim}(A) - \mathrm{dom.dim}(B)| \leqslant n - 1.$$

事实上, 文献[40]讨论的特殊代数类要比 Morita 代数类广泛一些. 命题 4.4 的第二个结论是定理 4.7 的一个特殊情况.

有例子表明, 倾斜模自同态代数的控制维数不能用倾斜模的投射维数来界定. 究竟它们应该是怎样的关系, 依然是一个有待进一步考虑的问题.

5　Nakayama 猜想与其他同调猜想的联系

1) Nakayama 猜想的一些进展: 对广义单列代数(generalized uniserial algebra)的生成 - 余生成子的自同态代数, Tachikawa[3] 证明了 Nakayama 猜想成立.

2) 有限维数猜想, 见文献[43]中的猜想(11): 给了一个有限维代数 A, 定义 A 的有限维数为

$$\mathrm{fin.dim}(A) = \sup\{\mathrm{pd}(M) \mid M \in A\text{-}\mathrm{mod}, \mathrm{pd}_A(M) < \infty\}.$$

有限维数猜想指 $\mathrm{fin.dim}(A) < \infty$, 这个猜想也是至今悬而未解. 它与 Nakayama 猜想的关系是: 如果 $\mathrm{fin.dim}(A) < \infty$, 则 Nakayama 猜想对 A 成立. 因为如果

$$0 \to {}_AA \xrightarrow{d_0} I_0 \xrightarrow{d_1} I_1 \to \cdots$$

是 A 的一个极小内射分解, 且所有 I_j 都是投射模, 那么每个 d_i 的余核(Cokernel)如果不是投射模, 那它就是一个投射维数为 $i+1$ 的模. 由于

fin. dim(A) $<\infty$,所以必有一个 n 使得 d_n 的余核是投射模. 这样,整个正合列

$$0 \to {}_AA \to I_0 \to I_1 \to \cdots \to \mathrm{Coker}(d_n) \to 0$$

就可裂,从而 A 是自入射代数.

所以,对有限维数有限的代数,Nakayama 猜想成立. 关于有限维数猜想的一些进展见文献[44].

3) Tachikawa 在文献[45]的第八章中还提出了与 Nakayama 猜想相关的一些猜想:

(a) 域 k 上的代数 A 如果满足

$$\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A \otimes_k A) = 0,$$

对所有的 $i \geqslant 1$ 都成立,则 A 必是自入射代数;

(b) 设 A 是域 k 上的自入射代数,如果 ${}_AM$ 是一个满足条件 $\mathrm{Ext}^i_A(M,M) = 0$ 对所有的 $i \geqslant 1$ 都成立的模,则 M 是投射 A -模.

猜想(b)成立的情况在文献[45]中对 p -群代数做了验证. 这个猜想与下面的广义 Nakayama 猜想有关系.

4) 广义 Nakayama 猜想(generalized Nakayama conjecture)是 Auslander[46] 在 1975 年研究 Nakayama 猜想时提出的一个猜想. 如果

$$0 \to {}_AA \to I_0 \to I_1 \to \cdots$$

是代数 A 的极小内射分解,则每个不可分解内射模都是某个 I_j 的直和项. 等价地说,如果 M 是满足 $\mathrm{add}({}_AA) \subseteq \mathrm{add}(M)$ 和 $\mathrm{Ext}^i_A(M,M) = 0$ 对所有 $i \geqslant 1$ 成立的 A -模,那么 M 是投射模.

5) Colby 等 1990 年在文献[47]中提出一个强 Nakayama 猜想(strong Nakayama conjecture):如果 M 是一个非零的 A -模,则存在一个自然数 $n \geqslant 0$ 使得 $\mathrm{Ext}^n_A(M,A) \neq 0$.

关于这些猜想之间的蕴含关系,Yamagata 在文献[48]中有详细的叙述. 例如,任何一个猜想对代数 A 成立都意味着 Nakayama 猜想对代数 A 也成立,建议读者参看 Yamagata 的原文. 这些猜想都没有完全解决,依然是公开问题. 对特殊情况,已有一些验证. 限于篇幅和本文的主题,在这里对它们不做介绍.

6 一些公开问题

1) 设两个有限维代数 A 和 B 是导出等价的. 如果 A 是 Morita 代数且 dom. dim(B) $\geqslant 2$,那么 B 也是 Morita 代数吗?

2) 若两个有限维代数 A 和 B 是导出等价的,是否有 A 的控制维数是无限的,当且仅当 B 的控制维数是无限的?

3) 在什么条件下,导出等价的两个代数 A 和 B 有相同的控制维数?

4) 对导出等价下的一个代数等价类,是否存在控制维数的一个上界函数? 如果有,是否有一个估算公式?

致谢 本文的最后一稿是在 2017 年 7—8 月参加南方科技大学代数专题暑期学校期间完成的,对北京大学的张继平教授、南方科技大学的李才恒教授在暑期学校期间给予的帮助和支持,在此表示衷心地感谢. 在此也感谢北京师范大学的刘玉明老师阅读初稿,并提出一些修改意见.

参考文献

[1] NAKAYAMA T. On algebras with complete homology[J]. Abh Math Sem Univ Hamburg,1958,22(1):300 - 307.

[2] TACHIKAWA H. A characterization of QF - 3 algebras[J]. Proc Am Math Soc,1962,13(5):701 - 703.

[3] TACHIKAWA H. On dominant dimension of QF - 3 algebras[J]. Trans Am Math Soc,1964,112(2):249 - 266.

[4] MÜLLER B J. The classification of algebras by dominant dimension[J]. Can J Math,1968,20(9):398 - 409.

[5] AUSLANDER M, REITEN I, SMALØ S O. Representation Theory of Artin Algebras[M]. Cambridge:Cambridge Studies in Advanced Mathematics,1995.

[6] WILSON G V. The Cartan map on categories of graded modules[J]. J Algebra,1983,85(2):390 - 398.

[7] FULLER K R, ZIMMERMANN - HUISGEN B. On the generalized Nakayama conjecture and the Cartan determinant problem[J]. Trans Am Math Soc,1986,294(2):679 - 691.

[8] MÜLLER B J. On algebras of dominant dimension one[J]. Nagoya Math J,1968,31(31):173 - 183.

[9] MÜLLER B J. Dominant dimension of semi - primary rings[J]. J Reine Angew Math,1968,1968(232):173 - 179.

[10] HOSHINO M. On dominant dimension of noetherian rings[J]. Osaka J Math,1989,26(2):275 -280.

[11] COLBY R R. Tilting modules, dominant dimension and exactness of duality functors[J]. Tsukuba J Math,1988,12:441 -449.

[12] AUSLANDER M. Representation Dimension of Artin Algebras[M]. Providence:Am Math Soc,1999:505 -574.

[13] IYAMA O, OPPERMANN S. n - representation - finite algebras and n - APR tilting[J]. Trans Am Math Soc,2011,363(12): 6575 -6614.

[14] MARTINEZ - VILLA R. Algebras of inifinite dominant dimension[J]. Tsukuba J Math,1994,18(1):9 -20.

[15] MARTINEZ - VILLA R. Inifinite dominant dimension and torsion theories[J]. Commun Algebra,1994,22(11):4519 -4535.

[16] GÓMEZ - TORRECILLAS J, TORRECILLAS B. FTF rings and frobenius extensions[J]. J Algebra,2002,248(1):1 - 14.

[17] GREEN J A. Polynomial Representations of GL_n[M]. 2nd ed. Berlin:Springer - Verlag,2007:161.

[18] FANG M, KOENIG S. Schur functors and dominant dimension[J]. Trans Amer Math Soc,2011,363(3):1555 -1576.

[19] HEMMER D J, NAKANO D K. Specht filtration for Hecke algebras of type A[J]. J London Math Soc,2004,69(3):623 -638.

[20] KLESHCHEV A S, NAKANO D K. On comparing the cohomology of general linear and symmetric groups[J]. Pacific J Math, 2001,201(2):339 -355.

[21] KOENIG S, SLUNGARD I H, XI C C. Double centralizer properties, dominant dimension, and tilting modulese[J]. J Algebra, 2001,240(1):393 -412.

[22] MORITA K. Duality of modules and its applications to the theory of rings with minimum condition[J]. Sci Rep Tokyo Kyoiku Daigaku,1958,A6:85 -142.

[23] BROUÉ M. Equivalences of Blocks of Group Algebras[M]// Dlab V, Scott LL. Finite Dimensional Algebras and Related Topics. Netherlands:Springer - Verlag,1994,424:1 -26.

[24] RICKARD J. Derived categories and stable equivalence[J]. J Pure Appl Algebra,1989,61(3):303 -317.

[25] LINCKELMANN M. Stable equivalences of Morita type for self - injective algebras and p - groups[J]. Math Z,1996,223(1): 87 -100.

[26] LIU Y M, XI C C. Constructions of stable equivalences of Morita type for finite dimensional algebras III[J]. J London Math Soc,2007,76(1):567 -585.

[27] XI C C. Stable equivalences of adjoint type[J]. Forum Math,2008,20(1):81 -97.

[28] DUGAS A, MARTINEZ - VILLA R. A note on stable equivalences of Morita type[J]. J Pure Appl Algebra,2007,208(2):421 -433.

[29] HU W, XI C C. Derived equivalences and stable equivalences of Morita type I[J]. Nagoya Math J,2010,200(200):107 -152.

[30] LIU Y M, ZHOU G D, ZIMMERMANN A. Two questions on stable equivalences of Morita type[OL]. arXiv:1409. 1821,2014.

[31] GELFAND S I, MANIN Y I. Methods of Homological Algebra[M]. Berlin:Springer - Verlag,1996:372.

[32] VERDIER J L. Catégories Dérivées, Etat O[M]. Berlin:Springer - Verlag,1977:262 -311.

[33] HAPPEL D. On the derived category of a finite - dimensional algebra[J]. Comment Math Helv,1987,62(3):339 -389.

[34] HAPPEL D. Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1988.

[35] CLINE E, PARSHALL B, SCOTT L. Derived categories and Morita theory[J]. J Algebra,1986,104(2):397 -409.

[36] RICKARD J. Morita theory for derived categories[J]. J London Math Soc,1989,s2 -39(3):436 -456.

[37] KELLER B. On differential graded categories[C]// International Congress of Mathematicians. Vol II, Eur Math Soc, Zürich, 2006:151 -190.

[38] HU W, XI C C. Derived equivalences and stable equivalences of Morita type II[OL]. Rev Mat Iberoam, Preprint available at http://math0. bnu. edu. cn/ ~ ccxi/.

[39] CHEN H X, XI C C. Dominant dimensions, derived equivalences and tilting modules[J]. Isreal J Math,2016,215(1):349 -395.

[40] FANG M, HU W, KOENIG S. Derived equivalences, restriction to self - injective subalgebras and invariance of homological dimensions[OL]. arXiv:1607. 03513.

[41] BRENNER S, BUTLER M C R. Generalizations of the Bernstein - Gelfand - Ponomarev reflection functors[C]//Berlin:Lecture Notes in Math,1980:103 -169.

[42] KERNER O, YAMAGATA K. Morita algebras[J]. J Algebra,2013,382(10):185 -202.

[43] BASS H. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings[J]. Trans Am Math Soc,1960,95(3):466 -488.

[44] XI C C. 关于有限维数猜想的一些进展[J]. 数学进展,2007,36(1):13 -17.

[45] TACHIKAWA H. Quasi - Frobenius Algebras[M]. Heidelberg:Springer - Verlag,1971.

[46] AUSLANDER M, REITEN I. On a generalized version of the Nakayama conjecture[J]. Proc Am Math Soc,1975,52(1):69 -74.

[47] COLBY R R, FULLER K R. A note on the Nakayama conjectures[J]. Tsukuba J Math,1990,14:343 -352.

[48] YAMAGATA K. Quasi - Frobenius Algebras[M]//Handbook of Algebra,vol 1. Amsterdam:North - Holland,1996:841 -887.

Dominant Dimensions of Algebras and Modules

XI Changchang[1,2]

(1. *School of Mathematical Sciences*, *Capital Normal University*, *Beijing* 100048;

2. *School of Mathematics and Information Science*, *Henan Normal University*, *Xinxiang* 453007, *Henan*)

Abstract: Homological dimension is one of the important topics in representation theory, homological algebra and related fields. History and some recent advances in studying dominant dimensions of algebras and modules are surveyed. The notion of dominant dimensions is closely related to the long-standing, famous Nakayama conjecture in homological algebra and in representation theory of algebras. A better understanding of dominant dimensions from the view point of derived module categories may lead to a better understanding of the Nakayama conjecture.

Keywords: dominant dimension; projective module; injective resolution; derived equivalence; tilting module; Nakayama conjecture

2010 MSC: 18E30; 16G10; 16S50; 18G15

(编辑 陶志宁)