

Die Vektorraumkategorie zu einem unzerlegbaren projektiven Modul einer Algebra

CHANGCHANG XI

*Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, Postfach 8640, D-4800 Bielefeld 1, Germany*

Communicated by A. Fröhlich

Received August 3, 1989

Es sei k ein Körper, $\mathcal{K}$ eine Krull-Schmidt k -Kategorie und $|\cdot|: \mathcal{K} \rightarrow k\text{-mod}$ ein additiver Funktor, wobei $k\text{-mod}$ die Kategorie aller endlich dimensional k -Vektorräume ist. Das Paar $(\mathcal{K}, |\cdot|)$ heißt eine Vektorraumkategorie. Für eine endlich dimensionale k -Algebra A und einen unzerlegbaren projektiven A -Modul $P(x)$ gibt es in kanonischer Weise eine Vektorraumkategorie $\mathcal{S}_x^A := (\text{add } S_x^A, \text{Hom}_A(P(x), -))$, wobei S_x^A eine Menge von Repräsentanten der Isomorphieklassen aller unzerlegbaren A -Moduln M mit $\text{Hom}_A(P(x), M) \neq 0 = \text{Hom}_A(P(x), \tau M)$ ist. Mit τ bezeichnen wir die Auslander-Reiten Verschiebung. Im Fall, daß A darstellungsgerichtet ist (siehe [Ri1]), haben Ringel und Vossiek in [RV] die Kategorie $\mathcal{S}_x^A$ diskutiert. Sie ist im wesentlichen die Vektorraumkategorie zu einer endlichen Halbordnung vom endlichen Typ. In dieser Arbeit wollen wir die Vektorraumkategorie $\mathcal{S}_x^A$ im allgemeinen untersuchen und Eigenschaften kritischer Vektorraumkategorien studieren, die als Unterkategorien von $\mathcal{S}_x^A$ auftreten. Unser Hauptergebnis, Satz 1.7 im Abschnitt 1, zeigt, daß die Kategorien $\mathcal{S}_x^A$ und $A\text{-mod}$ eine enge Relation besitzen. Als speziellen Fall studieren wir die Kategorie $\mathcal{S}_x^A$, wenn A zahm verkleidet ist. In diesem Fall ergibt der Satz 4.1 interessante Informationen über eine kritische Vektorraumkategorie in $\mathcal{S}_x^A$, die es uns erlauben werden, diese genauer zu untersuchen. Schließlich zeigt der Satz 4.4, daß all Moduln M mit $\text{Hom}_A(P(x), M) \neq 0$ eine Fasersumme über $P(x)$ sind (siehe [D] für Definitionen).

In dieser Arbeit sind alle Moduln endlich dimensionale Linksmoduln. Für nicht erklärte Begriffe verweisen wir auf [Ri1].

1. DIE VEKTORRAUMKATEGORIE $\mathcal{S}_x^A = (\text{add } S_x^A, \text{Hom}_A(P(x), -))$.

Sei A eine endlich dimensionale k -Basisalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und x ein Punkt von A , d.h. x ist ein Punkt des

A zugeordneten Köchers. Mit $P(x)$ sei der unzerlegbare projektive A -Modul zum Punkt x bezeichnet. Wir wollen in dieser Arbeit die Eigenschaften der Kategorie $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A)$ untersuchen.

Wir erinnern an die Definition der Kategorie $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A)$ (siehe [R1]). Sie hat als Objekte die Tripel $V = (V_0, V_\omega, \gamma_V)$, wobei V_0 ein Objekt aus $\text{add } S_x^A$ und V_ω ein Objekt aus $k\text{-mod}$, sowie γ_V ein A -Homomorphismus von $P(x) \otimes_k V_\omega \rightarrow V_0$ ist. Die Morphismen von V nach W sind die Paare $f = (f_0, f_\omega)$ mit $f_0: V_0 \rightarrow W_0$ ein A -Homomorphismus und $f_\omega: V_\omega \rightarrow W_\omega$ eine k -lineare Abbildung, welche die Bedingung $\gamma_W f_0 = (1 \otimes_k f_\omega) \gamma_V$ erfüllen. Für jedes Objekt $V = (V_0, V_\omega, \gamma_V)$ setzen wir $\Sigma V = \text{Kokern}(\gamma_V)$ und für jeden Morphismus $f = (f_0, f_\omega): V \rightarrow W$ definieren wir Σf als den Homomorphismus von ΣV nach ΣW , der durch das folgende kommutative Diagramm eindeutig bestimmt ist:

$$\begin{array}{ccccccc} P(x) \otimes_k V_\omega & \xrightarrow{\gamma_V} & V_0 & \xrightarrow{\pi_V} & \Sigma V & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow 1 \otimes f_\omega & & \downarrow f_0 & & \downarrow \Sigma f & & \\ P(x) \otimes_k W_\omega & \xrightarrow{\gamma_W} & W_0 & \xrightarrow{\pi_W} & \Sigma W & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Offenbar ist $\Sigma: \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A) \rightarrow A\text{-mod}$ ein Funktor.

1.1. LEMMA. (a) Der Funktor Σ ist voll und rechtsexakt.

(b) Sei $0 \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow U \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A)$ und zusätzlich γ_U injektiv, dann ist $0 \rightarrow \Sigma V \rightarrow \Sigma W \rightarrow \Sigma U \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $A\text{-mod}$.

Beweis. [D] und einige einfache Überlegungen. ■

1.2. PROPOSITION. Sei X ein unzerlegbarer A -Modul mit $\text{Hom}_A(P(x), X) \neq 0$, $\text{proj. dim. } X \leq 1$ und zusätzlich $\text{End}_A(P(x)) \cong k$. Falls $X \not\cong P(x)$ ist, gibt es ein unzerlegbares Objekt $V \in \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A)$ mit γ_V injektiv und $\text{proj. dim. } V_0 \leq 1$, so daß $\Sigma V = X$ gilt.

Beweis. Falls $\text{Ext}_A^1(X, P(x)) = 0$ gilt, ist $X \in S_x^A$, denn es gilt $\text{Hom}_A(P(x), \tau X) \cong D \text{Ext}_A^1(X, P(x))$. Setze $V = (X, 0, 0)$, so ist $\Sigma V = X$.

Nun sei $\text{Ext}_A^1(X, P(x)) \neq 0$ und $\dim \text{Ext}_A^1(X, P(x)) = m$. Es existiert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P(x)^m \xrightarrow{\gamma} E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

mit $\delta: \text{Hom}_A(P(x)^m, P(x)) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X, P(x))$ ein surjektiver k -Homomorphismus. Wir werden zeigen, daß E in $\text{add } S_x^A$ liegt.

Man überlegt sich leicht, daß $\text{Hom}_A(P(x), Y) \neq 0$ für jeden unzerlegbaren direkten Summanden Y von E gilt, denn X ist unzerlegbar.

Nun wenden wir $\text{Hom}_A(-, P(x))$ auf die exakte Sequenz an. Dies liefert die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}(X, P(x)) \longrightarrow \text{Hom}(E, P(x)) \\ &\longrightarrow \text{Hom}(P(x)^m, P(x)) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(X, P(x)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist δ surjektiv. Dies impliziert $\text{Ext}_A^1(E, P(x)) = 0$. Wegen $\text{proj. dim. } X \leq 1$ ist auch $\text{proj. dim. } E \leq 1$. Also gilt $\text{Hom}(P(x), \tau E) = 0$. Da $\text{End}_A(P(x)) \cong k$ gilt, können wir annehmen, daß E keinen direkten Summand besitzt, der zu $P(x)$ isomorph ist. Daher gilt $E \in \text{add } S_x^A$. Nun setze $V = (E, k^m, \gamma)$, so hat V die Eigenschaften in der Proposition. ■

1.3. BEZEICHNUNGEN. Es gibt zwei verschiedene volle Einbettungen von $\text{add } S_x^A$ in $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A)$: Sei $X \in S_x^A$. Senden wir X nach $(X, 0, 0)$ in $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A)$, dann erhalten wir auf diese Weise eine volle Einbettung. Im folgenden identifizieren wir X mit $(X, 0, 0)$. Sei $\varepsilon_X: P(x) \otimes_k \text{Hom}_A(P(x), X) \rightarrow X$ die Auswertungsabbildung. Die Zuordnung $X \mapsto \bar{X} = (X, \text{Hom}_A(P(x), X), \varepsilon_X)$ ist eine weitere volle Einbettung von S_x^A in $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A)$. Nun setzen wir

$$\mathcal{U}' := \{V \in \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A) \mid V \text{ unzerlegbar, } V \not\cong \bar{M} \text{ für alle Moduln } M \in S_x^A\}.$$

Es gilt

1.4. LEMMA. Sei $(0, k, 0) \not\cong V$ unzerlegbar in $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A)$. Genau dann ist $V \in \mathcal{U}'$, wenn $(\Sigma V)_x \neq 0$ ist.

Beweis. Ist $V \cong \bar{M}$ für einen Modul M in S_x^A , so ist $(\Sigma V)_x = 0$. Umgekehrt sei $(\Sigma V)_x = 0$ so ist die zu γ_V adjungierte Abbildung $\tilde{\gamma}_V: V_\omega \rightarrow \text{Hom}_A(P(x), V_0)$ surjektiv. Da V unzerlegbar ist, ist $\tilde{\gamma}_V$ auch injektiv, also ist $\tilde{\gamma}_V$ bijektiv. Dies bedeutet $\dim V_\omega = \dim \text{Hom}(P(x), V_0)$ und folglich gibt es zu jedem Homomorphismus $f_0: V_0 \rightarrow V_0$ einen k -Homomorphismus $f_\omega: V_\omega \rightarrow V_\omega$, so daß $\gamma_V f_\omega = (1 \otimes f_\omega) f_V$ gilt. Demnach ist f_0 entweder nilpotent oder invertierbar, denn $\text{End}(V)$ ist ein lokaler Ring und $f = (f_0, f_\omega)$ gehört zu $\text{End}(V)$. Also ist V_0 ein unzerlegbarer A -modul in S_x^A . Identifizieren wir V_ω mit $\text{Hom}(P(x), V_0)$, so gilt $V \cong \bar{V}_0$. ■

1.5. LEMMA. $\Sigma: \mathcal{U}' \rightarrow A\text{-mod}$ erhält Isomorphieklassen.

Beweis. Seien $V, W \in \mathcal{U}'$ mit $\Sigma V \cong \Sigma W$. Dann gibt es einen Homomorphismus $f: \Sigma V \rightarrow \Sigma W$ und einen Homomorphismus $g: \Sigma W \rightarrow \Sigma V$, so daß $fg = 1_{\Sigma V}$ gilt. Da ΣV voll ist, gibt es Morphismen $f': (f_0, f_\omega): V \rightarrow W$ und $g': (g_0, g_\omega): W \rightarrow V$ mit $\Sigma f' = f$, $\Sigma g' = g$ und $\Sigma(f'g') = 1$. Somit ist $f'g'$ ein Endomorphismus von V und nicht nilpotent. Aber $\text{End}(V)$ ist

ein lokaler Ring, also muß $f'g'$ invertierbar sein und V ist demnach ein direkter Summand von W . Also gilt $V \cong W$, denn W ist unzerlegbar. ■

1.6. FOLGERUNG. Σ ist eine Darstellungsäquivalenz von $\mathcal{U}'$ auf sein Bild.
Setze

$$\mathcal{U}_0 := \{V \in \mathcal{U}' \mid \text{proj. dim. } V_0 \leq 1, \gamma_V \text{ ist injektiv}\}$$

$$\mathcal{U}_1 := \{V \in \mathcal{U}' \mid \text{proj. dim. } \Sigma V \geq 2\}$$

$$\mathcal{A}_0 := \{X \in A\text{-mod} \mid X \text{ unzerlegbar, } X \not\cong P(x), \text{proj. dim. } X \leq 1 \text{ und } X_x \neq 0\}.$$

1.7. SATZ. Sei $P(x)$ gerichtet. Dann gilt

- (1) $\mathcal{U}'$ ist die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{U}_0$ und $\mathcal{U}_1$.
- (2) Der Funktor $\Sigma: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0$ ist eine Äquivalenz.

Beweis. (a) Sei $V \in \mathcal{U}_0$, dann ist $\text{proj. dim. } \Sigma V \leq 1$. Dies folgt leicht aus der exakten Sequenz $0 \rightarrow P(x) \otimes_k V_\omega \rightarrow V_0 \rightarrow \Sigma V \rightarrow 0$, denn $\text{proj. dim. } V_0 \leq 1$ ist vorausgesetzt.

$$(a') \quad \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset.$$

(b) Sei $X \in \mathcal{A}_0$. Dann gibt es mittels 1.2 ein Objekt $V \in \mathcal{U}_0$ mit $\Sigma V = X$.

(c) $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$. Sei $V \in \mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}_1$, dann gilt nach Lemma 1.4 auch $\text{Hom}(P(x), \Sigma V) \neq 0$ und $\text{proj. dim. } \Sigma V \leq 1$. Da Σ voll und V unzerlegbar ist, gehört ΣV stets zu $\mathcal{A}_0$. Nach (b) existiert ein Objekt $W \in \mathcal{U}_0$ mit $\Sigma W \cong \Sigma V$. Aus der Folgerung 1.6 erhalten wir dann $V \cong W \in \mathcal{U}_0$.

(d) $\Sigma|_{\mathcal{U}_0}$ ist treu, denn sei $f = (f_0, f_\omega): V \rightarrow W$ mit $\Sigma f = 0$. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P(x) \otimes_k V_\omega & \xrightarrow{\gamma_V} & V_0 & \longrightarrow & \Sigma V \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 \otimes f_\omega & & \downarrow f_0 & & \downarrow \Sigma f \\ 0 & \longrightarrow & P(x) \otimes_k W_\omega & \xrightarrow{\gamma_W} & W_0 & \longrightarrow & \Sigma W \longrightarrow 0 \end{array}$$

Da $\Sigma f = 0$ ist, existiert ein Homomorphismus $f'_0: V_0 \rightarrow P(x) \otimes_k W_\omega$ mit $f'_0 \gamma_W = f_0$.

Aber weil $P(x)$ gerichtet ist, gilt $\text{Hom}(V_0, P(x)) = 0$. Folglich ist $f'_0 = 0$ und auch $f_0 = 0$. Daraus folgt $f = 0$. ■

1.8. *Bemerkung.* Sei $P(x)$ gerichtet, $V \in \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{S}_x^A)$ und $W \in \mathcal{U}_0$.

(1) Sei V unzerlegbar. Falls $\Sigma V = 0$ ist, dann ist entweder $V \cong (0, k, 0)$ oder $V \cong \bar{M}$ für einen Modul $M \in S_x^A$.

(2) Ist $0 \neq f: V \rightarrow W$, so gilt $\Sigma f \neq 0$.

(3) Ist V unzerlegbar mit $\Sigma V \cong \Sigma W$, so ist $V \cong W$.

2. EINE EIGENSCHAFT DER MODULN IN S_x^A

Im folgenden Lemma setzen wir voraus, daß die Algebra A nicht vom darstellungswilden Typ ist. Für die Definition einer wilden Algebra verweisen wir auf [Ri2].

2.1. **LEMMA.** (1) Sei $M \in S_x^A$ mit $\text{End}_A(M) \cong k$. Dann gilt $\dim_k \text{Hom}_A(P(x), M) \leq 2$.

(2) Seien $X, Y \in S_x^A$ mit $\text{End}_A(X) \cong k \cong \text{End}_A(Y)$. Ist $\text{Hom}(P(x), X) = 2$, so gilt $\text{Hom}(X, Y) \neq 0$ oder $\text{Hom}(Y, X) \neq 0$.

Beweis. Wie in [Ri2] können wir mit 1.1 und 1.6 eine analog Argumentation durchführen. ■

3. KRITISCHE MENGEN IN S_x^A

3.1. **DEFINITION** [Ri1]. Sei $(\mathcal{K}, |\cdot|)$ eine kritische Vektorraumkategorie vom Typ $\mathcal{C}(i)$. Der minimale positive Radikalvektor $h^{\mathcal{K}} = (t_1, \dots, t_r, i)$ der quadratischen Form $\chi_{\mathcal{K}}$ ist in der folgenden Tabelle notiert, wobei r die Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte in $\mathcal{K}$ bedeutet. Es gilt $\sum_{j=1}^r t_j = 2i$ für $2 \leq i \leq 6$.

$\mathcal{C}(i)$	$\mathcal{C}(1)$	$\mathcal{C}(2)$	$\mathcal{C}(3)$	$\mathcal{C}(4)$	$\mathcal{C}(5)$	$\mathcal{C}(6)$
$h^{\mathcal{K}}$	$1[1]$	$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$6 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
r	1	4	6	7	8	8

3.2. DEFINITION. Sei K eine Teilmenge von S_x^A , so daß die Vektorraumkategorie $\mathcal{K} := (\text{add } K, \text{Hom}(P(x), -))$ eine Vektorraumkategorie vom Typ $\mathcal{C}(i)$ ist, dann heißt diese Menge K eine kritische Menge in S_x^A vom Typ $\mathcal{C}(i)$.

Sei K eine kritische Menge vom Typ $\mathcal{C}(i)$ in S_x^A . Wir können in der Kategorie $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{K})$ ein unzerlegbares Objekt H so wählen, daß $\text{End}_{\mathcal{K}}(H) = k$, $\text{Ext}_{\mathcal{K}}^1(H, H) \cong k$, und $\tau_{\mathcal{K}} H = H$ gelten, das heißt H ist ein homogenes Objekt in $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{K})$ mit $\underline{\dim}_{\mathcal{K}} H = (i_1, \dots, i_r, i)$ und somit von der Form (H_0, k^i, γ_H) mit $\dim \text{Hom}(P(x), H_0) = 2i$.

Von jetzt an setzen wir zusätzlich voraus, daß $\text{End}_A(P(x)) \cong k$ gilt.

3.3. PROPOSITION. Sei H wie oben gewählt. Dann gilt:

- (1) $\text{End}_A(\Sigma H) \cong k$ und ΣH ist kein gerichteter A -Modul.
- (2) Ist $\text{proj. dim. } \Sigma H \leq 1$ und χ_A semipositiv, so gilt $\underline{\dim} \Sigma H \in \text{rad}_{\chi_A}$, wobei χ_A die zu A gehörige quadratische Form wie in [Ril] ist.
- (3) $i = (\underline{\dim} \Sigma H)_x$.
- (4) $\dim \text{Hom}_A(H_0, H_0) = i^2$.

Beweis. (1) Aus $\dim \text{Hom}(P(x), H_0) = 2i$ und $\text{End}(P(x)) \cong k$ folgt $\Sigma V \neq 0$. Ferner gilt $\text{End}_A(\Sigma V) = k$, denn Σ ist voll und $\text{End}(H) \cong k$. Sei $0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} H \longrightarrow 0$ eine Auslander-Reiten Sequenz, dann ist nach 1.1

$$(*) \quad \Sigma H \rightarrow \Sigma E \rightarrow \Sigma H \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Aber ΣH und ΣE sind unzerlegbar, nicht isomorph und Σg ist surjektiv. Also ist $\Sigma g \neq 0$ und kein Isomorphismus. Dies impliziert $\Sigma f \neq 0$ und wir haben einen Kreis.

(2) Falls $\text{proj. dim. } \Sigma H \leq 1$ ist, ist γ_H nach 1.2 injektiv. Also ist nach 1.1(b) (*) eine kurze exakte Sequenz und $\text{Ext}^1(\Sigma H, \Sigma H) \neq 0$. Da χ_A semipositiv ist, gilt $\chi_A(\underline{\dim} \Sigma H) = 0$, also ist (2) bewiesen.

(3) Folgt aus $\dim \text{Hom}(P(x), H_0) = \dim \text{Hom}(P(x), \Sigma V) + \dim \text{Hom}(P(x), P(x)^i) = (\underline{\dim} \Sigma H)_x - i$.

(4) Aus [Ril, 2 (3) und (3'')] folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \underline{\dim}_{\mathcal{K}} H, \underline{\dim}_{\mathcal{K}} H \rangle = \dim \text{Hom}_{\mathcal{K}}(H, H) - \dim \text{Ext}_{\mathcal{K}}^1(H, H) \\ &= \dim \text{Hom}(H_0, H_0) + i^2 - i \dim \text{Hom}(P(x), H_0) \\ &= \dim \text{Hom}(H_0, H_0) - i^2. \end{aligned}$$

Also gilt $\dim \text{Hom}(H_0, H_0) = i^2$. ■

4. ZAHME VERKLEIDETE ALGEBREN

Nun betrachten wir den speziellen Fall, daß A zahm verkleidet ist, d.h. A ist ein Endomorphismenring eines präprojektiven Kippmoduls über einer zahmen zusammenhängenden erblichen Algebra. In diesem Fall bezeichnen wir mit h^A den minimalen positiven Radikalvektor der zu A gehörigen quadratischen Form χ_A .

4.1. SATZ. Sei $K = \{M_1, \dots, M_r\}$ eine kritische Menge vom Typ $\mathcal{C}(i)$ in S_x^A . Dann gilt

- (1) $i = h_x^A$
- (2) Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow P(x)^{h_x^A} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r M_j^y \rightarrow H_0 \rightarrow 0$$

mit H_0 unzerlegbar und $\underline{\dim} H_0 = h^A$. Dabei ist $(t_1, \dots, t_r)$ wie in 3.1 definiert.

Beweis. Dieser Satz folgt aus 1.2 und 3.3 trivialerweise. ■

4.2. FOLGERUNG. Sei $M_i \in K$ ein gerichteter A -Modul, dann gilt

$$\langle \underline{\dim}_{\mathcal{K}} M_i, h^{\mathcal{K}} \rangle = \langle \underline{\dim} M_i, h^A \rangle.$$

Beweis. Nach 4.1 gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow P(x)^{h_x^A} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r M_j^y \rightarrow H_0 \rightarrow 0$$

mit $\underline{\dim} H_0 = h^A$ und H_0 unzerlegbar. Also gilt

$$\begin{aligned} \langle \underline{\dim}_{\mathcal{K}} M_i, h^{\mathcal{K}} \rangle &:= \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(M_i, H) \\ &= \dim \operatorname{Hom}_A \left(M_i, \bigoplus_{j=1}^r M_j^y \right) = \dim \operatorname{Hom}_A(M_i, H_0) \\ &= \langle \underline{\dim} M_i, \underline{\dim} H_0 \rangle = \langle \dim M_i, h^A \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.3. FOLGERUNG. Seien alle Moduln in K präprojektiv, dann ist $\bigoplus_{j=1}^r M_j$ ein partieller Kippmodul.

Beweis. Da jeder Modul M_j gerichtet ist, gilt $\operatorname{Ext}_A^1(M_i, H_0) = 0$ für alle i . Wende $\operatorname{Hom}(M_j, -)$ auf die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow P(x)^{h_x^A} \rightarrow \bigoplus_{l=1}^r M_l^y \rightarrow H_0 \rightarrow 0$$

in 4.1 an, so liefert dies die obige Behauptung, denn $\text{Ext}_A^1(M_i, P(x)) = 0$ gilt immer. ■

4.4. SATZ. Sei A eine zahme verkleidete Algebra. Ist M ein unzerlegbarer A -Modul mit $M \not\cong P(x)$ und $M_x \neq 0$, so gibt es ein Objekt $V \in \mathcal{U}(\mathcal{S}_x^A)$, so daß $\Sigma V = M$ gilt.

Beweis. Sei M ein unzerlegbarer A -Modul mit $M_x \neq 0$. Aufgrund des Lemma 1.2 können wir annehmen, daß $\text{proj. dim. } M = 2$ gilt. Nach [D, 3.1] existiert für jede Zahl $l \in \mathbb{N}_0$ eine exakte Sequenz

$$P(x)^m \xrightarrow{f} U_0 \oplus U_1 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0.$$

Mit $U_0 \in \text{add } S_x^A$, und die Einschränkungen von g auf die unzerlegbaren Summanden U' von U_1 liegen in $\text{rad}^l(U', M)$. Da A zahm verkleidet ist, können wir auch annehmen, daß $\text{proj. dim. } U_1 \leq 1$ gilt. Es wird beachtet, daß $\text{Hom}(P(x), U') \neq 0$ gilt. Es gibt mittels 1.7 ein Objekt $V = (V_0, V_\omega, \gamma_V) \in \mathcal{U}_0$ mit $\Sigma V = U_1$. Mit π_V bezeichnen wir den kanonischen Homomorphismus von V_0 nach ΣV . Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 P(x) \otimes V_\omega & & & & & & \\
 \downarrow & \searrow & & & & & \\
 B & \xrightarrow{\gamma'} & P(x) \otimes V_\omega & \xrightarrow{\delta} & P(x) \otimes V_\omega & \xrightarrow{(0, \gamma_V)} & 0 \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
 P(x)^m & \xrightarrow{f_1} & \text{Kern}(\alpha g) & \xrightarrow{\gamma} & U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{\alpha g} & M \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \beta & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_V \end{bmatrix} = \alpha & & \parallel \\
 0 & \xrightarrow{f_2} & \text{Bild}(f) & \xrightarrow{f_2} & U_0 \oplus U_1 & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

wobei $f = f_1 f_2$ die kanonische Zerlegung von f und B das Pullback von f_1 und β ist. Es ist trivial, daß β und γ' surjektiv sind. Wegen der Projektivität von $P(x)$ gilt $B \cong P(x)^{m'}$ mit $m' = m + \dim V_\omega$. Setzen wir $V = (U_0 \oplus V_0, k^{m'}, \gamma' \gamma)$, so ist $\Sigma V = M$. ■

Die weitere Diskussion über die kritische Menge zu einem Punkt einer zahmen verkleideten Algebra wird in einer anderen Arbeit durchgeführt.

Diese Arbeit ist ein Teil meiner Dissertation unter Betreuung von C. M. Ringel, dem ich hier besonders danken möchte. Herzlich danke ich P. Dräxler für seine Hilfe bei der deutschen Formulierung dieser Arbeit.

LITERATUR

- [D] P. DRÄXLER, $\mathcal{U}$ -Fasersummen in darstellungsendlichen Algebren, *J. Algebra* **113** (1988), 430–437.
- [Ri1] C. M. RINGEL, "Tame Algebras and Integral Quadratic Forms," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1099, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1984.
- [Ri2] C. M. RINGEL, Tame algebras, in "Lecture Notes in Mathematics," Vol. 831, pp. 137–287, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1979.
- [RV] C. M. RINGEL AND D. VOSSIECK, Hammocks, *Proc. London Math. Soc. (3)* **54** (1987), 216–246.