第39卷第3期 数 学 进 展 Vol.39, No.3
2010年6月 ADVANCES IN MATHEMATICS June, 2010

胞腔代数和仿射胞腔代数简介

惠昌常

(北京师范大学数学科学学院，教育部数学与复杂性实验室，北京， 100875)

摘要： 表示论中一个最基本的问题是确定不可约表示的参数集，这个问题至今没有完全解决. 对于 Graham 和 Lehrer 引入的有限维胞腔代数，这个问题得到了完满解答，并被成功地应用于数学和物理中出现的许多代数. 近来，人们引入仿射胞腔代数，将 Graham 和 Lehrer 有限维胞腔代数的表示理论框架推广到一类无限维代数上. 仿射胞腔代数不仅包括有限维胞腔代数，也包括无限维的仿射 Temperley-Lieb 代数和 Lusztig 的 A- 型仿射 Hecke 代数. 本文将对胞腔代数的发展历史和主要研究成果做一些综述，同时，对新引入的仿射胞腔代数及其最新成果做一点简介.

关键词： 胞腔代数；仿射胞腔代数；仿射 Hecke 代数；同调维数；不可约表示
MR(2000) 主题分类： 20C08; 18G20; 16G10; 16D90 / **中图分类号**： O153.3; O154.2
文献标识码： A **文章编号**： 1000-0917(2010)03-0257-14

1 胞腔代数的定义

在这一节，我们介绍胞腔代数 (cellular algebra) 的两个定义、一些基本性质和简单例子. 我们假定 k 是一个 Noether 整环.

1.1 Graham 和 Lehrer 的定义

1979 年， Kazhdan-Lusztig 在 [24] 中研究 Hecke 代数的表示理论时，引入了 Kazhdan-Lusztig 基，通过这组基，他们确定了不可约表示和一些相关问题. 受到 A- 型 Hecke 代数这组基的乘法性质的启发， 1996 年， Graham 和 Lehrer 引入了胞腔代数的概念 [17]，它是半单代数的形变 (deformation)，并在数学和统计物理的许多分支中大量存在. 胞腔代数为进一步理解许多重要代数类的表示理论提供了一般性框架. 从胞腔代数基底所具有的乘法性质可以看出， Graham 和 Lehrer 的定义，充分体现了代数的一些组合性质.

定义 1.1[17] 设 A 是一个有单位元的 k- 代数， $i: A \longrightarrow A$ 是 A 上的 k- 对合 (即 i 是 k- 线性的，且是阶为 2 的反自同构). 我们称 A 为胞腔代数，如果它满足下面的条件：

(1) 存在一个偏序集 Λ, 使得对每个 $\lambda \in \Lambda$ 都有一个指标集 $M(\lambda)$, 以及存在 A 的一组 k- 基底 $\{C^{\lambda}_{S,T} \mid \lambda \in \Lambda; S,T \in M(\lambda)\}$;

(2) 对任意的 $\lambda \in \Lambda$, $S,T \in M(\lambda)$ 有 $i(C^{\lambda}_{S,T}) = C^{\lambda}_{T,S}$;

(3) 对任意的 $a \in A$ 和 $C^{\lambda}_{S,T}$, 有 $aC^{\lambda}_{S,T} = \sum_{U\in M(\lambda)} r_a(S,U)C^{\lambda}_{U,T} + a'$, 其中 $r_a(S,U) \in k$ 不依赖于 T; $a' \in A^{<\lambda}$, 这里 $A^{<\lambda}$ 是由上标 μ 严格小于 λ 的所有元素 $C^{\mu}_{U,V}$ 生成的 k- 模.

根据这个定义，容易看出， k 上的 $n\times n$ 全阵代数是一个胞腔代数：其中对合为矩阵的转置，偏序集 Λ 由一个元素组成，我们将其省略，相应的指标集为 $\{1,2,\cdots,n\}$, k- 基底就取通常的矩阵单位 E_{ij}, 即令 $C_{ij} = E_{ij}$.

收稿日期： 2009-06-01.
基金项目： 国家自然科学基金 (No. 10871027).
E-mail: xicc@bnu.edu.cn

胞腔代数另一个显然的例子, 就是 k 上的一元多项式环 $k[X]$, 这里我们取对合为恒等映射, $\Lambda = \{0,1,2,\cdots\}$, $M(i) = \{1\}$ 是由一个元素组成的集合, 令 $C_{11}^{i} = X^{i}$. 注意, 这里的序关系是: $n+1 < n$.

我们将在以后的章节中列出更多的例子. 上面的定义建立在基底的基础上, 下面给出胞腔代数的另一个不依赖基底的定义, 它体现了代数结构方面的一些性质.

1.2 König 和 Xi 的定义

为了研究和理解胞腔代数的结构和同调性质, 我们也需要胞腔代数结构性的定义 [25].

首先, 回忆域 k 上拟遗传代数的定义. 这类代数是 Cline, Parshall 和 Scott 在研究李代数和代数群表示中的最高权模范畴时引入的, 他们用这类代数的模范畴刻画最高权范畴和 Lusztig 猜想 [7].

定义 1.2[17] 设 A 是域 k 上一个有单位元的有限维 k- 代数, J 是 A 的一个理想. 如果 $J^2 = J$, ${}_AJ$ 是投射模, 且 J 的自同态代数 $\mathrm{End}_A(J)$ 是半单的, 则称 J 是 A 的一个遗传理想 (heredity ideal). 代数 A 称为拟遗传的 (quasi-hereditary), 如果存在 A 的一个理想链 $J_0 = 0 \subsetneq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n = A$ 使得对任意的 j, J_j/J_{i-1} 是 A/J_{i-1} 的遗传理想. 这时, 称这个理想链为 A 的一个遗传链.

拟遗传代数的整体维数是有限的, 它的模范畴的导出范畴可以分层化 (stratification), 它的 Δ- 好模范畴有 AR- 序列和特征模等一系列好的结构和同调性质. 拟遗传代数的进一步推广是标准析层代数 (standardly stratified algebras). 关于拟遗传代数建议读者参看文献 [10, 11, 40]. 下面引入胞腔理想的定义.

定义 1.3[25] 设 A 是一个有单位元的 k- 代数, 这里 k 是一个 Noether 整环, 设 $i: A \longrightarrow A$ 是 A 上的 k- 对合, J 是 A 的一个理想. 我们说 J 是一个胞腔理想, 如果它满足

(1) $i(J) = J$, 即对任意的 $a \in J$ 都有 $i(a) \in J$.

(2) 存在 A 的一个左理想 Δ, 它是有限秩的自由 k- 模, 以及一个 A-A- 双模同构 $\alpha: J \longrightarrow \Delta \otimes_k i(\Delta)$, 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\alpha} & \Delta \otimes_k i(\Delta) \\ i\big\downarrow & & \big\downarrow \; x \otimes y \mapsto i(y) \otimes i(x) \\ J & \xrightarrow{\alpha} & \Delta \otimes_k i(\Delta). \end{array}$$

利用胞腔理想, 我们来给出胞腔代数的另一个定义.

定义 1.4[25] 一个带有 k- 对合的 k- 代数 A 称为胞腔代数, 如果存在 A 的一个 k- 模分解 $A = J_1' \oplus J_2' \oplus \cdots \oplus J_n'$ (有限直和) 满足

(1) 对任意的 j 有 $i(J_j') = J_j'$;

(2) 令 $J_j = \oplus_{l=1}^{j} J_l'$, 则 $0 = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset J_n = A$ 是 A 的一个理想链, 使得对每个 j $(j = 1,2,\cdots,n)$, $J_j' = J_j/J_{j-1}$ 是商代数 A/J_{j-1} 的一个胞腔理想 (其中 A/J_{j-1} 上的 k- 对合是指由 i 诱导的对合). 这时, 称这个理想链为 A 的一个胞腔链.

关于这两种定义, 我们在 [25] 中证明了, 它们是等价的. 这样, 在研究胞腔代数时, 我们就可以根据问题的需要, 使用任何一个定义. 胞腔理想是胞腔代数的基本构件, 如何证明有 n^2 个基底元素组成的 k- 空间是胞腔理想; 文 [28] 给出了一种简单的矩阵判别办法.

关于胞腔理想, 有下面的命题, 它将胞腔理想分为两类 [25].

命题 1.5 设 A 是一个有单位元的 k- 代数，其中 k 是一个域； $i: A \longrightarrow A$ 是 A 上的 k-对合， J 是 A 的一个胞腔理想. 则

(1) $J^2 = 0$, 或 $J^2 = J$ 且是由一个本原幂等元生成的遗传理想.

(2) 如果 $J \neq 0$, 则 $J \otimes_A J \neq 0$.

最后，我们指出一些常见的例子，后面还会进一步给出一些典型的例子.

(1) 域 k 上的对称群代数是胞腔代数，这里对合是群元素的逆定义的，偏序集由分划以及分划的支配序 (dominant order) 给出. 更一般地， A- 型 Hecke 代数是胞腔代数. 最近， Geck 在 [14] 中证明了有限型的 Hecke 代数都是胞腔的. 由于非半单的群代数的整体维数是无限的，所以胞腔代数类和拟遗传代数类是互不包含的两个代数类.

(2) 直向代数的对偶扩张是拟遗传的胞腔代数 [52].

(3) Temperley-Lieb 代数是拟遗传的胞腔代数 [17].

(4) q-Schur 代数是拟遗传的胞腔代数.

2 胞腔代数的结构

构成胞腔代数的要件是胞腔理想，因此，先来分析胞腔理想的结构. 设 $J = \Delta \otimes_k i(\Delta)$, 令 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是 Δ 的一组 k- 基，则 $C_{ij} = v_i \otimes v_j$ 构成 J 的一组基. 根据胞腔理想的定义，或胞腔基的性质，有 $(v_i \otimes v_j)(v_p \otimes v_q) = \phi(v_j, v_p)(v_i \otimes v_q)$, 其中 $\phi(v_j, v_p)$ 是 k 中的一个元素. 令 Φ 是由 $\phi(v_i, v_j)$ 组成的矩阵. 于是， J 中元素可以看作 k 上的 $n \times n$ 矩阵， J 的乘法可写作：

$$X \cdot Y = X \Phi Y, \quad X, Y \in J,$$

其中等式右边的乘法是通常的矩阵乘法.

上面的这种代数叫做广义矩阵代数 [1]. 我们可在任意的环 R 上定义：假设 R 是一个环， $M_n(R)$ 表示 R 上 $n \times n$ 矩阵环， $\Phi \in M_n(R)$, 我们用 $(M_n(R), \Phi)$ 表示由 Φ 定义的广义矩阵环. 在第 6 节中，我们将看到，广义矩阵代数实际上是一种特殊的 swich 代数.

这样，一个胞腔代数实际上是由一些广义矩阵代数作为构造元件而扩张得到的. 关于这一点，文 [26] 中有更为详细的刻画，在此仅做一点简单介绍. 假定 k 是一个域.

设 B 是一个 k- 代数， V 是一个有限维 k- 空间，以及 $\phi: V \otimes_k V \longrightarrow B$ 是一个双线性 k-映射. 我们定义一个结合代数 $A = \mathcal{A}(B, V, \phi)$: 作为 k- 空间， $A = V \otimes_k B \otimes_k V$, 其乘法为

$$(u \otimes b \otimes v)(u' \otimes b' \otimes v') = u \otimes (b\phi(v, u')b' \otimes v',$$

这里 $u, v, u', v' \in V; b, b' \in B$. 可以验证， $\mathcal{A}(B, V, \phi) \simeq (M_n(B), \Phi)$.

如果 B 有一个对合 i, 且 ϕ 满足 $\phi(u, v) = i\phi(v, u)$, 那么我们可在 A 上定义一个对合 $j: A \longrightarrow A$, $j(u \otimes b \otimes v) = v \otimes i(b) \otimes u$. 代数 A 称为 B 关于向量空间 V 的膨胀.

设 B 是一个 k- 代数 (不必有单位元), C 是一个有单位元的代数. 作为向量空间，令 $A = B \oplus C$, 在 A 上定义一个乘法使得 B 是 A 的一个理想且 $A/B \simeq C$:

$$(b_1 + c_1)(b_2 + c_2) = b_1 b_2 + \beta(b_1, c_2) + \gamma(c_1, b_2) + \delta(c_1, c_2) + c_1 c_2, \quad b_1, b_2 \in B; c_1, c_2 \in C,$$

其中 $\beta: B \otimes_k C \longrightarrow B$, $\gamma: C \otimes_k C \longrightarrow B$ 和 $\delta: C \otimes C \longrightarrow B$ 是能使 A 成为一个结合代数的 k-双线性映射. 如果令 $B = V \otimes k \otimes V$, 并给 β, γ, δ 附加一些条件，使得 B 成为 A 的一个理想且 A 含有单位元，这时称 A 是 B 的膨胀 (详细讨论见 [26]). 当然，这个过程可以重复使用，这样就得到重复膨胀这个概念. 胞腔代数的结构可以用膨胀来刻画.

定理 2.1[26] 域 k 上的有限维胞腔代数是 k 的有限次重复膨胀. 反过来, k 的 n 次重复膨胀是一个胞腔链长为 n 的胞腔代数.

利用胞腔代数的结构特点，我们可以构造一些胞腔代数. 在 [54] 中，我们证明了胞腔代数的平凡扩张仍是胞腔代数，因此，任何一个胞腔代数都是对称胞腔代数的商代数. 另外，胞腔代数的不可分解投射模似乎也很特别. 例如，胞腔代数如果是自入射的，则它必是弱对称的，即对任意的不可分解投射模，它的 top 和 socle 是同构的单模 [27]. 与拟遗传代数相比较，胞腔结构不是 Morita 等价的不变量 [26], 极大胞腔链的长度也不必相等 [28].

3 胞腔代数的表示理论

在这一节， A 表示域 k 上的有限维代数，它的有限生成左模范畴记作 A-mod . 我们主要介绍有限维胞腔代数的不可约表示参数化问题是如何归结为线性代数问题的，这是胞腔代数表示理论的一个亮点. 我们总假定 A 关于对合 i 是域 k 上的一个胞腔代数， $(\Lambda, \leq)$ 和 $M(\lambda)$ 分别是它的偏序集和指标集， $\{C_{S,T}^{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda, S, T \in M(\lambda)\}$ 是 A 的一组胞腔基. 我们称 (i, Λ, M, C) 为 A 的一个胞腔系统 (cell datum).

设 $\lambda \in \Lambda$, 在 [17] 中， Graham 和 Lehrer 定义了一个胞腔模 $W(\lambda)$: 它的 k- 基为 $\{C_S^{\lambda} \mid S \in M(\lambda)\}$, A- 模结构定义为 $aC_S^{\lambda} = \sum_{T \in M(\lambda)} r_a(S,T) C_T^{\lambda}$, 这里的系数 $r_a(S,T)$ 由定义 1.1(3) 给出. 在胞腔模 $W(\lambda)$ 上定义一个双线性型

$$\phi_{\lambda} : W(\lambda) \otimes_k W(\lambda) \longrightarrow k, \quad \phi_{\lambda}(C_S, C_T) = \phi_{\lambda}(S,T),$$

其中 $\phi_{\lambda}(S,T)$ 由下列等式确定: $C_{S,S}^{\lambda} C_{T,T}^{\lambda} \equiv \phi_{\lambda}(S,T) C_{S,T}^{\lambda} \pmod{A^{<\lambda}}$. 这个双线性型是对称的，且对任意的 $a \in A, w, v \in W(\lambda)$ 有 $\phi_{\lambda}(aw, v) = \phi_{\lambda}(w, i(a)v)$. 利用这个线性型， Graham 和 Lehrer 刻画了不可约表示的参数集. 令 rad(λ)= $\{v \in W(\lambda) \mid \phi_{\lambda}(v,w) = 0, w \in W(\lambda)\}$, 即 rad$(\lambda)$ 是 ϕ_{λ} 的根空间 (null space), 则 rad(λ) 是 $W(\lambda)$ 的子模，记 $W(\lambda)/\text{rad}(\lambda)$ 为 $L(\lambda)$. 令 $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda \mid \phi_{\lambda} \neq 0\}$.

定理 3.1[17] 如果 A 是域 k 上胞腔系统为 (i, Λ, M, C) 的有限维胞腔代数，则

(1) 当 $L(\lambda) \neq 0$ 时， $L(\lambda)$ 是 A 的一个单模. 反过来， A 的任何一个单模都同构于一个 $L(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$. 对任意的 $\lambda, \mu \in \Lambda_0$, $L(\lambda) \simeq L(\mu)$ 当且仅当 $\lambda = \mu$. 于是， A 的单模的同构类的集合与 Λ_0 一一对应.

(2) A 是半单的充要条件是每个 ϕ_{λ} 都是非退化的 (即 rad$(\lambda) = 0$), 也等价于每个胞腔模都是单的且两两互不同构.

(3) 对任意的本原幂等元 $e \in A$ 都有 $Ae \simeq Ai(e)$, 且 Ae 有胞腔模的滤链 (filtrated by cell modules).

由上面的定理可知，单模的参数集由局部定义的双线性型 ϕ_{λ} 决定，这样，单模参数集问题就归结为一些线性代数问题.

注意，当 A 是无限维时，定理 3.1(1) 不成立，如代数闭域 k 上的一元多项式代数 $k[x]$, 它有胞腔基 $\{C_{11}^{i} = x^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, 且有无限多个互不同构的单模，但定理 3.1(1) 只能给出一个单模 k.

现在，我们回忆 Cartan 矩阵的定义. 一个 Artin 代数 A 只有有限多个互不同构的单模，记作 $L(1), L(2), \cdots, L(n)$, 设 $L(i)$ 的投射覆盖为 $P(i)$, 令 $c_{ij} = [P(i) : L(j)]$ 表示单模 $L(j)$ 作为组合因子在 $P(i)$ 中出现的重数，称矩阵 $C = (c_{ij})$ 为代数 A 的 Cartan 矩阵，这个矩阵的行列式称为 Cartan 行列式. 假定 A 是胞腔代数. 设 $\lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda_0$, 令 $d_{\lambda\mu}$ 表示单模 $L(\mu)$ 在 $W(\lambda)$

中出现的重数，我们称 $D=(d_{\lambda\mu})$ 为胞腔代数 A 的分解矩阵，这是一个 $|\Lambda|\times|\Lambda_0|$ 矩阵. 胞腔代数的 Cartan 矩阵具有如下一些特殊的性质 [17, 29]:

命题 3.2 设 A 是域 k 上的有限维胞腔代数， C 为 A 的 Cartan 矩阵. 则

(1) $C=D'D$, 其中 D' 表示 D 的转置矩阵，从而 C 是对称矩阵.

(2) 若 $\mu\in\Lambda_0$, 则 $d_{\mu\mu}=1$; 若 $\lambda\not\leq\mu$, 则 $d_{\lambda\mu}=0$.

(3) C 是正定的，从而 C 的行列式是一个非零自然数.

关于胞腔代数的半正规型和 Gram 矩阵的行列式，文 [38] 做了一些讨论. 确定胞腔代数每个双线性型的 Gram 矩阵及其秩、行列式等都是有趣而没有完全解决的问题.

4 胞腔代数的同调性质

胞腔代数不仅能用线性代数的方法刻画其不可约表示和相关问题，而且在同调方面也具有令人惊讶的特点. 下面我们将做一点简单介绍.

定理 4.1[29] 设 A 是域 k 上的一个有限维胞腔代数. 下面的条件等价:

(1) A 是拟遗传的;

(2) A 的整体维数有限;

(3) 存在 A 的一个胞腔链，它是遗传链;

(4) A 的每一个胞腔链都是遗传链;

(5) A 的 Cartan 行列式等于 1.

胞腔代数的 Cartan 行列式的值可以取任意的正整数，上面的定理说明，当取最小值时，胞腔代数是拟遗传的. 另外，在 [49] 中，我们还证明了，胞腔代数的拟遗传性，也可用胞腔模的上同调加以刻画.

定理 4.2[49] 设一个胞腔代数 A 的胞腔模为 $\Delta(\lambda),\lambda\in\Lambda$, 则下面的条件等价:

(1) A 是拟遗传的;

(2) 对任意的 $\lambda,\mu\in\Lambda$, $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(\lambda),\Delta(\mu))=0$;

(3) 对任意的 $\lambda,\mu\in\Lambda$, $\mathrm{Ext}^2_A(\Delta(\lambda),\Delta(\mu))=0$.

定理 4.2(3) 形式上正好是 Soegel 给出的拟遗传代数的刻画 [11]. 但是，由于胞腔模的个数一般说来要多于单模的个数，因此，由 (3) 推得 (1) 不是平凡的. 出人意料的是，胞腔代数的一阶上同调也能刻画拟遗传性. 整体维数有限的一个特例是整体维数为 0, 即代数是半单的. 对此，我们在 [54] 中给出了胞腔代数半单性的一个数值刻画，即一个胞腔代数是半单的充要条件是它的 Cartan 行列式是 1 且 Cartan 矩阵的特征值都是有理数. 值得注意的是，存在非半单的拟遗传代数满足这两个条件. 这里一个自然的问题是， Cartan 矩阵的特征值都是整数的胞腔代数有没有更特殊的性质？关于这个问题，在 [33] 中，我们确定了 Cartan 矩阵具有一类特殊谱的不可分解胞腔代数的单模个数的集合，其证明方法使用了初等数论. 这个问题的一般结论还没有得到，仍值得进一步探讨. 关于定理 4.2 的结论 (3), 文献 [6] 中有进一步的推广. 关于如何构造文 [33] 中所述的一类不可分解胞腔代数，文献 [45] 做了一些讨论. 关于一些 BGG 类拟遗传的胞腔代数的构造方法，读者可见 [9, 31, 53]. 更一般地，如何用箭图和关系构造胞腔代数，也是目前未解决的问题.

利用代数链和 recollement 研究半单性，文 [8] 给出了一套公理化的处理方法，将半单性的讨论归纳为初始代数的胞腔模的 Hom 集的计算. 对于 Brauer 代数和其他代数类的半单性讨论可见 [30, 41, 43] 等文章. 关于一般胞腔代数的中心和根基，李彦博在 [34] 中利用胞腔基，做了

一些初步讨论，给出了中心和根基的部分基底，而将整个中心和根基利用胞腔基加以刻画，仍是一个公开问题.

5 Diagram 代数

Diagram 代数是利用图表作为基底定义的一类代数，它往往是那些用生成元和关系所定义的代数的直观的几何实现．我们暂且将它翻译为“图代数”.

5.1 分划代数及其子代数

(1) **分划代数**[37] 设 n 是一个自然数， $M=\{1,2,\cdots,n,1',2',\cdots,n'\}$. 令 E_M 表示 M 上的所有等价关系的集合，或等价地说， E_M 是集合 M 的所有分划的集合：

$$E_M:=\{\rho=\big((M_1)(M_2)\cdots(M_i)\cdots\big)\mid\emptyset\neq M_i\subset M,\cup_iM_i=M,M_i\cap M_j=\emptyset\,(i\neq j)\},$$

其中 M_i 称为分划 ρ 的一个部分. 如果 $\mu\in E_M$ 且 $\nu\in E_N$, 则我们可定义 $\mu\cdot\nu\in E_{M\cup N}$ 是 $E_{M\cup N}$ 中包含 $\mu\cup\nu$ 的最小的等价关系 ρ. 令 $f(\mu,\nu)$ 表示 $\mu\cdot\nu\in E_{M\cup M'}$ 中只含带一瞥的部分的个数. 注意，这里有 $|M\cup M'|=3n$. 于是 $f:E_M\times E_M\longrightarrow\mathbf{Z},(\mu,\nu)\mapsto f(\mu,\nu)$ 是一个映射. 例如，当 $n=3$ 时，就有 $\big((123)(1'2')(3')\big)\cdot\big((1')(2'3')(1'')(2'')(3'')\big)=\big((123)(1'2'3')(1'')(2'')(3'')\big)$, $f(\mu,\nu)=1$.

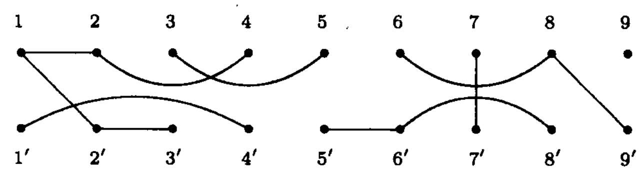
令 $C(\mu,\nu)$ 表示从 $\mu\cdot\nu$ 中删除 $f(\mu,\nu)$ 个仅含数字带一撇的部分，且把带两撇的数换成带一瞥的数后所得到的 M 的一个分划. 于是，就有如下分划代数的定义 [37].

设 k 是一个整环， $q\in k$. 令 $P_n(q)$ 表示以 E_M 为基底的自由 k- 模，在 E_M 上定义乘法：

$$E_M\times E_M\longrightarrow E_M,\quad(\mu,\nu)\longmapsto\mu\nu=q^{f(\mu,\nu)}C(\mu,\nu).$$

这样， E_M 关于这个乘法满足结合律，将这个乘法线性扩展到 $P_n(q)$. 这样， $P_n(q)$ 就是一个有限维的结合代数，称为分划代数. 众所周知，分划代数的基底元素 E_M 可直观地用图 (diagram) 来表示：如 $\rho=(1242'3')(35)(689')(77')(9)(1'4')(5'6'8')$, 可表示为

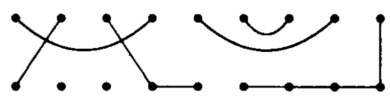
ρ:



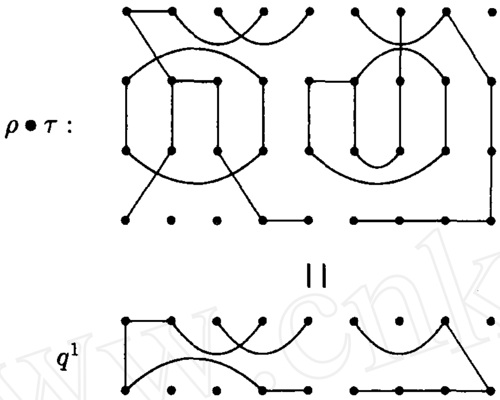
两个基底元素的乘积就是自然地堆叠 (concatenation), 可用图来表示，例如，我们取

$$\tau=(14)(21')(34'5')(58)(67)(96'7'8'9')(2')(3'),$$

τ:



则在 $P_n(q)$ 中， ρ 与 τ 的乘积，可图示为：



在一个分划中，若将数字 a 与 a' 对换，就得到 $P_n(q)$ 上的一个对合．在这里我们总假设 $(a')' = a$ 对任意的 $a \in M$ 成立．在 [50] 中，我们证明了分划代数是胞腔代数．

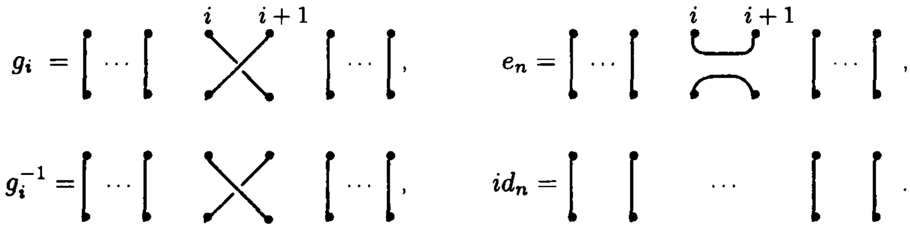
(2) **Brauer 代数**　如果一个分划的每个部分都有且仅有两个元素，就称这个分划是 Brauer 分划或 Brauer 图．令 B_M 表示 Brauer 图的全体．容易看出，在 $P_n(q)$ 中，以 B_M 为基底生成的 k- 空间，是 $P_n(q)$ 的一个子代数，称之为 Brauer 代数 [5], 记作 $B_n(q)$．这是 Brauer 在研究酉群和辛群的表示时引入的一类代数． Graham 和 Lehrer 证明了 Brauer 代数是胞腔代数．关于 Brauer 代数的研究有大量的文献 (例如 [46, 22, 30, 41 等)．

(3) **Temperley-Lieb 代数**　这类代数先是出现在统计物理中 [44], 然后又出现在纽结论和 von Neumann 代数 subfactor 的研究中 [15]．Temperley-Lieb 代数是 Brauer 代数的子代数．如果我们给集合 M 一个线性序： $1 < 2 < \cdots < n < n' < (n-1)' < \cdots < 2' < 1'$, 且令 TL_M 表示 Brauer 分划中那些没有任何两个部分 $i < j$ 和 $k < l$ 满足 $i < k < j < l$ 的 Brauer 分划的全体，则以 TL_M 为基底生成的 k- 空间是 Bauer 代数 $B_n(q)$ 的一个子代数．我们称这个代数为 Temperley-Lieb 代数，记作 $TL_n(q)$, 它是胞腔代数 [17]．

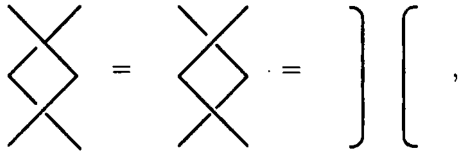
5.2 Hecke 代数和 BWM- 代数

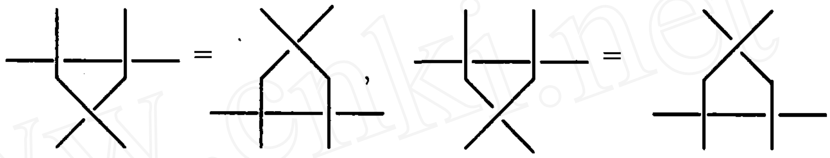
在 §5.1 中介绍的图代数是不区分边在相交时的前后位置的．但在纽结中，这种区分是必要的， Hecke 代数家族中的许多代数就是这样的，在 [17] 中， Graham 和 Lehrer 证明了， Ariki-Koike Hecke 代数是胞腔代数．后来， Geck 证明了任意有限型的 Hecke 代数都是胞腔代数 [14]．在这里我们简介 A- 型 Hecke 代数和 Birman-Wenzl-Murakami 代数 [3], 它们出现在纽结和量子群中 [47]．关于 Hecke 代数的一般定义将在下一节介绍．

设 R 是一个交换环， $q \in R, n \in \mathbb{N}$. 类似 Brauer 代数，我们考虑如下的纽结图：



通过这些纽结图的堆叠,以及使用Reidermeister的(II)和(III)型变换,可生成一个Monoid,记为T_n;其中Reidermeister的(II)和(III)型变换为

(II) 

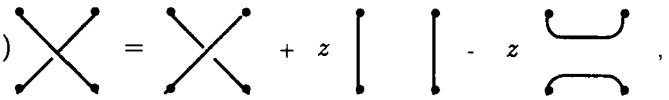
(III) 

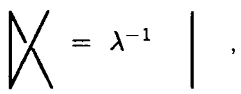
令$H_n(q)$表示生成子为id_n和$\{g_i, g_i^{-1} \mid i = 1, 2, \cdots, n-1\}$,具有如下关系的结合$R$-代数:

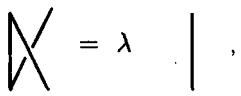
$$g_i - g_i^{-1} = q\, id_n, \quad g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i, \quad |i-j| \geq 2,$$

我们称$H_n(q)$为A-型Hecke代数. 当$q \in R$可逆时, $H_n(q - q^{-1})$是胞腔代数.

为了定义BWM-代数,我们引入环$K = \mathbb{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, z, \delta]/(\lambda^{-1} - \lambda - z(\delta - 1))$. 令$\mathrm{BWM}_n(\lambda, z, \delta)$表示环$K$上$T_n$的monoid代数模掉如下的关系:

(Q1) 

(Q2) 

(Q3) 

(Q4) $\bigcirc \cup T = \delta\, \mathrm{T}$, 其中$T$是$T_n$的元素.

我们称$\mathrm{BWM}_n(\lambda, z, \delta)$为$A$型Birman-Wenzl-Murakami代数. 如果将T_n中的一个图上下颠倒,就得到BWM-代数的一个对合. 在[51]中,我们证明了如果R是一个交换Noether环,K是它的一个子环,且$q \in R$在R中可逆,则$\mathrm{BWM}_n(\lambda, q - q^{-1}, \delta)$关于这个对合是一个胞腔的$R$-代数. 这个证明的思想就是将Hecke代数的胞腔基提升到BWM-代数. 文[13]将这种思想再次用组合的方法加以实现.

5.3 代数的分圆化

两个胞腔代数的张量积是胞腔代数. 如果对张量乘法的交换性做各种不同的变形,就可能得到一些胞腔代数. 目前,有不少的文章探讨了各种不同代数的分圆代数. 根据这些分圆代数的特点,文[45]做了一些公理化地探讨. 另外,还有其他一些不同形式的变形,如walled Brauer代数, colored partition代数等[2,4]. 下面列出一些具体代数类分圆化为胞腔代数的例子.

(1) 代数闭域上的分圆 Temperley-Lieb 代数 [42]、分圆 Brauer 代数 [23]、Ariki-Koike Hecke 代数 (也叫 A- 型分圆 Hecke 代数)、分圆 Birman-Wenzl-Muramaki 代数 [23, 57, 16]. 注意，文 [16] 中胞腔代数的定义与定义 1.4(或定义 1.2) 有细微的区别，即 [16] 的代数类要比胞腔代数类广一些.

(2) 半群代数及其扭半群代数. 对于哪些群，它们的群代数是胞腔的 (对合即为群元素的逆)? 这个问题至今没有完全解决. 关于半群代数，主要考虑的是有限正则半群的半群代数. 在 [12, 48] 和 [21] 中，这类半群代数的胞腔性被归结为群代数的胞腔性，当然，这里的对合不一定取群元素的逆. 这三篇文章，从对合的角度探讨胞腔性，文 [21] 推广了 [48] 的结果，而文 [48] 推广了 [12] 的结果.

6 仿射胞腔代数

在这一节我们介绍仿射胞腔代数，这是新引入的一类代数，它既包含胞腔代数类，也包含一类无限维代数. 通过这类代数，我们可以更好地理解为什么胞腔代数的一个胞腔最多只能提供一个单模. 本节的内容主要来自文献 [32].

6.1 定义、例子和基本结论

在这一节，k 表示一个主理想整环. 一个有单位元的交换 k- 代数称为仿射的，如果作为 k 代数它是有限生成的. 已知两个 k- 模 V 和 W, 我们用 τ 表示扭映射：$W\otimes_k V\longrightarrow V\otimes_k W$, $w\otimes v\mapsto v\otimes w$, 其中 $w\in W$, $v\in V$. 下面的定义与胞腔代数的第二个定义类似.

定义 6.1 设 A 是一个有单位元的 k- 代数，i 是 A 上的一个 k- 对合. A 的一个理想 J 叫做仿射胞腔理想，如果下面的条件成立：

(1) $i(J)=J$.

(2) 存在一个有限秩的自由 k- 模 V, 一个仿射交换 k- 代数 B 以及 B 上的一个 k 对合 σ 使得 $\Delta:=V\otimes_k B$ 是一个 A-B- 双模，其中右 B- 模结构是由 B_B 诱导的.

(3) 存在一个 A-A- 双模同构 $\alpha: J\longrightarrow \Delta\otimes_B\Delta'$, 其中 $\Delta'=B\otimes_k V$ 是一个 B-A- 双模，左 B- 模结构由 ${}_BB$ 诱导，右 A- 模结构由 i 诱导，即 $(b\otimes v)a:=\tau(i(a)(v\otimes b))$, 这里 $a\in A, b\in B$ $v\in V$), 使得下面的图交换：

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\alpha} & \Delta\otimes_B\Delta' \\ i\big\downarrow & & \big\downarrow v_1\otimes b_1\otimes_B b_2\otimes v_2\mapsto v_2\otimes\sigma(b_2)\otimes_B\sigma(b_1)\otimes v_1 \\ J & \xrightarrow{\alpha} & \Delta\otimes_B\Delta'. \end{array}$$

一个带有对合 i 的代数 A 叫做仿射胞腔代数，如果存在一个 k- 模分解 $A=J_1'\oplus J_2'\oplus\cdots\oplus J_n'$ (n 是某个自然数) 满足 $i(J_j')=J_j'$ 对所有 j 成立，且当令 $J_j=\oplus_{l=1}^{j}J_l'$ 时，$0=J_0\subset J_1\subset J_2\subset\cdots\subset J_n=A$ 是 A 的一个理想链使得对每个 j ($j=1,2,\cdots,n$) 商理想 $J_j'=J_j/J_{j-1}$ 是商代数 A/J_{j-1} 的胞腔理想，其中商代数的对合是由 i 诱导的对合.

称仿射胞腔代数的上述理想链为胞腔链. 仿射理想 J 所提供的模 Δ 叫做 J 的胞腔格，它类似于胞腔代数的胞腔模.

由上面的定义可以看出，当所有的 B 都等于 k 时，就得到胞腔代数的概念，因此，每个胞腔 k- 代数是仿射胞腔代数. 另外，每个仿射交换 k- 代数是仿射胞腔代数，仿射交换 k- 代数上的 $n\times n$ 矩阵代数是仿射胞腔代数. 容易知道，当 k 是域时，仿射胞腔代数也可以是无限维的.

值得注意的是，尽管每个 J_i 中的 B_i 都是 Noether 环，但仿射胞腔代数不一定是 Noether 环. 简单的例子是 $A = k \oplus \widetilde{k[x]}$, 其中 k 是域；作为向量空间， $\widetilde{k[x]} = k[x]$, 但它的乘法是零乘法.

如何将胞腔代数的概念及其表示理论推广到无限维代数，人们做了一些尝试. Green 在 [19] 中，利用拓扑进行了定义，后来，又用超群来推广 [20], 但正像 Green 的文章所指出，对于这些推广了的代数类都没有得到它们表示理论的一般性结果. 我们将会看到，仿射胞腔代数有一个完整的不可约表示的参数刻画.

在 [32] 中，我们证明了，文献 [18] 中所介绍的仿射 Temperley-Lieb 代数是仿射胞腔代数. 更有意思的例子是， A- 型仿射 Hecke 代数是仿射胞腔代数. 这是我们目前知道的比较有趣的无限维仿射胞腔代数仅有的例子. 进一步的问题是，其他型的仿射 Hecke 代数是否也是仿射胞腔的？

类似胞腔代数的胞腔理想，仿射胞腔理想 J 作为 k- 代数同构于广义矩阵代数 $(M_n(B), \Phi)$. 更一般的，我们定义夹接代数 (swich algebra) ：设 A 是一个 k- 代数， $a_0 \in A$, 令 $\widetilde{A} := \{\tilde{a} \mid a \in A\}$. 在 $\widetilde{A}$ 上定义

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \widetilde{a+b}, \quad \tilde{a} \cdot \tilde{b} = \widetilde{aa_0b}, \quad \lambda\tilde{a} = \widetilde{\lambda a}, \quad \lambda \in k,\ a, b \in A.$$

容易看出， $\widetilde{A}$ 关于上述运算构成一个结合代数 (但不必有单位元) ，我们称 $\widetilde{A}$ 是 A 关于 a_0 的夹接代数. 仿射胞腔代数的单模参数化问题就归结为有限个夹接代数上单模的确定问题. 而每个夹接代数的单模的确定与矩阵代数 $M_n(B)$ 有密切的关系. 关于这一点，在 [32] 已有详细的讨论. 下面给出仿射胞腔代数单模参数化的刻画.

定理 6.2 设 A 是仿射胞腔代数，且 $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n = A$ 是它的一个胞腔链使得 $J_j/J_{j-1} \simeq \mathcal{A}(V_j, B_j, \psi_j)$. 令 $(\psi_{st}^{(j)})$ 是双二次型 ψ_j 所对应的矩阵. 则

(1) 在单 A- 模的同构类的集合与如下的集合之间存在一个一一对应：

$$\{(j, \mathsf{m}) \mid 1 \le j \le n,\ \text{存在}B_j\text{的一个极大理想 } \mathsf{m} \text{ 使得有某个 } \psi_{st}^{(j)} \notin \mathsf{m}\}.$$

每个单 A- 模 S 都在某个域 B_j/m 上是有限维的.

(2) 设 $1 \le j \le n$. 则 ψ_j 是一个同构的充要条件是 ψ_j 的行列式 $det(\psi_{st}^{(j)})$ 在 B_j 中可逆. 特别地，如果所有的 ψ_j 都是同构，则 A 作为仿射胞腔代数同构于 $\bigoplus_{j=1}^{n} M_{n_j}(B_j)$, 其中 n_j 是 k- 模 V_j 的秩.

如果假定仿射胞腔代数中所有的 B_j 都是主理想 k- 代数，我们就可以利用线性代数的方法刻画单模的参数集合. 在叙述这个结果之前，先回忆几个概念. 设 Φ 是主理想环上的一个 n 阶方阵，则存在可逆矩阵 P 和 Q 使得 $P\Phi Q$ 是一个对角阵 $\mathrm{diag}\{\delta_1, \cdots, \delta_r, 0, \cdots, 0\}$, 其中 $r \ge 0$, 且当 $r > 0$ 时，对所有的 j 有 $\delta_j \ne 0$ 以及 $\delta_j \mid \delta_{j+1}$. 我们称 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r$ 为 Φ 的不变因子， δ_1 为最小不变因子.

定理 6.3 设 A 是一个仿射胞腔 k- 代数，它有一个胞腔链 $J_0 = 0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n = A$ 使得 J_j/J_{j-1} 同构于广义矩阵代数 $\mathcal{A}(B_j, \Psi_j)$, 其中 B_j 都是主理想整环. 则

(1) 单模同构类的参数集可取为

$\{(j,p) \mid 1 \le j \le n, \Psi_j \ne 0, p$ 是 B_j 中不可约元（不计可逆元的倍数）使得 p 不整除 Ψ_j 的最小不变因子 $\}$. 这里当 B_j 没有不可约元时，令 $p = 0$.

(2) 设 $L(j,p)$ 是 (j,p) 所对应的单 A- 模，则

$$\dim_{B_j/(p)} L(j,p) = \begin{cases} r, & \text{如果}\Psi_j\text{的某个不变因子是可逆的，且} \\ & r\ \text{是这样的不变因子的个数;} \\ r, & \text{如果}\Psi_j\ \text{没有可逆的不变因子，且} \\ & r\ \text{是不能被}\ p\ \text{整除的不变因子的个数.} \end{cases}$$

(3) 如果 k 是一个域，令 $L(j,p)$ 是 (j,p) 所对应的 A- 单模，则

$$\dim_k L(j,p) = \begin{cases} r\cdot\dim_k(B_j/(p)), & \text{如果}\Psi_j\text{的某个不变因子是可逆的，且} \\ & r\ \text{是这样的不变因子的个数;} \\ r\cdot\dim_k(B_j/(p)), & \text{如果}\Psi_j\ \text{没有可逆的不变因子，且} \\ & r\ \text{是不能被}\ p\ \text{整除的不变因子的个数.} \end{cases}$$

关于仿射胞腔代数同调性质的讨论，首先遇到的问题是，如何来定义无限维代数的 Cartan 矩阵这个概念，另外，仿射胞腔代数的幂等理想是否含有幂等元也是不知道的．因此，研究胞腔代数的一些方法在此不再适用．然而，利用仿射胞腔代数的结构性质，我们在 [32] 中证明了：

定理 6.4 设 A 是一个仿射胞腔代数， $J_0=0\subset J_1\subset\cdots\subset J_n=A$ 是它的胞腔链使得 $J_j/J_{j-1}=V_j\otimes_k B_j\otimes_k V_j$(见 §2, §6.1)．假设对每个 B_j 都有 $\mathrm{rad}(B_j)=0$, 且 J_j/J_{j-1} 是幂等的，也包含 A/J_{j-1} 中的一个非零幂等元，则 A 的整体维数是有限的充分和必要条件是每个 B_j 的整体维数是有限的．进一步地，A 的导出范畴有一个析层 (stratification), 它是重复的 recollement, 其截层 (strata) 是这些 B_j 的导出范畴.

众所周知，代数簇的光滑性与坐标环的整体维数的有限性是一致的，因此，研究代数的整体维数的有限性也是人们常常关心的一个问题．在下一节里，我们将利用上面的这个结果探讨 A-型仿射 Hecke 代数的整体维数.

6.2 A- 型仿射 Hecke 代数

首先，我们来回忆仿射 Hecke 代数的定义．关于这方面更详细的讨论可见 Lusztig 的系列文章和席南华的工作，如 [35, 36, 55, 56].

设 R 表示整数环上的罗朗多项式环 $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$, 其中 q 是变元．给定一个 Coxeter 系统 (W,S), 其中 S 是单反射的集合．R 上关于 Coxeter 系统 (W,S) 的 Hecke- 代数 $\mathscr{H}$ 是一个 R 上有单位元的结合代数，它的 R- 基底是 $\{T_w \mid w\in W\}$, 定义关系为

$$\begin{aligned} &(T_s-q^2)(T_s+1)=0, && \text{如果 } s\in S, \\ &T_wT_u=T_{wu}, && \text{如果 } \ell(wu)=\ell(w)+\ell(u). \end{aligned}$$

这是一个非常一般的定义，当 Coxeter 系统变化时，就得到不同型的 Hecke 代数．下面我们来定义扩展的 Hecke 代数．设 (W',S) 是一个 Coxeter 系统， S 是单反射的集合．假设 Abel 群 Ω 作用于 (W',S)．于是有群的半直积 $W=\Omega\ltimes W'$, 称为扩展的 Coxeter 群．在 W 上定义一个长度函数 $\ell(\omega w)=\ell(w)$, $\omega\in\Omega$, $w\in W'$．这样，可以类似定义关于 (W,S) 的 Hecke- 代数.

根据已知的事实， W' 可写作 $W_0\ltimes P$, 其中 P 是 W 的一个 Abel 群， W_0 是一个有限的 Weyl 群．当 (W',S) 是 $\tilde{A}_{n-1}$ 时，其中的 W_0 就同构于 n 个字母的对称群 S_n．多项式 $\sum_{w\in W_0}q^{\ell(w)}\in\mathbb{Z}[q]$ 称为关于 (W,S) 的 Hecke- 代数 $\mathscr{H}$ 的 Poincaré 多项式.

A_{n-1}- 型仿射 Hecke- 代数 $\mathscr{H}_R(n,q)$ 定义为扩展的 Coxeter 群 (W,S) 的 Hecke- 代数，其中 (W',S) 是 $\widetilde{A}_{n-1}(n\geq 3)$- 型 Coxeter 系统，$\Omega$ 是循环群 $\mathbb{Z}_n$, 它通过循环变换 Coxeter 图的顶点，自然地作用在 W' 上，这样就得到 $W=\Omega\ltimes W'$. 为了简单，以后我们就称 $\mathscr{H}_R(n,q)$ 为仿射 Hecke- 代数.

如果 k 是一个交换的 $\mathbb{Z}$- 代数，用 $\mathscr{H}_k(n,q)$ 表示 $k\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{H}_R(n,q)$, 它是一个 k- 代数. 在 [32] 中，我们证明了，$\mathscr{H}_R(n,q)$ 是仿射胞腔的 $\mathbb{Z}$- 代数. 从而，对任意的主理想整环 k, $\mathscr{H}_k(n,q)$ 也是仿射胞腔的 k- 代数. 进一步地，我们还有 A- 型仿射 Hecke 代数整体维数的一个刻画.

定理 6.5 设 k 是一个特征为零的域，$q\in k$. 如果 $\mathscr{H}_k(n,q)$ 的 Poincaré 多项式在 q 处取非零值，即 $\sum_{w\in S_n}q^{\ell(w)}\neq 0$, 则 $\mathscr{H}_k(n,q)$ 的整体维数有限.

注意，对于仿射 Hecke 代数的整体维数，文献 [39] 利用调和分析对实数域上参量为正的情况做了讨论，给出了此时的仿射 Hecke 代数作为双模的投射分解.

显然，对于仿射胞腔代数的进一步研究有大量的工作有待去做. 关于胞腔代数和相关问题已有大量的成果和文献，我们无法一一列出. 下面的参考文献仅列出与综述密切有关的一部分文献，主要侧重于胞腔代数的一般理论，不妥之处，欢迎读者批评指正.

在此，感谢李彦博同学阅读初稿和提出的一些修改意见.

参考文献

[1] Brown, W.P., Generalized matrix algebras, *Canad. J. Math.*, 1955, 7: 188-190.

[2] Benkart, G., Chakrabarti, M., Halverson, T., Leduc, R., Lee, C. and Stroomer, J., Tensor product representations of general linear groups and their connections with Brauer algebras, *J. Algebra*, 1994, 166: 529-567.

[3] Birman, J. and Wenzl, H., Braids, link polynomials and a new algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, 313: 249-273.

[4] Bloss, M., *G*-colored partition algebras as centralizer algebras of wreath products, *J. Algebra*, 2003, 265(2): 690–710.

[5] Brauer, R., On algebras which are connected with the semisimple continous groups, *Ann. Math.*, 1937, 38: 854–872.

[6] Cao Y.Z., Homological aspects of cellular algebras, Dissertation, 2003.

[7] Cline, E., Parshall, B.J., and Scott, L.L., Finite dimensional algebras and highest weight categories, *J. Reine Angew. Math.*, 1988, 391: 85-99.

[8] Cox, A., Martin, P., Park, A. and Xi C.C., Representation of towers of recollement: theory, notes, and examples, *J. Algebra*, 2006, 302(1): 340-360.

[9] Deng B. M. and Xi C.C., Quasi-hereditary algebras which are twisted double incidence algebras of posets, *Beiträge zur Algebra und Goemetrie*, 1995, 36(1): 37-71.

[10] Dlab, V. and Ringel, C.M., Quasi-hereditary algebras, *Ill. J. Math.*, 1989, 33(2): 280-291.

[11] Dlab, V. and Ringel, C.M., The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras, In: Representations of algebras and related topics (Kyoto, 1990), 200-224, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 168, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[12] East, J., Cellular algebras and inverse semigroups, *J. Algebra*, 2006, 296: 505-519.

[13] Enyang, J., Cellular bases for the Brauer and Birman-Murakami-Wenzl algebra, *J. Algebra*, 2004, 281: 413–449.

[14] Geck, M., Hecke algbera of finite type are cellular, *Invent. Math.*, 2007, 169(3): 501-517.

[15] Goodman, F.M., de la Harpe, P. and Jones, V.F.R., Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI Publ. 14, Springer, 1989.

[16] Goodman, F., Cellularity of cyclotomic Birman-Wenzl-Murakami algebras, Preprint, arXiv: 0801.0306v3, 2008.

[17] Graham, J. and Lehrer, G., Cellular algebras, *Invent. Math.*, 1996, 123: 1-34.

[18] Graham, J. and Lehrer, G., Cellular algebras and diagram algebrass in representation theory, In: Representation theory of algebraic groups and quantum groups, *Adv. Stud. Pure Math., Math. Soc. Japan, Tokyo*, 2004, 40: 141-173.

[19] Green, R.M., Completions of cellular algebras, *Comm. Algebra*, 1999, 279(11): 5349-5366.

[20] Green, R.M., Standard modules for tabular algebras, *Algebras and Representation Theory*, 2004, 7: 419-440.

[21] Guo X.J. and Xi C.C., Cellularity of twisted semigroup algebras, *J. Pure Appl. Algbera*, 2009, 213: 71-86.

[22] Hanlon, P. and Wales, D., On the decomposition of Brauer's centralizer algebras, *J. Algebra*, 1994, 164: 773-830.

[23] Häring-Oldenberg, R., Cyclotomic Birman-Murakami-Wenzl-algebras, *J. Pure Appl. Algebra*, 2001, 161: 113-144.

[24] Kazhdan, D. and Lusztig, G., Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. Math.*, 1979, 53: 165-184.

[25] König, S. and Xi C.C., On the structure of cellular algebras. In: I.Reiten, S. Smalø and Ø. Solberg (Eds.): Algebras and Modules II. Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, 1998, 24: 365–386.

[26] König, S. and Xi C.C., Cellular algebras: Inflations and Morita equivalences, *J. London Math. Soc.*, 1999, 60(2): 700-722.

[27] König, S. and Xi C.C., A self-injective cellular algebra is weakly symmetric, *J. Algebra*, 2000, 228: 51-59.

[28] König, S. and Xi C.C., On the number of cells of a cellular algebra, *Comm. Algebra*, 1999, 27(11): 54-63-5270.

[29] König, S. and Xi C.C., When is a cellular algebra quasi-hereditary? *Math. Ann.*, 1999, 315: 281-293.

[30] König, S. and Xi C.C., A characteristic-free approach to Brauer algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2001, 353: 1489-1505.

[31] König, S. and Xi C.C., Strong symmetry defined by twisting modules, applied to quasi-hereditary algebras with triangular decomposition and vanishing radical cube, *Comm. Math. Phys.*, 1998, 197: 427-441.

[32] König, S. and Xi C.C., Affine cellular algebra. Preprint, available at: http://math.bnu.edu.cn/~ccxi/, 2008.

[33] Li W.X. and Xi C.C., The numebr of simple modules of a cellular algebra, *Sci. in China Series A: Mathematics*, 2005, 48(6): 735-745.

[34] Li Y.B., The centers and radicals of cellular algebras, Dissertation, 2009.

[35] Lusztig, G., Cells in affine Weyl groups, In: Algebraic groups and related topics, *Advanced Studies in Pure Math., Kinokunia and North Holland*, 1985, 6: 255-287.

[36] Lusztig, G., Cells in affine Weyl groups, II, *J. Algebra*, 1987, 109: 536-548.

[37] Martin, P., Temperley-Lieb algebras for non-planar statistic mechanics -The partition algebra construction, *J. Knot Theory and its Ramifications*, 1994, 3(1): 51-82.

[38] Mathas, A., Seminormal forms and Gram determinants for cellular algebras, *J. Reine Angew. Math.*, 2008, 619: 141-173.

[39] Opdam, E. and Solleveld, M., Homological algebra for affine Hecke algebras, *Adv. Math.*, 2009, 220(5): 1549-1601.

[40] Ringel, C.M., The category of good odules over a quasi-hereditar algebra has almost splt sequences, *Math. Z.*, 1991, 208(2): 209-223.

[41] Rui H.B., A criterion on semisimple Brauer algebras, *J. Combin. Theory, Series A*, 2005, 111(1): 78-88.

[42] Rui H.B. and Xi C.C., The representation theory of cyclotomic Temperley-Lieb algebras, *Coment. Math. Helv.*, 2004, 79(2): 427-450.

[43] Rui H.B., Xi C.C. and Yu H., On the semisimplicty of cyclotomic Temperley-Lieb algebras, *Michigen J. Math.*, 2005, 53(1): 83-96.

[44] Temperley, H.N.V. and Lieb, E.H., Relations between the "percolation" and "colouring" problem and other graph–theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the "percolation" problem, *Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A*, 1971, 322: 251-273.

[45] Wang J.C., Path algebras, diagram algebras and cellular algebras, Dissertation, 2007.

[46] Wenzl, H., On the structure of Brauer's centralizer algebras, *Ann. Math.*, 1988, 128: 173-193.

[47] Wenzl, H., Quantum groups and subfactors of type B, C, and D, *Comm. Math. Physics*, 1990, 133: 383-432.

[48] Wilcox, S., Cellularity of diagram algebras and twisted semigroup algebras, *J. Algebra*, 2007, 309: 10-31.

[49] Xi C.C., Cellular algebras and standardly stratified algebras, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2002, 133(1): 37-53.

[50] Xi C.C., Partition algebras are cellular, *Compos. Math.*, 1999, 119: 99-109.

[51] Xi C.C., On the quasi-heredity of Birman-Wenzel algebras, *Adv. Math.*, 2000, 154(2): 280-298.

[52] Xi C.C., Characteristic tilting modules and Ringel duals, *Sci. in China A*, 2000, 43(11): 1121-1130.

[53] Xi C.C., Twisted doubles of algebras, I: Deformations and the Jones index. In: I. Reiten, S. Smalø and Ø. Solberg (Eds.): Algebras and Modules II. *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings*, 1998, 24: 531-523.

[54] Xi C.C. and Xiang D.J., Cellular algebras and Cartan matrices, *Linear Alg. Appl.*, 2003, 365: 369-388.

[55] Xi N.H., Representations of affine Hecke algebras and based rings of affine Weyl groups, *J. Amer. Math. Soc.*, 2007, 20(1): 211-217.

[56] Xi N.H., The based ring of two sided cells of affine Weyl groups, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 2002, 152(749): 1-95.

[57] Yu S.H., The cyclotomic Birman-Murakami-Wenzl algebras. Disssertation, 2008.

Cellular and Affine Cellular Algebras

XI Changchang

(*School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, 100875, P. R. China*)

Abstract: Cellular algebras in the sense of Graham and Lehrer provide a beautiful model to understand irreducible representations by linear algebra. In this note, we survey first this theory of cellular algebras developed in the last decade, and then introduce the so-called affine cellular algebras, which include the infinite dimensional affine Hecke algebras of type A, and outline some new results on affine cellular algebras. In particular, we apply the new theory to affine Hecke algebras of type A, and get when these algebras have finite global dimension.

Key words: cellular algebra; affine cellular algebra; affine Hecke algebras; irreducible representation; global dimension