数 学 年 刊
8A (4) 1987

关于 MHR-环的几个问题

惠 昌 常
(陕西师范大学)

提 要

本文证明了如下两个结果.

1. 诣零 MHR-环的子环是 MHR-环.

2. 存在诣零 MHR-环,它不是对主左理想有极小条件的环.

一个结合环如果对主右理想有极小条件,则叫做 MHR-环,这类环是 Artin-环的推广,对此已有许多研究[1—3]. F. A. Szász[4] 对这类环曾提出如下几个未解决的问题:

1. 是否存在一个诣零 MHR-环,它的子环不是 MHR-环? (Problem 29 p. 122).

2. 是否存在一个诣零 MHR-环, 它对主左理想不满足极小条件? (Problem 30, p. 123).

本文将完全解决这两个问题.

定义 设环 A 是左 T-幂零的,是指对 A 中任意的序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 都存在自然数 m, 使得 $a_1\cdots a_m=0$.

环 A 中元素 a 生成的右(左)理想记作 $\langle a)_A$ $((a\rangle_A)$. 有时记作 $\langle a)$ $((a\rangle)$. 其余符号均与[5]相同.

引理[2] 设 A 是诣零 MHR-环, 则 A 的加法群 A^+ 是周期群且环 A 也是左 T-幂零的.

命题 1 设环 A 是左 T-幂零的, A^+ 是 p-群, 则 A 是 MHR-环.

证 若 A 不是 MHR-环,则有一个无穷严格主右理想降链:

$$\langle x_1)\supset\langle x_2)\supset\langle x_3)\supset\cdots, \tag{$*$}$$

令 $p^s x_1=0$, 设 $x_i=x_{i-1}r_{i-1}+m_{i-1}x_{i-1}$, 简记为 $x_i=x_{i-1}(r_{i-1}+m_{i-1})$. 今设 $r_{i-1}^k=0$, 则 $p\mid m_{i-1}$, $i\geqslant 2$. 不然,若 $p\nmid m_{i-1}$,则存在 u, $v\in\mathbb{Z}$,使 $p^s u+m_{i-1}v=1$. 因此有 $vx_i=vx_{i-1}r_{i-1}+vm_{i-1}x_{i-1}=vx_{i-1}r_{i-1}+x_{i-1}$, 这样 $x_{i-1}=vx_i-vx_{i-1}r_{i-1}$, 由此式迭代可得

$$\begin{aligned}x_{i-1}&=vx_i-v(vx_i-vx_{i-1}r_{i-1})r_{i-1}=vx_i-v^2x_ir_{i-1}+v^2x_{i-1}r_{i-1}^2\\&=vx_i-v^2x_ir_{i-1}+v^2(vx_i-vx_{i-1}r_{i-1})r_{i-1}^2\\&=vx_i-v^2x_ir_{i-1}+v^3x_ir_i^2-v^3x_{i-1}r_{i-1}^3=\cdots\\&=vx_i-v^2x_ir_{i-1}+v^3x_ir_{i-1}^2+\cdots+(-1)^{k-1}v^kx_ir_{i-1}^{k-1}+(-1)^kv^kx_{i-1}r_{i-1}^k\\&=vx_i-v^2x_ir_{i-1}+v^3x_ir_{i-1}^2+\cdots+(-1)^kv^kx_ir_{i-1}^{k-1}.\end{aligned}$$

从而 $x_{i-1}\in\langle x_i)$. 这样 $\langle x_{i-1})=\langle x_i)$, 这与$(*)$的严格性矛盾. 故 $p\mid m_{i-1}$. 由 A 是左 T-幂

本文 1985 年 1 月 18 日收到,1986 年 8 月 10 日收到修改稿.

零的，对于序列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可选择自然数 $k_1, \cdots, k_s$ 使

$$r_1 r_2 \cdots r_{k_1} = 0,$$
$$r_{k_1+1} \cdots r_{k_2} = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{k_{s-1}+1} \cdots r_{k_s} = 0$$

这时有

$$x_{k_1+1} = x_{k_1}(r_{k_1} + m_{k_1}) = x_{k_1-1}(r_{k_1-1} + m_{k_1-1})(r_{k_1} + m_{k_1}) = \cdots$$
$$= x_1(r_1 + m_1)\cdots(r_{k_1} + m_{k_1}).$$

由上 $p|m_{i-1}$ 及 $r_1 \cdots r_{k_1} = 0$，故得 $x_{k_1+1} \in \langle px_1 \rangle$，类似地可得 $x_{k_2+1} \in \langle px_{k_1+1} \rangle \subseteq \langle p^2 x_1 \rangle$．依次类推便得 $x_{k_s+1} \in \langle p^s x_1 \rangle = 0$．这样 $x_{k_s+1} = 0$，这与(*)的无限性矛盾．故 A 是 MHR-环．

命题 2　若环 A 是 MHR-环 A_1，A_1 的直和：$A = A_1 \oplus A_2$，其中 A_i 的加法群 A_i^+ 是 p_i-群，$(p_1, p_2) = 1$．则 A 也是 MHR-环．

证　设 $a \in A$，则 $a = a_1 + a_2$，$a_i \in A_i$．令 a_i 的加法阶为 $p_i^{k_i}$．易得 $\langle a \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle$．另一方面，$p_1^{k_1} a = p_1^{k_1} a_2$，又因为 $(p_1, p_2) = 1$．故 $p_1^{k_1} a_2$ 生成的加法子群与 a_2 生成的加法子群是相等的，即存在自然数 q 使 $a_2 = q p_1^{k_1} a_2 = q p_1^{k_1} a \in \langle a \rangle$．同样可证，$a_1 \in \langle a \rangle$，这样 $\langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle \subseteq \langle a \rangle$．于是 $\langle a \rangle = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle$．

现在设 $\langle x_1 \rangle \supseteq \langle x_2 \rangle \supseteq \cdots$ 是 A 的一个主右理想降链．令 $x_i = x_i' + x_i''$，$x_i' \in A_1$，$x_i'' \in A_2$，则有

$$\langle x_i \rangle = \langle x_i' \rangle_{A_1} \oplus \langle x_i'' \rangle_{A_2}.$$

因上式表示式是直和，故对任意 i 有 $\langle x_i' \rangle_{A_1} \supseteq \langle x_{i+1}' \rangle_{A_1}$，$\langle x_i'' \rangle_{A_2} \supseteq \langle x_{i+1}'' \rangle_{A_2}$．再由 A_i 是 MHR-环，必有 N 使 $\langle x_N' \rangle_{A_1} = \langle x_{N+1}' \rangle_{A_1} = \cdots$，$\langle x_N'' \rangle_{A_2} = \langle x_{N+1}'' \rangle_{A_2} = \cdots$．从而 $\langle x_N \rangle = \langle x_{N+1} \rangle = \cdots$，即得 A 是 MHR-环．

推论　设 $p_1, \cdots, p_n$ 是不同的素数，$A = \sum_{i=1}^{n} \oplus A_i$．如果 A_i 是 MHR-环，且 A_i^+ 是 p_i-群，则 A 是 MHR-环．

定理 1　诣零 MHR-环 A 的子环也是 MHR-环．

证　设 S 是 A 的子环，由引理，S^+ 是周期群，易知 S 有环的直和分解

$$S = S_{p_1} \oplus \cdots \oplus S_{p_n} \oplus \cdots,$$

其中 S_{p_i} 表示 S^+ 的 p_i 准素分支，$p_1, \cdots, p_n, \cdots$ 是互不相同的素数．由于诣零 MHR-环是左 T-幂零的故 S 也是左 T-幂零的．由命题 1，S_{p_i} 是 MHR-环．现在设 $\langle x_1 \rangle \supseteq \langle x_2 \rangle \supseteq \cdots$ 是 S 的一个主右理想降链．令 $x_1 = a_{p_1} + \cdots + a_{p_n}$，$a_{p_i} \in S_{p_i}$．则必有

$$\langle x_1 \rangle \subseteq \sum_{i=1}^{n} \oplus S_{p_i} = S_0.$$

这样 $\langle x_i \rangle$ 也是 S_0 中主右理想，由推论知，S_0 是 MHR-环，故链 $\langle x_1 \rangle \supseteq \langle x_2 \rangle \supseteq \cdots$ 必中止，从而 S 是 MHR-环．

注　一个环叫做 MH_1R-环，如果对包含在一个主右理想中的右理想有极小条件．关于诣零 MH_1R-环相应于定理 1 的结论在[3]中已解决．

定理 2　若 A 是幂零 MHR-环，则 A 也是对主左理想有极小条件的环．

证　由命题 1 的证明和命题 2 的证明可得之，这里不再复述．

定理3 存在诣零 MHR-环，它不是对主左理想有极小条件的环.

证 令 $F=\mathbb{Z}_p$，即以素数 p 为模的剩余类环. 设 A 是 F 上的一切可数无限阶严格下三角且其中只有有限个位置不为零的矩阵作成的环. 显然 A 是诣零的. 下面证明 A 还是 MHR-环. 由命题1只要证明它是左 T-幂零的即可.

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 的一个序列，每个 x_i 可表为

$$x_i=\begin{pmatrix} y_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 y_i 是 F 上的一个有限阶严格下三角阵. 若 x_1 中 y_1 为 n 阶的，则由计算易知 $x_1\cdots x_n=0$. 故 A 是左 T-幂零的.

令 e_{i1} 表示第 i 行1列处是1，其余为0这样的矩阵，则

$$\langle e_{21}\rangle\supset\langle e_{31}\rangle\supset\langle e_{41}\rangle\supset\cdots$$

便是一个无限主左理想降链，即 A 不是对主左理想有极小条件的环.

至此，我们就完全回答了一开始提出了几个问题.

作者感谢雷天德副教授的指导.

参 考 文 献

[1] Szász, F. A., Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale I, *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), 54—64.

[2] Szász, F. A., Über Ringe mit Minimalbedingung für Haupt-rechtsideale II, *Acta Math. Acad Sci. Hung.*, **12**(1961), 417—429.

[3] Szász, F. A., Über Ringe mit Minimalbedingung für Haupt-rechtsideale III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14**(1963), 447—461.

[4] Szasz, F. A., Radicals of Rings, Akademial Kiado Budapest. 1981.

[5] 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983.