

诣零 MHR -环是 Z -根环

惠 昌 常

(陕西师范大学)

提 要

本文讨论 Szász, F. A. 提出每个诣零 MHR -环是否都是 Z -根环的问题, 给予肯定的回答.

Szász, F. A.^[1] 在六十年代初提出了 MHR -环, 即

定义 如果环(结合环) A 关于主右理想有汲小条件, 则叫做一个 MHR -环.

并且对这类环作了研究, 1981 年, 他在 [1] 中提出了一个未解决的问题 (Problem 37):

每个诣零 MHR -环都是 Z -根环吗?

这里 Z 表示由所有素数阶的零环类所确定的下根. 本文给予肯定的回答.

引理 1 设 R 是一个根性质, I 是环 A 的一个理想, 则 $R(I)$ 是 A 的一个理想, 其中 $R(I)$ 表示环 I 的 R -根.

引理 2 设 R 是一个根性质, R -半单环的理想也是 R -半单环.

引理 3 环性质 R 是一个根性质的充要条件是

1) R -环 A 的同态象也是 R -环;

2) 如果环 A 的每个非零同态象都含一个非零的 R -理想, 则 A 是 R -环.

这些结果皆在 [1] 的 §1 中.

命题 1 环性质 R 是一个根性质的充要条件是

1) R -环的同态象还是 R -环;

2) 如果环 A 的每个非零同态象都含一个非零的 R -次理想, 则 A 是 R -环.

证 B 是环 A 的一个次理想是指存在 $B_1, \dots, B_n$, 设 $B_0 = B \leq B_1 \leq \dots \leq B_n = A$, 其中 B_i 是 B_{i+1} 的理想.

充分性 根据引理 3, 只要证明 2) 成立. 设环 A 的每个非零同态象都含有一个非零的 R -理想, 当然也有每个非零同态象都含有一个非零的 R -次理想, 由 3) 知, A 是 R -环, 所以 2) 成立, 从而 R 是一个根性质.

必要性 设 R 是一个根性质, 要证 3) 成立. 设 $\bar{A}$ 是 A 的一个非零同态象, 且含有一个非零的 R -次理想 B_0 . 由次理想的定义, 存在 $B_1, \dots, B_n$ 使 $B_0 \leq B_1 \leq \dots \leq B_n \leq \bar{A}$, 其中 B_i 是 B_{i+1} 的理想, 于是由引理 1, $R(B_n)$ 是 $\bar{A}$ 的理想且 $R(B_n) \neq 0$. 不然, 若 $R(B_n) = 0$, 则 B_n 为 R -半单的, 从而 B_{n-1} 为 R -半单的 (根据引理 2). 这样便推知 B_0 是 R -半单的, 这与 $R(B_0) = B_0 \neq 0$ 的假设矛盾. 因此由引理 3, A 是 R -环, 即 3) 成立.

命题 2 每个有限幂零环都是 Z -根环.

本文 1983 年 11 月 23 日收到.

证 因有限幂零环的任何非零同态象都是有限幂零环, 有限非零幂零环一定含有一个非零的理想它是零环, 故由引理 3, 只需证明有限零环都是 Z -根环即可.

设 A 是一个有限零环且 $A \neq 0$, 易见其加法结构是一个有限 Abel 群, 因此, 它是一些有限循环 p -群的直和. 但加法结构为有限循环 p -群的零环一定是 Z -根环, 因为每个非零同态象都包含一个非零理想它同构于 p -阶零环. 又因为有限个根环的直和仍是根环, 故 A 是 Z -根环. 证毕.

命题 3 设 A 是诣零的 MHR -环, 则 A 的每个非零同态象都包含一个非零的幂零理想.

证 设 $A/I = \bar{A}$ 是 A 的一个非零同态象, 则 $\bar{A}$ 是诣零的. 设 $\bar{A}$ 不含非零的幂零理想 (即 $\bar{A}$ 是半素环), 令 $W = \{\langle x \rangle \mid x \notin I, x \in A\}$, 其中 $\langle x \rangle$ 表示由 x 生成的 A 的主右理想, 显然 $W \neq \emptyset$, 由 MHR -环的定义, W 中必有极小元, 设为 $\langle a \rangle$. 因 $a \notin I$, 故 $\langle a \rangle \neq \bar{0}$, 从而由 $\bar{A}$ 的半素性, 必有 $\langle a \rangle^2 \neq \bar{0}$, 因而存在 $\bar{0} \neq \bar{a}_1 \in \langle a \rangle$ 使 $\bar{a}_1 \langle a \rangle \neq \bar{0}$, 因 $\bar{a}_1 \in \langle a \rangle$, 可设 $a_1 = b + c$, 其中 $c \in \langle a \rangle$, $b \in I$. 这样便有 $a_1 a \notin I$ (反之, 若 $a_1 a \in I$, 则 $\bar{a}_1 \langle a \rangle = \bar{a}_1 \langle a \rangle = \langle a \rangle \bar{a}_1 = \bar{0}$). 因此, $ca \notin I$, 但 $ca \in \langle a \rangle$, 根据 $\langle a \rangle$ 的极小性的 $\langle ca \rangle = \langle a \rangle$, 于是存在 $e \in \langle a \rangle$ 使 $ce = c$. 显然 $e \notin I$, $e(e^2 - e) = 0$.

下面看 $\bar{e}$ 在 $\langle \bar{a} \rangle$ 中的右零化子 $(\bar{0} : \bar{e}) = \{\bar{y} \mid \bar{y} \in \langle \bar{a} \rangle, \bar{e}\bar{y} = \bar{0}\}$. 若 $(\bar{0} : \bar{e}) \neq \bar{0}$, 取 $\bar{0} \neq \bar{a}_2 \in (\bar{0} : \bar{e})$, 则有 $d \in \langle a \rangle$, $f \in I$ 使 $a_2 = d + f$, $\bar{c}\bar{a}_2 = \bar{c}\bar{d} = \bar{0}$, 由 $a_2 \notin I$ 知 $d \notin I$, 再由 $\langle a \rangle$ 的极小性知 $\langle d \rangle = \langle a \rangle$. 于是 $\langle a \rangle = \bar{c}\langle a \rangle = \bar{c}\langle d \rangle = \langle cd \rangle$, 从而 $\langle a \rangle = \langle cd \rangle = \langle c\bar{d} \rangle = \bar{0}$, 这是一个矛盾. 故 $(\bar{0} : \bar{e}) = \bar{0}$. 于是 $\bar{e}^2 - \bar{e} = \bar{0}$. 即 $\bar{e}^2 = \bar{e}$ 是 $\bar{A}$ 的一个非零幂等元, 这与 $\bar{A}$ 的诣零性相矛盾! 故 $\bar{A}$ 必含有非零的幂零理想. 证毕.

定理 每个诣零 MHR -环 A 都是 Z -根环.

证 设 A 是诣零的 MHR -环, 根据命题 1, 我们只需证明 A 的每个非零同态象都包含一个非零 Z -次理想即可.

设 $\bar{A}$ 是 A 的一个非零同态象, 由命题 3, $\bar{A}$ 必含有非零的幂零理想, 从而 $\bar{A}$ 必含有非零的零理想 I , 令 A 到 $\bar{A}$ 上的同态映射为 φ , 取 $0 \neq b \in \bar{I}$, 于是存在 $a \in A$, $a \neq 0$, 使 $\varphi(a) = b$.

考虑 $\langle a \rangle \supseteq \langle 2a \rangle \supseteq \dots \supseteq \langle 2^m a \rangle \supseteq \dots$

这是 A 的一个主右理想的降链, 由 A 是 MHR -环必有 $m \in \mathbf{N}$, 使 $\langle 2^m a \rangle = \langle 2^{m+1} a \rangle = \dots$. 因 $\langle 2^{m+1} a \rangle = \{n(2^{m+1} a) + (2^{m+1} a)r \mid n \in \mathbf{Z}, r \in A\}$, 故存在有整数 n_0 和 $r_0 \in A$ 使 $2^m a = n_0 2^{m+1} a + 2^{m+1} a r_0$. 令 $l = 2^m - n_0 2^{m+1}$, $r = 2^{m+1} r_0$, 则有 $l \neq 0$, $la = ar$. 又因为 A 是诣零的, 故有 $k \in \mathbf{N}$ 使 $r^k = 0$, 于是

$$l^k a = l^{k-1} (la) = l^{k-1} ar = l^{k-2} (la) r = l^{k-2} ar^2 = \dots = lar^{k-1} = ar^k = 0.$$

从而 $l^k b = \bar{0}$. 这样由 b 在 $\bar{I}$ 中生成的理想 $(b)_I = \{mb \mid m \in \mathbf{Z}\}$ 便是一个有限的非零幂零环, 再由命题 2 知 $(b)_I$ 是 Z -根环, 于是, $\bar{A}$ 包含有一个非零的 Z -次理想. 定理得证.

作者在此对雷天德导师的热情指导, 表示衷心感谢.

参 考 文 献

- [1] Szász, F. A., Radicals of Rings, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.
- [2] Divisky, N., Rings and Radicals, Allen, London, 1965.