

一类 MHR-环结构初探

惠昌常

(陕西师大数学系)

【摘要】

本文对 CMHR-环进行了探讨, 得到的结果是

1. 若 A 是 CMHR-环, 则 (1) $Z(A) = G(A)$; (2) 如果 A 还是 J -半单的, 则 A 是域上全阵环的直和, 特别, A 是单环时, $A \cong F_n$, F 是 $Z/(p)$ 上的代数扩张.
2. 若 A 是有唯一幂等元 e 的 CMHR-环, 则 $A \cong F + J(A)$ 的充要条件是 $eJ(A) = 0$, 其中 $J(A)$ 表示环 A 的 Jacobson 根, F 是一个域.
3. 若 A 是 CMHR-环, 且 A 的乘法半群是由其幂等元生成的, 并且 A 不含无限多个两两正交的幂等元, 则 A 是有限环.

一个 (结合) 环如果对主右理想有极小条件则叫做 MHR-环. 如果每个子环本身也是 MHR-环, 则叫做 CMHR-环. 对后一类环的研究, 文[1]把它作为一个公开问题而提出 ([1]p. 210 problem 89,). 本文对这类环作一点初步探讨.

本文所用符号及术语均与[2]相同.

命题 1 设 A 是 CMHR-环, 则每个非零的子环必有幂等元.

证 设 S 是 A 的非零子环, 则 S 是 MHR-环. 取 $a \in S$ 使 $a^m \neq 0, m \in N$ 是任意的. 由 $\{ \langle a \rangle_s \mid a \text{ 是 } S \text{ 的非幂等元} \}$ 中取一极小者 $\langle a \rangle_s$. 因 $\langle a_2 \rangle_s = a \langle a \rangle_s \subseteq \langle a \rangle_s$ 得 $a \langle a \rangle_s = \langle a \rangle_s$. 这样可得 $e \in \langle a \rangle_s$ 使 $ae = a, a(e^2 - e) = 0$. 我们断定 $e^2 - e$ 是幂等元, 不然则有 $\langle e^2 - e \rangle_s \subseteq \langle a \rangle_s$, 由 $\langle a \rangle_s$ 的极小性得 $\langle e^2 - e \rangle_s = \langle a \rangle_s$. 于是 $\langle a \rangle_s = a \langle a \rangle_s = a \langle e^2 - e \rangle_s = \langle a(e^2 - e) \rangle_s = 0$, 矛盾于 a 是非幂等元. 因此 $e^2 - e$ 是幂等元. 由[2]p. 141 引理知 e 是幂等的或 $f = eg(e)$ 是幂等元, 其中 $g(x)$ 是整系数多项式, 若 e 是幂等元, 则 $a = 0$, 这是不可能的, 故 e 不是幂等元, 这样就证明了命题 1.

命题 2 如果 CMHR-环 A 是单环 (即 $A^2 \neq 0$ 且没有非平凡理想), 则存在素数 p 使 $pA = \{ pa \mid a \in A \} = 0$.

证 因为此时 $J(A) = 0$, J 表示 Jacobson 根, 由命题 1 知 A 含有幂等元 e , 如果对任意 $m \in N, me \neq 0$, 则 $\varphi: me \rightarrow m$ 是环 Z_e 到整数环 Z 上的同构映射, 这样子环 $Z_e = \{ me \mid m \in Z \}$ 就不是 MHR-环, 矛盾于假设, 故有 m 使 $me = 0$. 在 A 的加法群 A^+ 中, 不妨设此 m 就是 e 的阶数. 如果 $m = st, 1 < s, t < m$, 则 $sA = \{ sa \mid a \in A \}$ 是 A 的非零理想, 故 $(te)A = (te)sA = (ste)A = 0$, 这与 A 无绝对零因子矛盾, 从而 $m = p$ 是个素数, 又 $A = AeA$, 故 $pA = A(pe)A = 0$.

本文 1985 年 1 月 31 日收到.

推论 J -半单 CMHR-环 A 的加法群 A^+ 是周期的.

证 由[3] p. 430 知 $A = \sum_{i \in I} \oplus A_i$. A_i 是单环, 由命题2, 存在 p_i 使 $p_i A_i = 0$. 取 $a \in A$, 设

$a = a_1 + \cdots + a_n$, 其中 $a_i \in A_i$, 则 $p_1 \cdots p_n a = 0$. 故 A^+ 是周期的.

定理1 设 A 是 CMHR-环, 则 A^+ 是周期群.

证 因为 $J(A)$ 是 MHR-环, 由[3]知 $J(A)^+$ 是周期群, 由上推论 $(A/J(A))^+$ 是周期的, 根据群论知识得 A^+ 是周期群.

由此易知有理数域 Q 不是 CMHR-环, 另外, 即使特征为 p 的域也不必为 CMHR-环, 如 $Z_p(x)$, x 是未定元, 这样在什么情况下, 一个域才会为 CMHR-环呢?

定理2 域 A 是 CMHR-环的充要条件是 A 为 Z_p 上的代数扩域.

证 设域 A 为 CMHR-环, 则 $pA = 0$, 因为 $\langle a \rangle$ 是 MHR-环, 故存在整系数多项式 $f(x)$, 使 $f(a) = 0$, 即 A 是所含最小子域 Z_p 上的代数扩域.

反过来, 设 A 是 Z_p 上的代数扩域, S 是 A 的一个子环, 对任意 $a \in S$, $\langle a \rangle$ 是有限环, 从而 $\langle a \rangle$ 本身是一个域. 设 $\langle a \rangle$ 的单位元为 I_a , a 在 $\langle a \rangle$ 中的逆记为 a' , 这时 $I = aa^{-1} = (I_a a) a^{-1} = I_a (aa^{-1}) = I_a \cdot I = I_a$, 故 $a' = a^{-1}$, 这样 S 是一个子域, 当然 S 本身也是 MHR-环.

命题3 设 A 是有单位元的单 CMHR-环, 则 $A \cong F_n$, 其中 F_n 表示域 F 上的全阵环, F 是 Z_p 上的代数扩域.

证 因为有单位元的单 MHR-环同构于 D_n , D 是除环. 又 $pA = 0$, 故 D 的特征可设为 p . 显见 D 可为 A 的子环, 故 D 必为 MHR-环, 这样对任意 $a \in D$, 由 $\langle a \rangle$ 是 MHR-环可得一整系数多项式 $f(x)$ 使 $f(a) = 0$, 不妨设 $f(x)$ 的首系数为1, 于是 $\langle a \rangle$ 便是有限环, 从而由 Wedderburn-Artin 定理知 $\langle a \rangle$ 是有限域, 即存在 $n(a) \geq 2$ 使 $a^{n(a)} = a$, 故 D 是可换的, 再由定理2, D 是 Z_p 上的代数扩域. 证毕.

定理3 设 A 是单 CMHR-环, 则 A 必有单位元. 从而 $A \cong F_n$, F 是 Z_p 上代数扩域.

证 假定 A 没有单位元. 由命题2, 存在 p 使 $pA = 0$. 不妨设 p 是最小的系数, 这时将 A 嵌入到 A' 中:

$$A' = \{(a, m) | a \in A, m \in Z_p\},$$

$$(a, m)(b, n) = (ab + mb + na, mn),$$

于是 A' 是有单位元的环, 可以看出, A' 是 J -半单 MHR-环, 根据[3], A' 只能是有限个有单位元的单 MHR-环的直和, 又 A 是 A' 的理想, 故 A 也必是有限个有单位元的单环的直和, 这样 A 有单位元, 与假设矛盾, 从而 A 必有单位元.

推论1 J -半单 CMHR-环是域上全阵环的直和.

推论2 无零因子 CMHR-环必为特征为 p 的域.

定义 设 K 是一个环类, R_1, R_2 是根性. 称 R_2 与 R_1 在 K 上强一致, 如果对任意 $A \in K$, $R_1(A) = R_2(A)$.

设 Z 是由素数阶零乘环类所确定的下根性, 我们知道在 MHR-环类上 Z -根与 J -根不是强一致的, 但在 CMHR-环类上有

定理4 在 CMHR-环类上, Z -根与 J -根强一致.

证 因 $Z < I$, 故 $Z(A) \leq I(A)$. 如果 A 是 CMHR-环, 则由命题 1 知 $I(A)$ 是诣零的. 诣零 MHR-环 $I(A)$ 也是 Z -根环, 故 $I(A) \subseteq Z(A)$, 于是得 $I(A) = Z(A)$.

定理 5 设 A 是 CMHR-环, 则 $I(A) = G(A) \subseteq F(A)$, 其中 $G(A)$ 表示环 A 的 Brown-McCoy 根, $F(A)$ 表示环 A 的 Fuchs (zeroid-) 根 (参见 [1], §45).

证 由推论 1 立即得 $I(A) = G(A)$. 但我们知道, $I(A) \subseteq F(A)$. (因为 $I(A)$ 是诣零的). 故得此定理.

注 即使是 CMHR-环, $G(A) \subseteq F(A)$ 不能改进为 $G(A) = F(A)$. 如下例:

$$A = \langle a, b \rangle, a + a = b + b = a^2 = b^2 + b = ab + ba = 0$$

则 $|A| = 4$, $I(A) = G(A) = \langle a \rangle \neq A = F(A)$.

下面讨论仅有一个幂等元的 CMHR-环.

命题 4 设 A 是有唯一幂等元 e 的 CMHR-环, 则 $I(A)$ 是所有幂零元的集合.

证 设幂零元的集合为 S , 取 $a \in S$, 设 $a \notin I(A)$. 这时由 a 的幂零性知, 存在最小整数 $n \geq 2$ 使 $a^n \in I(A)$, $a^{n-1} \notin I(A)$. 这时 a^{n-1} 生成的右理想不是诣零的, 由命题 1 知 $\langle a^{n-1} \rangle$ 含有幂等元 e , 这时 $e = a^{n-1}r + ma^{n-1}$, $m \in \mathbb{Z}$. 从而

$$ae = a^n r + ma^n \in I(A)$$

另外, $A/I(A)$ 是一些全阵环的直和, 根据幂等元的提升 ([5], p. 54. 命题 5), 容易知道 $A/I(A)$ 是一个域. $\bar{e}$ 是单位元, 故由 $\bar{a}\bar{e} = \bar{e}$ 得 $\bar{a} = \bar{e}$, 即 $a \in I(A)$, 矛盾于 a 的取法, 这就说明 $S = I(A)$.

定理 6 设 A 是有唯一幂等元 e 的 CMHR-环, 则 $A = F \oplus I(A)$ 的充要条件为 $eI(A) = 0$. 其中 F 同构于一个域.

证 必要性显然. 现证充分性. 设 $eI(A) = 0$, 于是我们有

$$A = eA + (1-e)A.$$

我们证明 eA 是一个域, $I(A) = (1-e)A$. 事实上, 设 $ex \in eA$ 且 $(ex)^2 = 0$, 因为 $A/I(A)$ 是一个域. 故 $\bar{e}\bar{x}\bar{e}\bar{x} = \bar{x}^2 = \bar{0}$, 即 $x^2 \in I(A)$, 由命题 4, $x \in I(A)$. 故 $ex = 0$. 因 eA 也是有唯一幂等元的 CMHR-环, 由命题 4, $I(eA) = 0$ 及推论 1 得 eA 同构于一个域 F . 此外, 若 $x \in (1-e)A$ 则 $\bar{e}\bar{x} = \bar{0}$, 从而 $x \in I(A)$. 又若 $x \in I(A)$, $x = x - ex = (1-e)x \in (1-e)A$, 故 $I(A) = (1-e)A$. 因为对任意的 $x \in I(A)$, $(e - xe)^2 = e - xe$, 由幂等元的唯一性得 $I(A)e = 0$, 这样 eA 就是 A 的理想. 证完.

最后我们指出有“相当多”的幂等元的 CMHR-环的一个事实.

定理 7 设 CMHR-环 A 的乘法半群是由其幂等元集生成的, 如果 A 不含无限多个两两正交的幂等元, 则 A 是有限布尔环.

证 由定理 3 的推论 1 知 $A/I(A) = \sum \oplus A_\alpha$, 其中 A_α 是域上全阵环, 因为 A 的乘法半群是由其幂等元生成的且 $I(A)$ 是诣零的, 故 A_α 的乘法半群也是由其幂等元生成的. 根据 [4] 的定理 1, A_α 是布尔环, 这样 A_α 只能同构于 $\mathbb{Z}_2$ (以 2 为模的剩余类环). 又 A 不含无限多个两两正交的幂等元集, 并注意到 $A/I(A)$ 中的幂等元可提升到 A 中 (参见 [5] p. 54. 命题 5)

于是可得 $A = \sum_{\alpha=1}^n \oplus A_\alpha$. 这样类似 [4] 中定理 1 的证明可得定理 7.

参 考 文 献

- (1) F.A.Sz4sz: Radicals of Rings, Akademiai kiado Budapest, 1981.
- (2) 刘绍学:《环与代数》, 科学出版社, 1983.
- (3) F.A.Sz4sz: Über Ringe mit Minimal bedingung für Hauptideale I. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12(1961), 417—436.
- (4) You Hong: I-ring with D. C. C. «东北师大学报» 自然科学版, 4 (1984), 27—29.
- (5) N. Jacobson: Structure of Rings (providence, 1954).

NOTE ON A CLASS OF MHR-RINGS

HUI CHANGCHANG

ABSTRACT

By an MHR-ring we mean a ring with minimum condition on principal right ideas. By a CMHR-ring we mean that every subring of it is an MHR-ring. In this note we discuss this class of CMHR-rings, and prove the following theorems.

Theorem 1 Let A be a CMHR-ring, then

(1) $Z(A)=G(A)$, where Z denotes the lower radical determined by the class of all zero-ring of prime number order. G stands for the Brown-McCoy radical.

(2) If A is semisimple in the sense of Jacobson, then A is a direct sum of full matrix rings over fields.

(3) If A is simple then $A \cong F_n$ for some $n \in N$, where F is an algebraic extension field over a prime field $Z/(p)$.

Theorem 2 Let A be a CMHR-ring with an unique idempotent element e . Then $A=F \oplus J(A)$ if $eJ(A)=0$, where $J(A)$ is the Jacobson radical.

Theorem 3 Suppose that A is a CMHR-ring and that the product somi-group is generated by its idempotent elements. And if A has no infinite set of pairwise orthogonal idempotent elements, then A is a finite Boolean ring.