

# 关于 Morita 型稳定等价的一些新进展

惠昌常\* 刘玉明\*\*

(北京师范大学数学科学学院; 教育部数学与复杂系统实验室, 北京, 100875)

**摘要:** 在代数及其表示中, Morita 等价、导出等价和稳定等价这三种基本等价关系颇受关注, 其中, 前两种等价关系都有张量函子的刻画, 而最后一种, 至今没有类似的结果. 作为一种特殊的稳定等价, Morita 型稳定等价在有限群模表示论中首先引入和研究. 这个概念与 Broué 的 Abel 亏群猜想相关; 目前已在 Artin 代数上加以研究. 本文将介绍 Morita 型稳定等价近年来的一些最新进展, 并尝试对其研究历史做一些综述, 同时介绍一些未解决的相关问题.

**关键词:** Morita 型稳定等价; Morita 等价; 稳定等价; 导出等价

**MR(2000) 主题分类:** 16D90; 16G10; 18E30; 20C20 / **中图分类号:** O153.3; O154.2

**文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0917(2008)04-0385-07

## 1 背景、定义和一些已知结果

### 1.1 代数和表示中的三种等价关系

在数学研究中, 往往需要研究不同对象间的某种关系, 通过这种关系, 将未知对象的研究转化为一个熟悉和易了解对象的相关问题的研究. 在群, 环和代数的表示理论中, 一个主要目的是刻画和比较它们的模范畴, 以及与之相关的其它范畴 (例如稳定范畴, 导出范畴等) 的性质、结构和应用. 研究这些范畴之间的等价关系有助于我们把握不同对象之间的本质联系. 在代数表示论中, 有三种重要的等价关系颇受关注: Morita 等价、导出等价和稳定等价, 其中 Morita 等价和导出等价都有比较漂亮的一套理论<sup>[27, 31-33]</sup>, 相对而言, 对稳定等价的认知似乎还很有限. 近些年来, 人们开始研究一种特殊的稳定等价, 即 Morita 型稳定等价, 它是研究有限群模表示论中著名的 Broué 猜想时引发出来的. 在一般 Artin 代数上, 许多研究表明, 这个概念也是很有意义的.

为了简单, 设  $A$  是域  $k$  上的有限维代数, 它的有限生成左模范畴记作  $A\text{-mod}$ .

**Morita 等价** 两个代数  $A$  和  $B$  称为 Morita 等价, 如果它们的模范畴是等价的, 即  $A\text{-mod} \simeq B\text{-mod}$ . 经典的 Morita 理论<sup>[27]</sup> 断言, 每个 Morita 等价都由一个双模通过张量积诱导. 具体地说,  $A$  与  $B$  是 Morita 等价的当且仅当存在  $A$ - $B$ -双模  ${}_A P_B$  ( $P$  作为左模与右模都是投射的) 使得  $P \otimes_B - : B\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$  是等价函子. Morita 等价的代数, 可以说具有完全一样的表示理论. 关于 Morita 等价及其不变量, 在许多标准教科书中都有详细介绍 (例如 [3]), 在此略去.

**导出等价**  $A\text{-mod}$  上有界复形的导出范畴记作  $D^b(A)$ . 粗略地说,  $D^b(A)$  是  $A\text{-mod}$  的有界复形同伦范畴  $K^b(A)$  的局部化, 它是三角范畴 (例如参看 [18]). 两个代数  $A$  与  $B$  称为导出等

收稿日期: 2007-05-17. 修改稿收到日期: 2007-07-17.

基金项目: 国家自然科学基金、德国洪堡基金会和北京师范大学“985 工程”创新群体项目“表示论及相关课题”.  
E-mail: \* xicc@bnu.edu.cn; \*\* liuyum2@263.net

价, 如果三角范畴  $D^b(A)$  和  $D^b(B)$  等价. 导出范畴是上世纪 60 年代由 Grothendieck 和 Verdier 在研究代数几何时提出来的 [39]. 20 多年后, 导出范畴的概念被引入到代数表示论中, Happel 首先利用倾斜模对整体维数有限的代数给出导出等价的一个充分条件 [15], Cline, Parshall 和 Scott 将其推广到整体维数无限的情形 [11]. 随后, Rickard (1998 年 ICM 做 45 分钟报告) 在一系列文章中建立了导出范畴的 Morita 理论 [31–33]. Keller (2006 年 ICM 做 45 分钟报告) 利用微分分次代数的理论对导出等价也做了深入研究 [16]. 根据导出范畴的 Morita 理论, 代数  $A$  与  $B$  是导出等价的当且仅当存在一个  $A$ - $B$ - 双模的复形  $T$  (称之为双边倾斜复形, 它作为单边复形是由投射模构成的), 使得复形的左导出张量积函子  $T \otimes_B^L -: D^b(B) \rightarrow D^b(A)$  是一个等价.

导出等价保持代数的中心、代数的 Grothendieck 群、代数的 Hochschild 上同调代数等 [18]. 特别地, 两个导出等价的代数有相同的单模个数. 另外, 与导出等价相关的有 Broué 的 Abel 亏群猜想:

**Broué猜想** 设域  $k$  的特征  $p > 0$ ,  $G$  是有限群. 假定  $B$  是群代数  $kG$  具有 Abel 亏群  $D$  的一个块代数, 那么  $B$  与它在  $kN_G(D)$  中的 Brauer 对应  $b$  是导出等价的, 其中  $N_G(D)$  是  $D$  在  $G$  中的正规化子.

由于导出等价拥有许多精细的块不变量 [10], Broué 猜想在当今有限群模表示论中扮演着重要的角色 [18, 34, 35]. 这个猜想已有一些研究结果, 但还没有完全解决. 详细的了解可见 Rickard 的网页: <http://www.maths.bris.ac.uk/~majcr/>.

**稳定等价** 模范畴  $A\text{-mod}$  的稳定范畴记作  $A\text{-}\underline{\text{mod}}$ , 其对象就是  $A\text{-mod}$  的对象; 两个对象  $X$  与  $Y$  的态射集为  $\underline{\text{Hom}}_A(X, Y) = \text{Hom}_A(X, Y)/\mathcal{P}(X, Y)$ , 其中  $\mathcal{P}(X, Y)$  是从  $X$  到  $Y$  所有可通过投射  $A$ -模分解的模同态构成的子空间. 两个代数  $A$  与  $B$  称为稳定等价, 如果它们的稳定范畴等价, 即  $A\text{-}\underline{\text{mod}} \simeq B\text{-}\underline{\text{mod}}$ . 对这种等价, 只在一些特殊的情形下给出了刻画, 如: 与遗传代数稳定等价的代数类 [4, 5]、与对称 Nakayama 代数稳定等价的代数类 [7, 14] 以及有限表示型的自入射代数类 [36] 等. 一般地, 稳定等价未必能由双模诱导.

Auslander 和 Reiten 用函子范畴的方法深入研究了稳定等价及其不变量 [5, 6]. 关于稳定等价, 有一个著名的 Auslander 猜想 [7]: 稳定等价保持代数的非投射单模个数. 这个猜想只在一些特殊的情形下得到验证 [7, 26].

这三种等价之间的关系是: Morita 等价必是导出等价和稳定等价. 若  $A$  是自入射代数, 则  $A\text{-}\underline{\text{mod}}$  具有三角范畴的结构 [15], 且是导出范畴  $D^b(A)$  的商范畴 [32]. 于是, 对自入射代数而言, 导出等价必是稳定等价 [32]. 但在一般代数类上, 导出等价和稳定等价是两个独立的概念. 甚至, 导出等价与下面要介绍的 Morita 型稳定等价也是相互独立的概念.

## 1.2 Morita 型稳定等价

下面我们将介绍 Morita 型稳定等价的定义, 并综述一些早期的主要结果.

稳定等价一般未必由具有双模性质的对象诱导. 但是, 在上个世纪 80 年代后期, 法国数学家 Broué 发现有限群的块代数之间经常出现一种由双模诱导的具有特殊性质的稳定等价, 比如在 Green 对应中. 尽管这些块代数之间有时并不导出等价, 但它们仍然保持一些重要的块不变量. 基于以上事实, Broué 引进了 Morita 型稳定等价的概念. 这是一种特殊的稳定等价.

**定义** [9, 10] 两个代数  $A$  与  $B$  称为 Morita 型稳定等价, 如果存在  $A$ - $B$ - 双模  ${}_A M_B$  以及  $B$ - $A$ - 双模  ${}_B N_A$  使得

(1)  $M$  和  $N$  作为左模与右模都是投射的, 并且

(2) 有  $A$ - $A$ -双模同构  $M \otimes_B N \simeq A \oplus P$  以及  $B$ - $B$ -双模同构  $N \otimes_A M \simeq B \oplus Q$ , 其中  $P$  和  $Q$  都是投射双模.

Morita 型稳定等价经常出现在有限群的块代数 (或更一般地, 自入射代数) 之间<sup>[10,20]</sup>. 一类典型例子就是互相倾斜的两个代数的平凡扩张<sup>[32,33]</sup>. 另外, 自入射代数上的合冲函子、Auslander-Reiten 变换等都是典型的自 Morita 型稳定等价的例子<sup>[19,1]</sup>.

### 1.3 与 Broué 猜想的关系

Broué 猜想是说, 在一定条件下, 有限群的两个块代数是导出等价的. Rickard 证明了自入射代数 (包括群代数及其块代数) 的导出等价诱导一个 Morita 型稳定等价<sup>[32,33]</sup>. 这样, Morita 型稳定等价就自然地与 Broué 猜想相关联. 另一方面, 由于对群代数投射模的结构所知甚少, 使得验证 Broué 猜想极为困难. 但是, 人们却知道许多块代数之间存在 Morita 型稳定等价. 所以, 如何得出从 Morita 型稳定等价推出导出等价的条件或结果, 这可能是解决 Broué 猜想的可行途径.

事实上, 这个方法是当今模表示论中验证许多情形下 Broué 猜想成立的有效手段之一. Okuyama, Rickard, Rouquier (2006 年 ICM 做 45 分钟报告) 等人采用这个思路成功地验证了几类特殊情形下 Broué 猜想成立<sup>[28,35,37]</sup>. 这个方法的要点是: 已知两个代数  $A$  与  $B$  是 Morita 型稳定等价. 为证  $A$  与  $B$  导出等价, 设法构造另一个代数  $C$ , 使  $C$  与  $B$  导出等价, 并且使得  $D^b(B)$  中与单  $C$ -模对应的对象正好是 Morita 型稳定等价下单  $A$ -模的象. 然后利用 Linckelmann 的一个定理<sup>[19, Theorem 2.1]</sup>, 得到  $A$  与  $C$  是 Morita 等价, 从而  $A$  与  $B$  导出等价.

### 1.4 一些已知结果

1990 年前后, Broué 引入 Morita 型稳定等价的概念并给出了有限群的块代数之间 Morita 型稳定等价的一批例子<sup>[9,10]</sup>, 证明了 Morita 型稳定等价保持一些重要的块不变量: 块代数的稳定中心、稳定 Grothendieck 群等. Broué 还给出了块代数上一个 Morita 型稳定等价但不导出等价的例子. 1991 年, Rickard 证明了导出等价的两个自入射代数之间存在一个 Morita 型稳定等价<sup>[33]</sup>. 1992 年, Stricker 证明了由导出等价诱导的 Morita 型稳定等价保持有限群的圈积 (wreath product), 并且给出了一个 Morita 型稳定等价不保持张量积的例子<sup>[38]</sup> (注意, 导出等价保持张量积). 1996 年, Linckelmann 证明了自入射代数的一个 Morita 型稳定等价成为 Morita 等价的充分必要条件是所给 Morita 型稳定等价保持单模与单模相对应. 利用这个结果, 他给出了离散赋值环上有限  $p$ -群的群代数在 Morita 型稳定等价下的分类定理<sup>[19,20]</sup> (特征为  $p$  的域上有限  $p$ -群的相应结果由 Carlson 和 Rouquier 在 2000 年得到<sup>[12]</sup>). Rickard 在 1998 年证明了自入射代数之间由正合函子诱导的稳定等价一定是 Morita 型稳定等价<sup>[34]</sup>. 2001 年, Pogorzały 证明了自入射代数的 Hochschild 上调群是 Morita 型稳定等价下的不变量<sup>[29]</sup>. 2003 年, Asashiba 给出了有限表示型自入射代数关于 Morita 型稳定等价的分类<sup>[1]</sup>, 这个结果推广了 Rickard 先前对 Brauer 树代数的工作<sup>[32]</sup>.

关于对称代数, 定义 Morita 型稳定等价的一对双模  $M$  和  $N$  构成两个伴随函子对:  $(N \otimes_A -, M \otimes_B -)$  与  $(M \otimes_B -, N \otimes_A -)$  都是伴随函子对<sup>[20]</sup> (adjoint pair of functors). 基于 Rickard 的一个观察<sup>[34]</sup>, Liu 和 Xi 在<sup>[24]</sup>中将这个性质推广到了自入射代数上. 代数上具有这个性质的 Morita 型稳定等价在<sup>[41]</sup>中称为伴随型稳定等价, 它有许多有趣的应用. 例如, 它在研究一般代数类上 Hochschild 上调群的证明中发挥了关键的作用 (见下面的第 2.2 节).

值得注意的是,关于 Morita 型稳定等价,上述所有这些结果都是在自入射代数上得到的.那么,在一般代数类上 Morita 型稳定等价的讨论,情况又是如何呢?对此,我们将在下一节中做介绍.

## 2 Morita 型稳定等价的一些新进展

在一般代数类上讨论 Morita 型稳定等价,首先遇到的一个关键问题是:是否存在非平凡的 Morita 型稳定等价?其次是,这样的研究是否有意义?关于第二个问题,答案是肯定的. Krause 证明了 Morita 型稳定等价保持代数的表示型<sup>[17]</sup>; Xi 证明了 Morita 型稳定等价保持表示维数<sup>[40]</sup>(关于表示维数的定义见 [2]),由此可得,自入射代数的导出等价保持表示维数; Pogorzaly 利用左右投射模的概念研究了 Morita 型稳定等价<sup>[30]</sup>; Liu 证明了 Linckelmann 的定理在一般的有限维代数上也成立<sup>[21]</sup>. 还有, Morita 型稳定等价保持代数的有限维数<sup>[40,24]</sup>,这有助于理解有限维数猜想(注意:导出等价和稳定等价一般不保持代数的有限维数).上述结果说明,一般代数类上 Morita 型稳定等价的研究是有意义的.然而,这些结果并没有解决一般代数类上 Morita 型稳定等价的存在问题.事实上,在我们开始研究之前,除自入射代数类之外,人们对一般有限维代数类上是否存在非平凡的 Morita 型稳定等价一无所知.对于这个问题以及相关问题,近年来我们做了一点讨论,主要集中在 Morita 型稳定等价的一般构造,不变量以及同调性质上.下面将综述我们以及其他学者在这方面的一些新进展,内容主要取自文献 [23-25, 41, 13, 22, 8].

### 2.1 存在性和若干构造方法

下面我们给出如何由一个已知的 Morita 型稳定等价构造新的 Morita 型稳定等价的一系列方法.这些结果表明,非自入射代数类上存在大量的 Morita 型稳定等价.

给定代数  $A$  和  $A$ -模  $X$ ,  $X$  的极大半单子模称为  $X$  的底座,记作  $\text{soc}(X)$ .  $\text{End}_A(X)$  表示模  $X$  的自同态代数,  $\text{add}(X)$  表示  $A\text{-mod}$  中由模  $X$  生成的可加满子范畴.

**第一种构造** 商代数的 Morita 型稳定等价. 设  $M$  和  $N$  定义了不可分解自入射  $k$ -代数  $A$  与  $B$  间的 Morita 型稳定等价. 如果存在单  $A$ -模  $S$  使得  $N \otimes_A S$  是单  $B$ -模,那么在商代数  $A/\text{soc}(P_1)$  与  $B/\text{soc}(P'_1)$  之间存在 Morita 型稳定等价,其中  $P_1$  和  $P'_1$  分别是  $A$  与  $B$  的正则分解中满足条件  $\text{soc}(P_1) \simeq S$  和  $\text{soc}(P'_1) \simeq N \otimes_A S$  的投射模.

通过这种构造,就可以得到非自入射代数类上 Morita 型稳定等价的一批例子.同时也说明 Morita 型稳定等价不保持拟遗传性<sup>[23]</sup>.

**第二种构造** 单点扩张代数的 Morita 型稳定等价. 假定  $M$  与  $N$  定义了  $k$ -代数  $A$  与  $B$  间的 Morita 型稳定等价. 如果  $R$  是  $A$ -模,满足  $M \otimes_B N \otimes_A R \simeq R$ ,则单点扩张代数  $\begin{pmatrix} A & R \\ 0 & k \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} B & N \otimes_A R \\ 0 & k \end{pmatrix}$  Morita 型稳定等价.

在有限群的块代数之间存在满足第二种构造法所需条件的大量例子. [23] 中给出了模  $R$  的一些选法;并利用挠理论 (torsion theory) 对模范畴进行分划,证明了如果代数是自入射代数, Morita 型稳定等价还能给出子范畴之间的对应关系.

**第三种构造** 自同态代数的 Morita 型稳定等价. 假定  $M$  与  $N$  定义了代数  $A$  与  $B$  间的 Morita 型稳定等价. 如果  $R$  是  $A$ -模,满足  ${}_A A \in \text{add}(R)$ ,则自同态代数  $\text{End}_A(R)$  与  $\text{End}_B(N \otimes_A R)$  Morita 型稳定等价.

第三种方法使得构造 Morita 型稳定等价极为方便. 下面是它的一些应用<sup>[24,25]</sup>.

(1) 设  $A$  和  $B$  是两个表示有限型的代数. 若  $A$  与  $B$  为 Morita 型稳定等价, 则它们的 Auslander 代数也 Morita 型稳定等价. 最近, 这个命题的逆命题也被证明.

一个代数叫做 Auslander 代数, 如果它的整体维数不超过 2 且支配维数不少于 2. Auslander 曾证明, 表示有限型代数的 Morita 等价类与 Auslander 代数的 Morita 等价类一一对应<sup>[2]</sup>. 结论 (1) 给出了上述两类代数在 Morita 型稳定等价下的一一对应关系.

(2) 设  $A$  是自入射代数,  $X$  是  $A$ -模. 则对所有整数  $n$ , 代数  $\text{End}_A(A \oplus X)$  和  $\text{End}_A(A \oplus \Omega_A^n(X))$  均为 Morita 型稳定等价; 且与  $\text{End}_A(A \oplus \tau_A^n(X))$  也 Morita 型稳定等价, 其中  $\Omega$  和  $\tau$  分别代表自入射代数上的合冲算子 (syzygy) 和 Auslander-Reiten 变换.

根据 (2), 可以构造出一个无限的代数列, 使得它们彼此 Morita 型稳定等价但不 Morita 等价<sup>[25]</sup>.

## 2.2 Hochschild 同调群和上同调群

Hochschild 同调群和上同调群是代数的重要同调性质. 关于 Hochschild 同调群, Liu 和 Xi 在 [24] 中证明了: 对所有的  $n \geq 1$ , 有限维代数的  $n$  阶 Hochschild 同调群是 Morita 型稳定等价下的不变量.

关于 Hochschild 上同调群, Pogorzaly 首先证明了, 对所有的  $n \geq 1$ , 自入射代数的  $n$  阶 Hochschild 上同调群是 Morita 型稳定等价下的不变量<sup>[29]</sup>. 文 [24] 给出了另一个不同的证明. 一个自然的问题是: 这个结论是否对一般有限维代数仍然成立? 为了解决这问题, Xi 在一般代数类上引入了伴随型稳定等价的概念<sup>[41]</sup>, 这是由双伴随函子对诱导的 Morita 型稳定等价. 利用伴随型稳定等价的特性以及同调谱序列的技巧, Xi 证明了: 如果 Artin 代数  $A$  和  $B$  在基础环上投射, 且存在一个伴随型稳定等价, 那么, 对所有的  $n \geq 1$ , 代数  $A$  和  $B$  都有同构的  $n$  阶 Hochschild 上同调群. 因此, 对于有限维代数, 如果一个 Morita 型稳定等价就是 (或诱导) 一个伴随型稳定等价, 则上述问题就得到肯定回答.

最近, Dugas 和 Martinez-Villa 在有限维代数有可分半单商的条件下证明了: 如果一个正合函子诱导出两个代数  $A$  与  $B$  之间的 Morita 型稳定等价, 则这两个代数事实上还是伴随型稳定等价<sup>[13]</sup>. 于是, 根据 [41], 它们的高阶上同调群也是同构的. 文 [13] 中另一个有趣的结论是: 如果有限维代数  $A$  与  $B$  是 Morita 型稳定等价, 那么存在幂等元  $e \in A$  和  $f \in B$ , 使得  $eAe$  和  $fBf$  是自入射代数, 且在  $eAe$  和  $fBf$  之间有一个 Morita 型稳定等价.

上面我们谈了 Morita 型稳定等价的 Hochschild 上同调不变量. 事实上, Morita 型稳定等价还有其他的一些不变量. 如 Beligannis 证明了 Gorenstein 性质是一般 Morita 型稳定等价下的不变量<sup>[8]</sup>. Xi 证明了 Morita 型稳定等价保持代数 Cartan 矩阵行列式的绝对值<sup>[41]</sup>. 特别地, 若胞腔代数  $A$  和  $B$  是 Morita 型稳定等价的, 则它们有相同的 Cartan 行列式. Liu 研究了 Morita 型稳定等价下不可分解模的对应, 并由此证明了自入射代数类在 Morita 型稳定等价下封闭<sup>[22]</sup>. 另外, 我们说过, Morita 型稳定等价保持代数的有限维数. 关于有限维数及相关问题, 读者可以参考综述文章 [42] 和最近的论文 [43].

以上我们简要介绍了 Morita 型稳定等价的研究历史和一些最新进展. 虽然一般代数类上 Morita 型稳定等价的存在性等问题解决了, 但对它的深入研究, 才刚刚起步, 有大量相关问题有待解决. 比如, 给定一个代数, 如何构造与它 Morita 型稳定等价的代数? Cartan 矩阵的行列式是否是 Morita 型稳定等价的不变量? 关于 Morita 型稳定等价的 Donovan 猜想成立吗? 再如: 分离扩张何时为 Morita 型稳定等价? 如何从 Morita 型稳定等价得到导出等价, 进而去验

证 Broué 猜想? Morita 型稳定等价是否保持代数的非投射单模个数等等. 关于更多的问题可见 [25, 34, 41].

## 参考文献

- [1] Asashiba, H., On a lift of an individual stable equivalence to a standard derived equivalence for representation-finite self-injective algebras, *Algebras and Representation Theory*, 2003, 6(4): 427-447.
- [2] Auslander, M., Representation Dimension of Artin Algebras, Queen Mary College Mathematics Notes, Queen Mary College, London, 1971.
- [3] Anderson, F.W. and Fuller, K.R., Rings and Categories of Modules, Graduate Texts in Math. 13, 1973.
- [4] Auslander, M. and Platzeck, I., Representation theory of hereditary artin algebras, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1978, 37: 389-424.
- [5] Auslander, M. and Reiten, I., Stable equivalence of Artin algebras, *Proceedings of the Conference on Orders, groups and related topics*, Lecture Notes in Math., 1973, 353: 8-71.
- [6] Auslander, M. and Reiten, I., Stable equivalence of dualizing  $R$ -varieties I, *Adv. Math.*, 1974, 12: 306-366.
- [7] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, S., Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, 1995.
- [8] Beligannis, A., Cohen-Macaulay modules, (co)torsion pairs and virtually Gorenstein algebras, *J. Algebra*, 2005, 288: 137-211.
- [9] Broué, M., On Representations of Symmetric Algebras: An Introduction, Course Notes by M. Stricker, Forschungsinstitut für Mathematik der ETH Zürich, 1991.
- [10] Broué, M., Equivalences of Blocks of Group Algebras, *Finite Dimensional Algebras and Related Topics*, V. Dlab and L. L. Scott(eds.), Kluwer, 1994: 1-26.
- [11] Cline, E., Parshall, B.J. and Scott, L.L., Derived categories and Morita theory, *J. Algebra*, 1986, 104(2): 397-409.
- [12] Carlson, J.F. and Rouquier, R., Self-equivalences of stable module categories, *Math. Z.*, 2000, 233: 165-178.
- [13] Dugas, A.S. and Martinez-Villa, R., A note on stable equivalence of Morita type, *J. Pure Appl. Algebra*, 2007, 208(2): 421-433.
- [14] Gabriel, P. and Riedtmann, C., Group representations without groups, *Comment. Math. Helv.*, 1979, 54: 240-287.
- [15] Happel, D., Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras, London Math. Soc. Lecture Notes vol. 119, Cambridge University Press, 1988.
- [16] Keller, B., Chain complexes and stable categories, *Manuscr. Math.*, 1990, 67: 379-417.
- [17] Krause, H., Representation type and stable equivalences of Morita type for finite dimensional algebras, *Math. Z.*, 1998, 229: 601-606.
- [18] König, S. and Zimmermann, A., Derived Equivalences for Group Rings, Lecture Notes in Math. vol. 1685, Springer, 1998.
- [19] Linckelmann, M., Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and  $p$ -groups, *Math. Z.*, 1996, 223: 87-100.
- [20] Linckelmann, M., On stable equivalences of Morita type, *Derived Equivalences for Group Rings*, Lecture Notes in Math., Springer, 1998, 1685: 221-232.
- [21] Liu Y.M., On stable equivalences of Morita type for finite dimensional algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2003, 131: 2657-2662.
- [22] Liu Y.M., On stable equivalences induced by exact functors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2006, 134: 1605-1613.
- [23] Liu Y.M. and Xi C.C., Constructions of stable equivalences of Morita type for finite dimensional algebras I., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2006, 358: 2537-2560.
- [24] Liu Y.M. and Xi C.C., Constructions of stable equivalences of Morita type for finite dimensional algebras, II, *Math. Z.*, 2005, 251(1): 21-39.
- [25] Liu Y.M. and Xi C.C., Constructions of stable equivalences of Morita type for finite dimensional algebras, III, *J. London Math. Soc.*, in press.
- [26] Martinez-Villa, R., Properties that are left invariant under stable equivalence, *Comm. Algebra*, 1990, 18: 4141-4169.
- [27] Morita, K., Duality of modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. Sect. A6*, 1958: 85-142.
- [28] Okuyama, T., Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, preprint, 1998.
- [29] Pogorzaly, Z., Invariance of Hochschild cohomology algebras under stable equivalences of Morita type, *J. Math. Japan*, 2001, 53(4): 913-918.
- [30] Pogorzaly, Z., Left-right projective bimodules and stable equivalences of Morita type, *Colloq. Math.*, 2001, 88(2): 243-255.
- [31] Rickard, J., Morita theory for derived categories, *J. London Math. Soc.*, 1989, 39: 436-456.
- [32] Rickard, J., Derived categories and stable equivalences, *J. Pure Appl. Algebra*, 1989, 61: 303-317.
- [33] Rickard, J., Derived equivalences as derived functors, *J. London Math. Soc.*, 1991, 43: 37-48.

- [34] Rickard, J., Some recent advances in modular representation theory, *Canad. Math. Soc. Conf. Proc.* **23**, 1998: 157-178.
- [35] Rickard, J., Equivalences of derived categories for symmetric algebras, *J. Algebra*, 2002, **257**: 460-481.
- [36] Riedtmann, Ch., Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück, *Comment. Math. Helv.*, 1980, **55**: 199-224.
- [37] Rouquier, R., Block theory via stable and Rickard equivalences, *Modular representation theory of finite groups*, de Gruyter, Berlin, 2001: 101-146.
- [38] Stricker, M.A., Morita equivalences and stable equivalences for wreath products of finite groups, *Comm. Algebra*, 1992, **20**(12): 3691-3701.
- [39] Verdier, J. L., Catégories dérivées, état 0, *Lecture Notes in Mathematics vol. 569*, Springer-Verlag, Berlin, 1977: 262-311.
- [40] Xi C.C., Representation dimension and quasi-hereditary algebras, *Adv. Math.*, 2002, **168**(2): 280-298.
- [41] Xi C.C., Stable equivalences of adjoint type, *Forum Math.*, (in press).
- [42] 惠昌常, 关于有限维数猜想的一些新进展, *数学进展*, 2007, **36**(1): 13-17.
- [43] Xi C.C. and Xu D.M., On the finitistic dimension conjecture, IV: related to relatively projective modules, Preprint, 2007. Preprint is available at <http://math.bnu.edu.cn/~ccxi/Papers/Articles/xixu.pdf/>.

## Some New Developments on Stable Equivalences of Morita Type

XI Changchang, LIU Yuming

(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, MOE, Beijing, 100875, P. R. China)

**Abstract:** Stable equivalence of Morita type is one of the important equivalence relations in the representation theory of finite groups and Artin algebras. It is closely related to Broué's abelian defect group conjecture. In this note, we survey some old and recent developments on stable equivalences of Morita type, and mention some unsolved problems on the subject.

**Key words:** stable equivalence of Morita type; Morita equivalence; stable equivalence; derived equivalence