Reprinted from JOURNAL OF ALGEBRA
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London

Vol. 145, No. 2, February 1, 1992
Printed in Belgium

Die Vektorraumkategorie zu einem Punkt einer zahmen verkleideten Algebra

CHANGCHANG XI*

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 8640, D-4800 Bielefeld 1, Germany

Communicated by A. Fröhlich

Received January 2, 1990

1. EINLEITING UND ERGEBNISSE

Vektorraumkategorien wurden von Nazarova und Roiter in [NR] eingeführt und in vielen Arbeiten intensiv studiert. Sie sind eine fruchtbare Methode in der Darstellungstheorie.

In dieser Arbeit untersuchen wir den Zusammenhang zwischen zahmen verkleideten Algebren und Vektorraumkategorien und geben eine kanonische Zerlegung der Vektorraumkategorie zu einem Punkt einer zahmen verkleideten Algebra an.

Es sei A eine zahme verkleidete Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, d.h. A ist der Endomorphismenring eines präprojektiven Kippmoduls über einer zusammenhängenden zahmen erblichen k-Algebra. Die zahmen verkleideten Algebren sind durch die Bongartz–Happel–Vossieck–Liste (siehe [HV]) wohlbekannt. Wir setzen voraus, daß A eine Basisalgebra ist. Die Algebra A kann durch einen Köcher mit Relationen beschrieben werden (siehe [Ri]). Die Punkte des Köchers werden einfach die Punkte von A genannt. Sei x ein Punkt von A. Mit $P(x)$ bezeichnen wir den unzerlegbaren projektiven A-Modul zum Punkt x. Sei A-ind eine volle Unterkategorie der Kategorie A-mod aller endlich dimensionalen A-Linksmoduln, die genau einen Modul aus jeder Isomorphieklasse unzerlegbarer A-Moduln enthält. Ferner sei τ die Auslander–Reiten-Verschiebung. Setze

$$S_x^A = \{M \in A\text{-ind} \mid M \ncong P(x), \operatorname{Hom}_A(P(x), M) \neq 0 \text{ und } \operatorname{Hom}_A(P(x), \tau M) = 0\}.$$

Auf der endlichen Menge S_x^A definieren wir eine Relation $\leqslant$ wie folgt:

$$X \leqslant Y \Leftrightarrow \text{es gibt } f \in \operatorname{Hom}(Y, X) \text{ mit } \operatorname{Hom}(P(x), f) \neq 0.$$

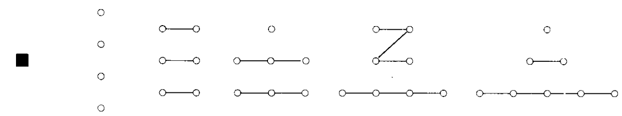
* Neue Anschrift: Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, P.R. China.

0021-8693/92 $3.00

Wie in [Ri] definiert man eine Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf der Grothendieckgruppe $K_0(A)$ vermöge $\langle \underline{\dim}\, X, \underline{\dim}\, Y \rangle = \sum_{t \geqslant 0} (-1)^t \dim_k \operatorname{Ext}^t_A(X, Y)$. Die zugehörige quadratische Form wird mit χ_A bezeichnet. Sie ist positiv semidefinit, und es gibt einen minimalen positiven Radikalvektor h^A von χ_A. Es gilt $1 \leqslant h_i^A \leqslant 6$ für jede Komponente h_i^A von h^A.

Gemäß [Ri] werden die Vektorraumkategorien

$\mathscr{C}(1)$ $\mathscr{C}(2)$ $\mathscr{C}(3)$ $\mathscr{C}(4)$ $\mathscr{C}(5)$ $\mathscr{C}(6)$



kritische Mengen vom Typ $\mathscr{C}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant 6$ genannt. Bei den Halbordnungen stehen links die großen, rechts die kleinen Elemente. Beachte, daß das einzige unzerlegbare Objekt in $\mathscr{C}(1)$ zweidimensional ist. Wir setzen $\partial' X := \langle h^A, \underline{\dim}\, X \rangle / \dim \operatorname{Hom}(P(x), X)$ und

$$L_x^A = \{X \in S_x^A \mid \partial' X = -h_x^A\}$$
$$C_x^A = \{Y \in S_x^A \mid -h_x^A < \partial' Y < 0\}$$
$$R_x^A = \{Z \in S_x^A \mid \partial' Z = 0\}.$$

Unsere Hauptergebnisse sind die folgenden Sätze:

SATZ I. (1) *Der Modul* $\bigoplus_{Y \in C_x^A} Y \oplus \bigoplus_{Z \in R_x^A} Z \oplus P(x)$ *ist ein Kippmodul.*

(2) *Der Modul* $\bigoplus_{X \in L_x^A} X \oplus \bigoplus_{Y \in C_x^A} Y \oplus P(x)$ *ist ein Kippmodul, und die Summe* $\bigoplus_{X \in L_x^A} X$ *ist das einzige präprojektive Komplement zu* $\bigoplus_{Y \in C_x^A} Y \oplus P(x)$.

(3) C_x^A *ist eine kritische Menge bzgl.* $\leqslant$ *vom Typ* $\mathscr{C}(h_x^A)$.

SATZ II. (1) *Es gibt genau eine gerichtete kritische Vektorraumkategorie in* add S_x^A. *Sie ist* (add C_x^A, $\operatorname{Hom}(P(x), -)$) *und vom Typ* $\mathscr{C}(h_x^A)$.

(2) (add$(C_x^A \cup L_x^A)$, $\operatorname{Hom}(P(x), -)$) *ist eine domestizierte tubulare Koerweiterung der Vektorraumkategorie* (add C_x^A, $\operatorname{Hom}(P(x), -)$).

(3) (add$(C_x^A \cup R_x^A)$, $\operatorname{Hom}(P(x), -)$) *ist eine domestizierte tubulare Erweiterung der Vektorraumkategorie* (add C_x^A, $\operatorname{Hom}(P(x), -)$).

Also haben wir eine Zerlegung der Vektorraumkategorie (add S_x^A, $\operatorname{Hom}(P(x), -)$), die mit folgendem Bild illustriert werden kann:

$\partial' M$ $< -h_x^A$	L_x^A	C_x^A	R_x^A	$\partial' N$ > 0

Für die nicht erklärten Begriffe und Bezeichnungen, die in dieser Arbeit auftauchen werden, verweisen wir auf [Ri].

Diese Arbeit ist ein Teil meiner Dissertation unter Betreuung von C. M. Ringel. Ihm gilt mein herzlicher Dank. Ich danke auch P. Dräxler, D. Happel für ihre Hilfe bei der Formulierung und Frau Köllner für das Schreiben dieser Arbeit.

An dieser Stelle möchte ich auch M. C. R. Butler und S. Brenner für ihre hilfreiche Diskussion über diese Arbeit und dem Science and Engineering Research Council für die Unterstützung meines Aufenthalts in Liverpool herzlich danken.

2. Die Existenz und Eindeutigkeit der kritischen Menge in S_x^A

Wir setzen immer voraus, daß A eine zahme verkleidete Algebra und x ein Punkt von A ist. Eine Teilmenge $K \subseteq S_x^A$ mit r Elementen heißt eine kritische Menge vom Typ $\mathscr{C}(i)$, wenn die Vektorraumkategorie (add K, $\operatorname{Hom}(P(x), -)$) eine Vektorraumkategorie vom Typ $\mathscr{C}(i)$ ist (siehe [Ri]). In diesem Abschnitt geben wir einen Beweis zur Existenz und Eindeutigkeit der kritischen Menge in S_x^A. Als ein Haupthilfsmittel des Beweises benutzen wir die folgenden Ergebnisse in [X].

2.0. Definition [Ri]. Sei $(\mathscr{K}, |\cdot|)$ eine Vektorraumkategorie vom Typ $\mathscr{C}(i)$. Der Defekt eines Objektes V aus $\check{\mathscr{U}}(\mathscr{K}, |\cdot|)$ ist definiert durch

$$\partial^{\mathscr{K}} V = \langle h^{\mathscr{K}}, \underline{\dim}_{\mathscr{K}} V \rangle.$$

Dabei ist $h^{\mathscr{K}} = (\iota_1, ..., \iota_r, i)$ der minimale positive Radikalvektor der zu $(\mathscr{K}, |\cdot|)$ gehörigen quadratischen Form $\chi_{\mathscr{K}}$.

Bemerkung. Es gilt $-i < \partial^{\mathscr{K}} M < 0$ für jedes unzerlegbare Objekt M in $\mathscr{K}$.

2.1. Lemma. *Sei $K = \{M_1, ..., M_r\}$ eine kritische Menge in S_x^A vom Typ $\mathscr{C}(i)$. Dann gilt $i = h_x^A$, und es gibt eine exakte Sequenz der Form*

$$0 \to P(x)^{h_x^A} \to \bigoplus_{j=1}^{r} M_j^{\iota_j} \to H \to 0$$

mit unzerlegbarem A-Modul H und $\underline{\dim}\, H = h^A$.

Beweis. Siehe Satz 4.1. in [X]. ∎

Bemerkung. Nach 4.2 in [X] gilt $\partial^{\mathscr{K}} M_i = \langle h^A, \underline{\dim}\, M_i \rangle$ für jeden gerichteten A-Modul M_i aus K.

2.2. PROPOSITION. *Sei A eine zahme verkleidete Algebra und x ein Punkt von A, und sei $X \in S_x^A$. Dann gelten*

(1) $\mathrm{End}(X) \cong k$,

(2) $\mathrm{Ext}^i(X, X) = 0$ *für alle* $i > 0$,

(3) $\dim \mathrm{Hom}(P(x), X) \leqslant 2$,

(4) *Falls* $h_x^A \neq 1$ *ist, ist* $\dim \mathrm{Hom}(P(x), X) = 1$.

Beweis. (1) und (2). Ist X präprojektiv oder präinjektiv, so gibt es nichts zu beweisen. Nun sei X ein regulärer A-Modul. Da τX nicht aufrichtig ist, gilt $\mathrm{End}(X) \cong k$ und $Ext^i(X, X) = 0$ für alle $i > 0$.

(3) Folgt aus [X, Lemma 2.1].

(4) Folgt aus 2.1. ∎

2.3. LEMMA. *Sei B eine enlich-dimansionale Algebra und* gl.dim. $B < \infty$. *Ist $T = \bigoplus_{i=1}^{n} T(i)$ ein B-Kippmodul, wobei $T(i) \not\cong T(j)$ für $i \neq j$ gilt und alle $T(i)$ unzerlegbar sind, so sind* $\underline{\dim}\, T(1), \ldots, \underline{\dim}\, T(n)$ *$\mathbb{Q}$-linear unabhängige Vektoren.*

Beweis. Die Cartan-Matrix C_B ist invertierbar, aus [Ri, 4.1(7)] folgt nun sofort die Behauptung. ∎

2.4. Seien $X, Y \in A$-mod, $m = \dim \mathrm{Ext}_A^1(Y, X) \neq 0$. Dann gibt es eine exakte Sequenz $0 \to X^m \to E \to Y \to 0$, so daß $\mathrm{Hom}(X^m, X) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(Y, X)$ surjektiv ist. Diese exakte Sequenz wird universelle exakte Sequenz von X und Y genannt. Im folgenden schreiben wir manchmal ${}^i(X, Y)$ statt $\mathrm{Ext}^i(X, Y)$ für $i > 0$ und (X, Y) statt $\mathrm{Ext}^0(X, Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$.

PROPOSITION. *Sei A eine zahme verkleidete Algebra und x ein Punkt. Sei H ein unzerlegbarer einfach regulärer A-Modul mit $\underline{\dim}\, H = h^A$, d.h. H ist ein homogener A-Modul. Betrachte die universelle exakte Sequenz*:

$$0 \to P(x)^{h_x^A} \to M \to H \to 0.$$

Setze $K_x^A := \{X \in A\text{-ind} \mid X$ *ist ein direkter Summand von* $M\}$. *Dann ist* $\mathcal{K}_x^A := (\mathrm{add}\, K_x^A, \mathrm{Hom}(P(x), -))$ *eine gerichtete kitische Vekorraumkategorie vom Typ* $\mathscr{C}(h_x^A)$.

Beweis. Gemäß [X, 1.2] ist $M \in \mathrm{add}\, S_x^A$. Es ist trivial, daß jeder direkte Summand von M präprojektiv ist. Nun werden wir die Definitionsbedingungen einer kritischen Vektorraumkategorie [Ri, p. 101] nachprüfen.

(α) Sei $|\cdot| = \mathrm{Hom}(P(x), -)$, dann ist, wie man leicht sieht, $|\cdot|$ treu auf $\mathrm{add}\, K_x^A$.

(β) $\check{\mathscr{U}}(\mathscr{K}_x^A)$ ist eine unendliche Kategorie. Wir zeigen die folgende Aussage:

Sei $H[m]$ der Modul, der unzerlegbar und von regulärer Länge m mit regulärem Sockel H ist, dann existiert eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to P(x)^{mh_x^A} \to M^m \to H[m] \to 0.$$

Wir zeigen dies mit Induktion nach m. Wir erhalten $H[m]$ vermöge der exakten Sequenz

$$0 \to H[m-1] \to H[m] \to H \to 0$$

und wegen proj.dim. $M \leqslant 1$ und $\mathrm{Ext}^1(M, M) = 0$ ist das nächste Diagramm durch M^m zum kommutativen Diagramm ergänzbar:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(x)^{(m-1)h_x^A} \arrow[r] \arrow[d] & M^{m-1} \arrow[r] \arrow[d] & H[m-1] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P(x)^{mh_x^A} \arrow[r, "\gamma_m"] \arrow[d] & M^m \arrow[r] \arrow[d] & H[m] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P(x)^{h_x^A} \arrow[r] & M \arrow[r] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nun setze $V_m = (M^m, k^{mh_x^A}, \gamma_m)$, dann sind V_m für $m = 1, 2, \ldots$. Objekte von $\check{\mathscr{U}}(\mathscr{K}_x^A)$. Da $H[m] \not\cong H[n]$ für $m \neq n$ ist, ist $V_m \not\cong V_n$ für $m \neq n$. Also ist $\check{\mathscr{U}}(\mathscr{K}_x^A)$ eine unendliche Kategorie.

(γ) Jeder echte Unterfunktor $|\cdot|'$ von $|\cdot|$ (bzw. echte Faktorfunktor $|\cdot|'$ von $|\cdot|$) induziert eine unterraumendliche Vektorraumkategorie $(\mathrm{add}\, K_x^A, |\cdot|')$.

Falls $h_x^A = 1$ ist, gilt $\dim \mathrm{End}(M) = \dim \mathrm{Hom}(M, H) = \dim \mathrm{Hom}(P(x), H) + \dim \mathrm{End}(H) - \dim \mathrm{Ext}^1(H, H) = h_x^A + 1 - 1 = 1$, also ist M unzerlegbar, und somit ist $(\mathrm{add}\, K_x^A, |\cdot|)$ eine kritische gerichtete Vektorraumkategorie vom Typ $\mathscr{C}(1)$. Deswegen nehmen wir an, daß $h_x^A \neq 1$ ist. Nach 2.2 gilt $|X| = k$ für alle X in K_x^A. Um (γ) zu beweisen, genügt es nun zu zeigen, daß für jede echte Teilmenge T von K_x^A die Kategorie $\check{\mathscr{U}}(\mathrm{add}\, T, |\cdot|)$ endlich ist.

Es wird bemerkt, daß wegen (α) die Vektorraumkategorie $\mathscr{K}_x^A$ eine Vektorraumkategorie gegeben durch die Halbordnung K_x^A bezüglich $\leqq$ ist.

Angenommen $\check{\mathscr{U}}(\mathrm{add}\, T, |\cdot|)$ ist unendlich. Dann enthält T eine Teilmenge T', so daß $(\mathrm{add}\, T', |\cdot|)$ eine Vektorraumkategorie vom Typ $\mathscr{C}(i)$ ist. Ohne Einschränkung können wir voraussetzen, daß $T = T'$ ist. Nach 2.1 gilt $i = h_x^A$, und es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \to P(x)^{h_x^A} \to \bigoplus_{M_i \in T} M_i^{t_i} \to H_1 \to 0$$

mit $\underline{\dim}\, H_1 = h^A$. Also gilt

$$\sum_{M_i \in T} t_i \,\underline{\dim}\, M_i = h^A + h_x^A p(x) = \sum_{M_j \in K_x^A} s_j \,\underline{\dim}\, M_j.$$

M ist ein partieller A-Kippmodul und gemäß dem Lemma 2.3 muß $T = K_x^A$ gelten. Dies ist ein Widerspruch. Mit derselben Argumentation überlegt man sich leicht, daß K_x^A eine Halbordnung bzgl. $\leqq$ vom Typ $\mathscr{C}(h_x^A)$ bildet und $\mathscr{K}_x^A$ eine durch die Halbordnung K_x^A gegebene Vektorraumkategorie ist. ▮

2.5. Lemma. *Es gibt genau eine kritische Menge in* S_x^A.

Beweis. Sei $K_x^A = \{M_1, ..., M_r\}$ die vom Lemma 2.4 gelieferte kritische Menge. Sei $K = \{N_1, ..., N_s\}$ auch eine kritische Menge. Nach 2.1 sind die beiden vom Typ (h_x^A) und $r = s$.

Sei $h_x^A \neq 1$, dann ist die Algebra A nicht vom Typ $\tilde{\mathbb{A}}_n$. Der Röhrentyp von A ist $(n_1, n_2, 2)$ mit $n_1 \geqq n_2 \geqq 2$. Sei $(m_1, m_2, 2)$ bzw. $(m_1', m_2', 2)$ der Röhrentyp von $\check{\mathscr{U}}(\mathscr{K}_x^A)$ bzw. von $\check{\mathscr{U}}(\text{add}\, K, \text{Hom}\, P(x), -))$, wobei $m_1 \geqq m_2 \geqq 2$ und $m_1' \geqq m_2' \geqq 2$ gelten. Da der Funktor Σ voll ist, gibt es eine Röhre $T(\rho)$ vom Rang 2 in $\check{\mathscr{U}}(\mathscr{K}_x^A)$ und eine Röhre $T(\rho')$ vom Rang 2 in $\check{\mathscr{U}}(\text{add}\, K, \text{Hom}(P(x), -))$, so daß das Bild von $T(\rho)$ bzw. von $T(\rho')$ unter dem Funktor Σ in der gleichen Röhre vom Rang 2 in A-mod liegen. Deshalb gibt es ein unzerlegbares Objekt $H_1 = (\bigoplus M_i^{t_i}, k^{h_x^A}, \gamma_{H_1})$ in $T(\rho)$ und ein unzerlegbares Objekt $H_2 = (\bigoplus N_i^{t_i}, k^{h_x^A}, \gamma_{H_2})$ in $T(\rho')$, so daß $\Sigma H_1 = \Sigma H_2$ ist. Wegen $\dim(\bigoplus_i N_i^{t_i})_x = 2h_x^A = \dim(\bigoplus M_i^{t_i})_x$ gilt auch $\text{Hom}(P(x), \Sigma H_1) \neq 0 \neq \text{Hom}(P(x), \Sigma H_2)$. Wie in [X, 3.3] können wir zeigen, daß ΣH_1 und ΣH_2 reguläre A-Moduln sind. Demnach folgt $\underline{\dim}\, \Sigma H_1 = h^A = \underline{\dim}\, \Sigma H_2$. Also besagt der Satz [X, 1.7], daß H_1 und H_2 isomorph ist, somit folgt aus dem wohlbekannten Krull–Schmidt-Satz $K_x^A = K$.

Nun sei $h_x^A = 1$. In diesem Fall haben wir $K_x^A = \{M_1\}$ mit M_1 präprojektiv und $\underline{\dim}\, M_1 = h^A + p(x) = \underline{\dim}\, N_1$, wobei $p(x) = \underline{\dim}\, P(x)$ ist. Dies impliziert $M_1 \cong N_1$.

3. Ein konstruktiver Beweis zur Existenz der kritischen Menge aus S_x^A

Wir haben bereits die Existenz der kritischen Menge in S_x^A für eine zahme verkleidete Algebra A und einen Punkt x gesehen, aber dies erlaubt uns nicht, die Dimensionsvektoren der Moduln aus der kritischen Menge zu berechnen. Deshalb geben wir in diesem Abschnitt ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung dieser Dimensionsvektoren. Wir werden sehen, daß es genügt, nur für die zahmen erblichen Algebren die kritischen

Mengen zu kennen. Für die erblichen Algebren ist die Bestimmung ganz leicht und wir geben eine Liste am Ende dieses Abschnitts. Also liefert dieser Abschnitt einen anderen Beweis zur Existenz der kritischen Menge in S_x^A.

Wenn $h_x^A = 1$ ist, gibt es nur einen unzerlegbaren A-Modul M mit $\underline{\dim}\, M = h_x^A + p(x)$. Die Kategorie (add M, $\mathrm{Hom}(P(x), -)$) ist sogar eine Vektorraumkategoie vom Typ $\mathscr{C}(1)$, das heißt, wenn $h_x^A = 1$, ist die kritische Menge schon bekannt.

3.1. Nun sei A eine zahme verkleidete Algebra vom Typ $\tilde{\Delta}$ (wobei Δ ein Dynkin-Diagramm ist) und x ein Punkt von A, das heißt es gibt eine zahme erbliche Algebra $B \cong k\vec{\tilde{\Delta}}{}^*$ und einen präprojektiven B-Kippmodul $T = \bigoplus_{i=1}^n T(i)$, so daß $\mathrm{End}({}_BT) = A$ gilt. Sei $P_A(x) = \mathrm{Hom}(T, T(x))$, $T(x) = \tau^{-m} P_B(b)$ und setze $F := \mathrm{Hom}_B({}_BT, -)$.

SATZ. *Sei K_b^B eine kritische Menge in S_b^B, dann ist $F\tau^{-m}K_b^B := \{F\tau^{-m}M \mid M \in K_b^B\}$ eine kritische Menge vom Typ $\mathscr{C}(h_x^A)$ in S_x^A.*

Beweis. Setze

$$\mathscr{G}({}_BT) = \{X \in B\text{-mod} \mid \mathrm{Ext}_B^1(T, X) = 0\},$$
$$\mathscr{Y}({}_BT) = \{Y \in A\text{-mod} \mid \mathrm{Tor}_1^A(T, Y) = 0\},$$

dann ist F eine Äquivalenz zwischen $\mathscr{G}({}_BT)$ und $\mathscr{Y}({}_BT)$. Für einen einfach regulären A-Modul H gilt

$$\begin{aligned} h_x^A &= \dim \mathrm{Hom}(P(x), H) = \dim \mathrm{Hom}(T(x), T \otimes_A H) \\ &= \dim \mathrm{Hom}_B(\tau^m T(x), \tau^m(T \otimes_A H)) \\ &= \dim \mathrm{Hom}_B(\tau^m T(x), T \otimes_A H) = \dim \mathrm{Hom}(P_B(b), T \otimes_A H) \\ &= h_b^B. \end{aligned}$$

Im weiteren haben wir eine exakte Sequenz (nach 2.1)

$$0 \to P_B(b)^{h_b^B} \to \bigoplus_{M_i \in K_b^B} M_i^{t_i} \to H' \to 0$$

mit H' ein einfacher regulärer homogener B-Modul. Weil B eine erbliche Algebra und τ^{-1} ein rechtsexakter Funktor ist, lautet die obige exakte Sequnz unter dem Funktor τ^{-1} folgendermaßen:

$$T(x)^{h_b^B} \to \bigoplus_{M_i \in K_b^B} \tau^{-m} M_i^{t_i} \to H' \to 0.$$

Da T ein präprojektiver B-Kippmodul ist, gehören H' und $T(x)$ zu $\mathscr{G}({}_BT)$.

Es wird bemerkt, daß $\mathscr{G}({}_BT)$ unter Faktormoduln und Erweiterungen abgeschlossen ist, also ist $\tau^{-m}M_i$ für jedes M_i aus K_b^B auch in $\mathscr{G}({}_BT)$. Deshalb gilt:

(1) $\dim \mathrm{Hom}(P(x), F\tau^{-m}M_i) = \dim \mathrm{Hom}(T(x), \tau^{-m}M_i)$

$= \dim \mathrm{Hom}_B(P_B(b), M_i)$.

(2) Aus dem Satz 4.1(6) in [Ri] folgt

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Hom}(P_A(x), \tau F\tau^{-m}M_i) &= \dim \mathrm{Ext}^1(F\tau^{-m}M_i, P_A(x))\\ &= \dim \mathrm{Ext}^1_B(\tau^{-m}M_i, T(x))\\ &= \dim \mathrm{Hom}(T(x), \tau^{-m+1}M_i)\\ &= \dim \mathrm{Hom}(\tau^m T(x), \tau M_i)\\ &= \dim \mathrm{Hom}(P_B(b), \tau M_i) = 0.\end{aligned}$$

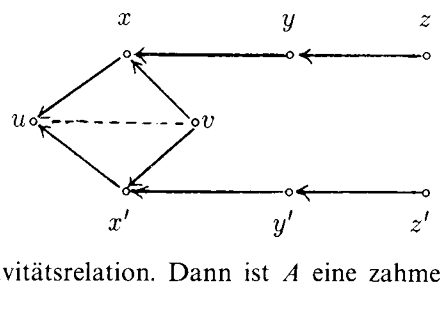
(3) $$\begin{aligned}\dim \mathrm{Hom}_B(M_i, M_j) &= \dim \mathrm{Hom}_B(\tau^{-m}M_i, \tau^{-m}M_j)\\ &= \dim \mathrm{Hom}_A(F\tau^{-m}M_i, F\tau^{-m}M_j).\end{aligned}$$

(4) Es gibt einen Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(F\tau^{-m}M_i, F\tau^{-m}M_j)$ mit $f_x \neq 0$ genau dann, wenn es ein Morphismus $g \in \mathrm{Hom}(M_i, M_j)$ mit $g_b \neq 0$ existiert. (Die Eigenschaft, daß τ^{-1} zu τ linksadjungiert ist, wird hier von uns benutzt.)

Nun folgt der Satz unmittelbar aus den vorangehenden Eigenschaften. ∎

Zur Verdeutlichung vom Satz 3.1 sehen wir hier ein Beispiel.

3.2. *Beispiel.* Gegeben sei A durch den Köcher

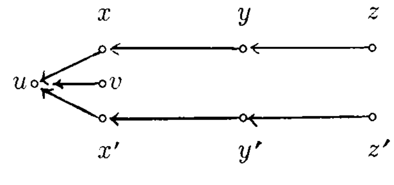


mit Kommutativitätsrelation. Dann ist A eine zahme verkleidete Algebra und

$$h^A = \begin{array}{cccc} & 3 & 2 & 1 \\ 2 & & 2 & \\ & 3 & 2 & 1 \end{array}.$$

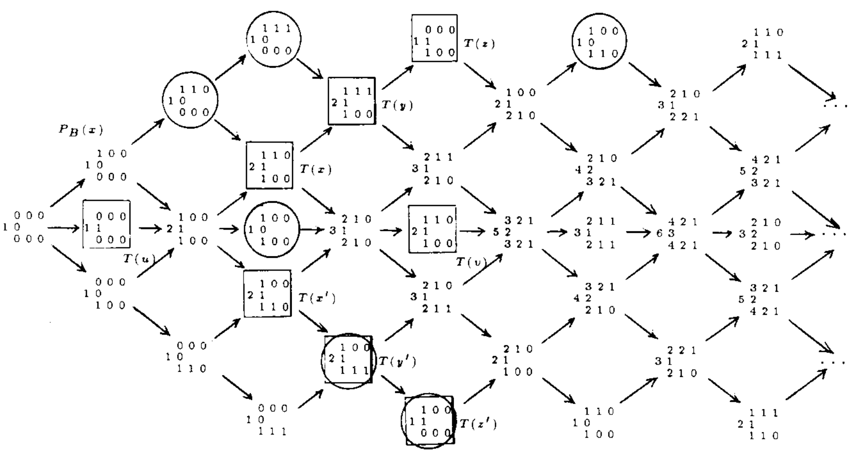
Wir betrachten zum Beispiel den Punkt x.

Diese Algebra A kann von der zahmen erblichen Algebra B, die durch den Köcher $\vec{\Delta}$



gegeben ist, durch einen präprojektiven B-Kippmodul erhalten werden.

Die präprojektive Komponente von B-mod hat folgende Form, dabei sind die unzerlagbaren Moduln durch ihre Dimensionsvektoren ersetzt.



Sei ${}_BT$ die direkte Summe der rechteckig umrandeten unzerlegbaren B-Moduln $T(i)$, $i \in \vec{\Delta}_0$. Dann gilt $\operatorname{End}({}_BT) = A$. Nun betrachten wir den Punkt x von A. Es gilt $P_A(x) = \operatorname{Hom}({}_BT, {}_BT(x))$ und ${}_BT(x) = \tau^{-1}P_B(x)$. Die kritische Menge K_x^B ist vom Typ $\mathscr{C}(h_x^B)$ mit $h_x^B = h_x^A = 3$. Die unzerlegbaren Moduln in der kritischen Menge K_x^B sind eingekreist. Also gilt

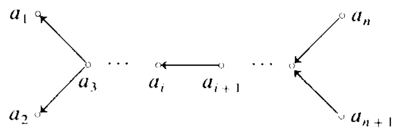
$$K_x^B = \left\{ \begin{array}{llllll} 110 & 111 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 10 & -10\ , & 10 & -10\ , & 21 & -11 \\ 000 & 000 & 100 & 110 & 111 & 000 \end{array} \right\},$$

$$\tau^{-1}K_x^B = \left\{ \begin{array}{llllll} 111 & 000 & 110 & 110 & 210 & 110 \\ 21 & -11\ , & 21 & -21\ , & 21 & -10 \\ 100 & 100 & 110 & 111 & 100 & 100 \end{array} \right\},$$

$$F\tau^{-1}K_x^B = \left\{ \begin{array}{llllll} 110 & 111 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 10 & -10\ , & 11 & -11\ , & 10 & -00 \\ 000 & 000 & 100 & 110 & 111 & 000 \end{array} \right\}.$$

TABELLE I

$\tilde{\mathbb{D}}_n$



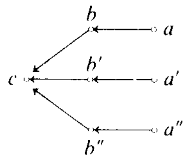
$$h=\begin{array}{ccccc}1&&&&1\\&2\cdots2&\text{——}&2\cdots2&\\1&&&&1\end{array}$$

$C^A_{a_1}$	$C^A_{a_2}$	$C^A_{a_n}$	$C^A_{a_{n+1}}$
$\begin{array}{cccc}2&&&1\\&2\cdots2&2\cdots2&\\1&&&1\end{array}$	$\begin{array}{cccc}1&&&1\\&2\cdots2&2\cdots2&\\2&&&1\end{array}$	$\begin{array}{cccc}2&&&2\\&3\cdots3&3\cdots3&\\2&&&1\end{array}$	$\begin{array}{cccc}2&&&1\\&3\cdots3&3\cdots3&\\2&&&2\end{array}$

$C^A_{a_i}$, $3\leqslant i\leqslant n-1$:

$$\begin{array}{cccc}1&&&1\\&1\cdots1&1\cdots1&\\1&&&0\end{array},\quad\begin{array}{cccc}1&&&0\\&1\cdots1&1\cdots1&\\1&&&1\end{array},\quad\begin{array}{cccc}1&&&0\\&1\cdots1&0\cdots0&\\1&&&0\end{array},\quad\begin{array}{cccc}0&&&0\\&1\cdots1&0\cdots0&\\1&&&0\end{array}$$

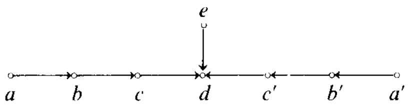
$\tilde{\mathbb{E}}_6$



$$h=3\begin{array}{l}\diagup\,2\text{——}1\\\text{——}2\text{——}1\\\diagdown\,2\text{——}1\end{array}$$

C^A_a	C^A_b	$C^A_{a''}$	$C^A_{b''}$	$C^A_{a'}$	$C^A_{b'}$	C^A_c
32 421 21	11 100 00	21 421 32	00 100 11	21 432 21	00 111 00	10 11 100—100 00 00
	10 110 00		00 110 10		00 110 10	00 00 100 100 10 11
	10 100 10		10 100 10		10 110 00	00 00 110—111 00 00
	10 211 11		11 211 10		11 210 11	

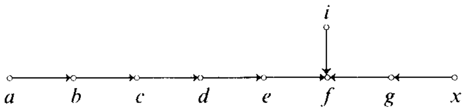
$\tilde{\mathbb{E}}_7$



$h = 1\ 2\ 3\ \overset{2}{4}\ 3\ 2\ 1$

C_a^A	$C_{a'}^A$	C_b^A	$C_{b'}^A$	C_e^A	C_c^A	$C_{c'}^A$	C_d^A
$\overset{2}{2345321}$	$\overset{2}{1235432}$	$\overset{0}{1111000}$	$\overset{0}{0001111}$	$\overset{1}{0011000}$	$\overset{0}{0111000}$—$\overset{0}{1111000}$	$\overset{1}{0001110}$—$\overset{0}{0001111}$	$\overset{1}{0001000}$
		$\overset{0}{0111100}$	$\overset{0}{0011110}$	$\overset{1}{1112110}$	$\overset{0}{0011100}$—$\overset{0}{0011110}$	$\overset{0}{0011100}$—$\overset{0}{0111100}$	$\overset{0}{0011000}$—$\overset{0}{0111000}$—$\overset{0}{1111000}$
		$\overset{1}{0112111}$	$\overset{1}{1112110}$	$\overset{1}{0112111}$	$\overset{1}{0012111}$—$\overset{1}{0011000}$	$\overset{1}{1112100}$—$\overset{1}{0001100}$	$\overset{0}{0001000}$—$\overset{0}{0001110}$—$\overset{0}{0001111}$
		$\overset{1}{0122110}$	$\overset{1}{0112210}$	$\overset{1}{0001100}$			

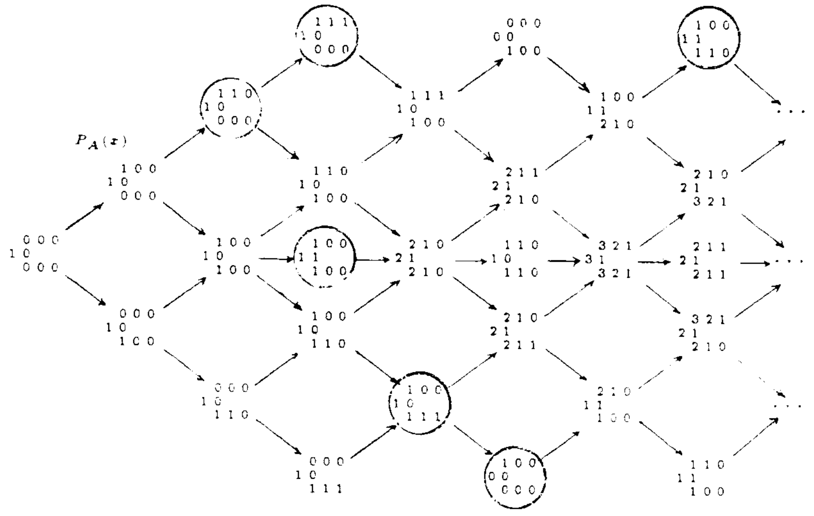
$\tilde{\mathbb{E}}_8$



$h = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \overset{3}{6}\ 4\ 2$

C_a^A	C_b^A	C_c^A	C_x^A	C_i^A	C_d^A	C_g^A	C_e^A	C_f^A
$\overset{3}{23456742}$	$\overset{0}{11111100}$	$\overset{0}{11111100}$	$\overset{0}{00001111}$	$\overset{1}{00001100}$	$\overset{0}{00011110}$	$\overset{0}{00000111}$	$\overset{1}{00001211}$ $\overset{0}{00001110}$	$\overset{1}{00000100}$
	$\overset{1}{01111211}$	$\vert\,\overset{0}{01111100}$	$\overset{1}{01111211}$	$\vert\,\overset{1}{00011100}$	$\overset{0}{00111100}$ $\overset{1}{00011211}$	$\overset{0}{00001110}$ $\overset{1}{01111210}$	$\vert\,\overset{1}{00001100}$ $\vert\,\overset{0}{00001111}$	$\overset{0}{00001100}$
	$\overset{1}{01223321}$	$\overset{1}{00112210}$	$\overset{1}{11222321}$	$\overset{1}{00111211}$	$\vert\,\overset{0}{01111100}$ $\vert\,\overset{1}{00012211}$	$\vert\,\overset{0}{00011110}$ $\vert\,\overset{1}{11111210}$	$\overset{0}{00011100}$	$\overset{0}{00000110}$ $\vert\,\overset{0}{00011100}$
	$\overset{1}{01122210}$	$\vert\,\overset{0}{00111110}$	$\overset{1}{00011221}$	$\vert\,\overset{1}{01111211}$	$\vert\,\overset{0}{11111100}$ $\vert\,\overset{1}{00011100}$	$\vert\,\overset{0}{00111110}$ $\vert\,\overset{1}{00000110}$	$\vert\,\overset{0}{00111100}$	$\vert$ $\vert\,\overset{0}{00111100}$
		$\overset{1}{00123321}$		$\overset{1}{11111210}$			$\vert\,\overset{0}{01111100}$	$\overset{0}{00000111}$ $\vert\,\overset{0}{01111100}$
		$\vert\,\overset{1}{00111211}$		$\vert\,\overset{1}{00000110}$			$\vert\,\overset{0}{11111100}$	$\vert\,\overset{0}{11111100}$

Nun betrachten wir die präprojektive Komponente von A. Sie hat die folgende Form, wobei die Moduln in $K_x^A = F\tau^{-1}K_x^B$ umkreist sind.



3.3. Siehe Tabelle I für eine Liste der kritischen Mengen für zahme erbliche Algebren.

4. Das reguläre Komplement zum Kippmodul

Wir haben schon gesehen, daß es zu einem Punkt x einer gegebenen zahmen verkleideten Algebra A eine kritische Menge K_x^A gibt und der Modul $(\bigoplus_{M \in K_x^A} M) \oplus P(x)$ ein partieller A-Kippmodul ist. Nun interessieren wir uns für die möglichen Komplemente zu diesem Modul. Dabei heißt ein Modul Y ein Komplement zu einem partiellen Kippmodul X, wenn $X \oplus Y$ ein Kippmodul ist. Ein bekannter Satz von Bongartz garantiert die Existenz eines Komplements. In unserem Fall ist das durch den Satz von Bongartz gelieferte Komplement ein präprojektiver A-Modul, aber wie sieht der Modul aus? Diese Frage wird im nächsten Abschnitt beantwortet, aber zuerst möchten wir das reguläre Komplement untersuchen.

Es sei K_x^A die kritische Menge in S_x^A, mit T_1 bezeichnen wir die direkte Summe aller Moduln aus K_x^A und $P(x)$. Die Anzahl der einfachen A-Moduln wird mit n bezeichnet.

4.1. *Beweis des Satzes* I(2). Aus Lemma 2.1 haben wir zur kritischen Menge $K_x^A = \{M_1, ..., M_r\}$ eine exakte Sequenz

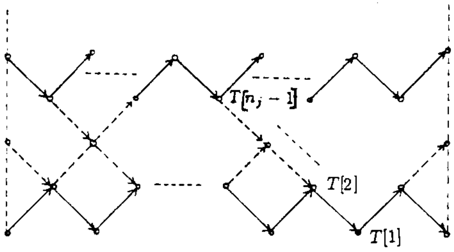
$$0 \to P(x)^{h_x^A} \to \bigoplus_{i=1}^{r} M_i^{t_i} \to H \to 0$$

mit einem einfach regulären A-Modul H und $\underline{\dim}\, H = h^A$. Daraus folgt leicht, daß für jeden regulären A-Modul N in S_x^A der Modul $T_1 \oplus N$ ein partieller Kippmodul ist. Nun setze $T_2 = \oplus N$, wobei N über alle regulären Moduln in S_x^A läuft. Wir zeigen, daß T_2 ein partieller Kippmodul ist und die richtige Anzahl der unzerlegbaren direkten Summanden besitzt.

Wir betrachten die folgenden Fälle.

1. *Fall*: $h_x^A = 1$

Der Röhrentyp von A ist $(n_1, ..., n_t)$ mit $n_1 \geqq \cdots \geqq n_t \geqq 2$. Nun untersuchen wir eine Röhre $T(\rho)$ vom Rang n_j:

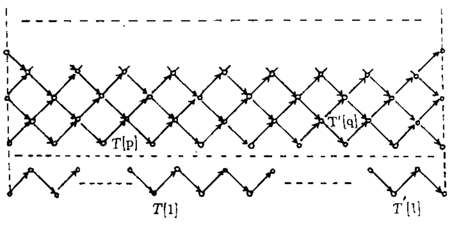


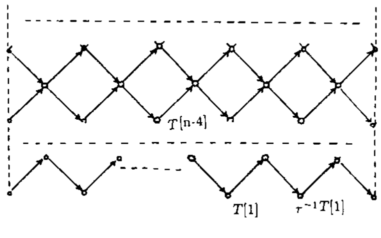
Die Summe der Dimensionsvektoren der auf dem Mund einer Röhre liegenden Moduln ist h_x^A, deswegen gibt es genau einen Modul $T[1]$ auf dem Mund der Röhre mit $\dim \operatorname{Hom}(P(x), T[1]) = 1$ und $\operatorname{Hom}(P(x), \tau T[1]) = 0$. Sei$T[i]$ der unzerlegbare Modul von regulärer Läge i, so daß es einen Epimorphismus von $T[i]$ nach $T[1]$ gibt. Es ist trivial, daß $T(n_j) = \bigoplus_{i=1}^{n_j-1} T[i]$ der einzige partielle Kippmodul mit direkten Summanden in $T(\rho) \cap S_x^A$ ist. Also ist $T_2 = \bigoplus_{j=1}^{t} T(n_j)$ der einzige reguläre partielle Kippmodul in add S_x^A. Aber $\sum_{j=1}^{t} (n_j - 1) = n - 2$ gilt. Also ist $T_1 \oplus T_2$ ein Kippmodul.

2. *Fall*: $h_x^A = 2$

Sei A eine zahme verkleidete Algebra vom Typ Δ.

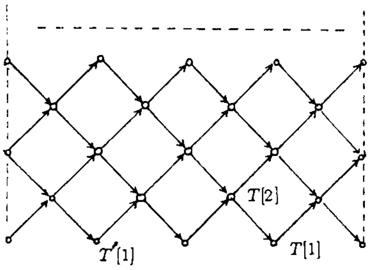
(i) $\Delta = \tilde{\mathbb{D}}_n$ $(n \geqq 5)$. In diesem Fall zeigt eine analoge Argumentation wie oben, daß wir nur $(n-2)-2$ reguläre unzerlegbare Moduln aus der Röhre vom Rang $n-2$ erhalten, die eben alle regulären A-Moduln in S_x^A sind. Aber T_2 ist trivialerweise ein partieller Kippmodul. Also ist der Modul $T_1 \oplus T_2$ ein Kippmodul. Die $n-4$ regulären A-Moduln haben eine der folgenden Positionen in der Röhre vom Rang $n-2$:

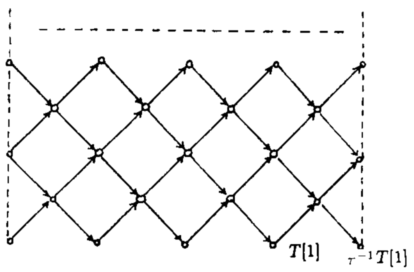




(ii) $\Delta = \tilde{\mathbb{E}}_6$. In diesem Fall gibt es nur zwei reguläre unzerlegbare A-Moduln aus den zwei Röhren vom Rang 3, die in S_x^A liegen.

(iii) $\Delta = \tilde{\mathbb{E}}_7$. In diesem Fall gibt es nur zwei reguläre Moduln in der Röhre vom Rang 4, die zu S_x^A gehören und einen regulären Modul in der Röhre vom Rang 3, der in S_x^A liegt. Die zwei regulären A-Moduln befinden sich an einer der folgenden Positionen in der Röhre vom Rang 4:



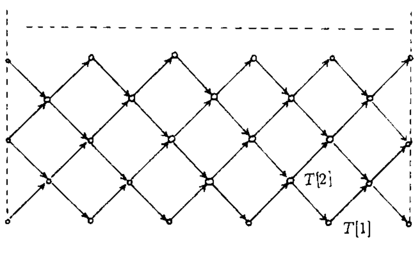


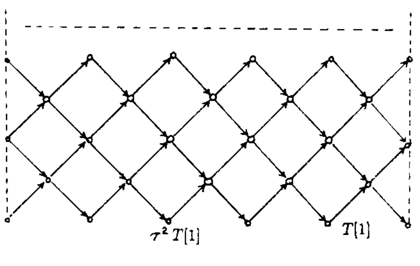
(iv) $\Delta = \tilde{\mathbb{E}}_8$. In diesem Fall gibt es nur drei unzerlegbare Moduln aus der Röhre vom Rang 5 und einem unzerlegbaren Modul aus der Röhre vom Rang 3, die alle reguläre Moduln in S_x^A sind.

3. *Fall*: $h_x^A = 3$

(i) $\Delta = \tilde{\mathbb{E}}_7$. Es gibt nur einen regulären A-Modul in der Röhre vom Rang 4, der einzige reguläre A-Modul in S_x^A ist.

(ii) $\Delta = \tilde{\mathbb{E}}_8$. Es gibt nur zwei reguläre unzerlegbare A-Moduln in der Röhre vom Rang 5 und einen Modul in der Röhre vom Rang 4, die alle reguläre A-Moduln in S_x^A sind. Die zwei regulären A-Moduln aus der 5-Röhre befinden sich an einer der folgenden Positionen:



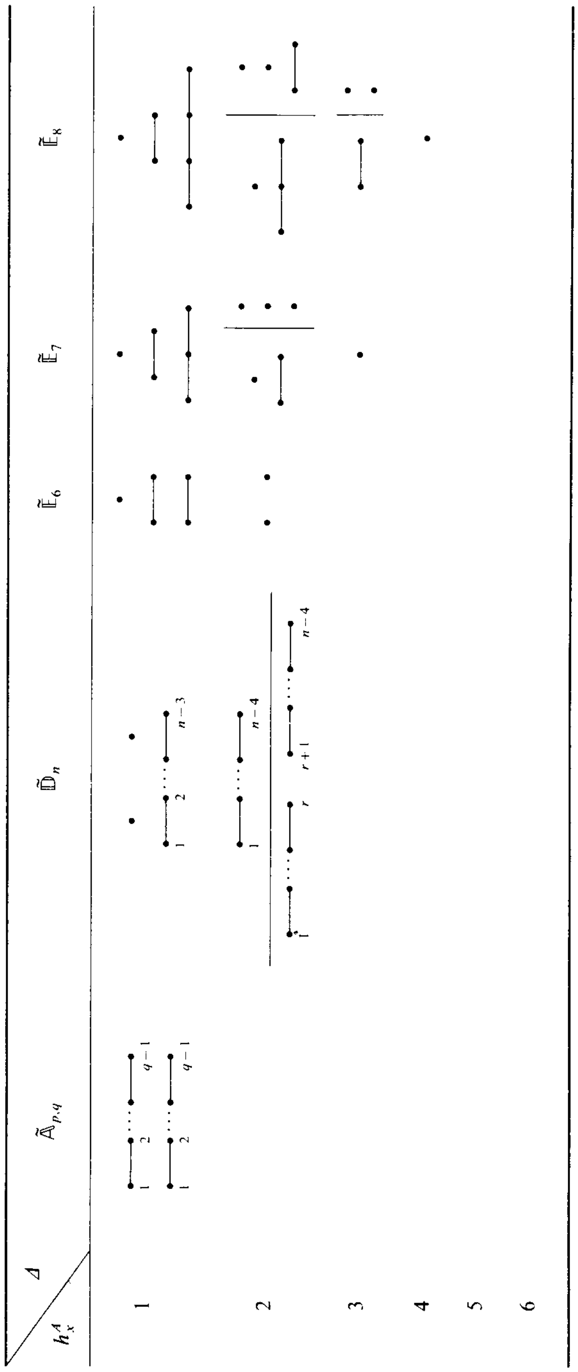


4. *Fall*: $h_x^A = 4$

Es genügt nur den Fall zu berücksichtigen, daß $\Delta = \tilde{\mathbb{E}}_8$ ist. In diesem Fall gehört der einzige reguläre A-Modul aus S_x^A zu der Röhre vom Rang 5.

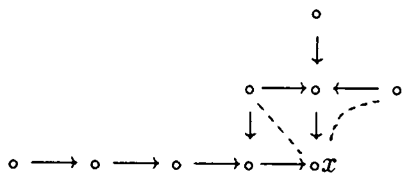
In allen Fällen haben wir gesehen, daß der Modul T_2 ein partieller A-Kippmodul ist und die Anzahl der unzerlegbaren direkten Summanden von T_2 wie gewünscht ist.

TABELLE II


Δ
h_x^Δ
$\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$
$\tilde{\mathbb{D}}_n$
$\tilde{\mathbb{E}}_6$
$\tilde{\mathbb{E}}_7$
$\tilde{\mathbb{E}}_8$
1
2
3
4
5
6
$q-1$
$n-3$
$n-4$
r
$r+1$

4.2. *Bemerkung.* Aus dem Beweis des Satzes wissen wir, wie die regulären Moduln in S_x^A bestimmt werden können. Mit R_x^A bezeichnen wir die Menge aller regulären Moduln aus S_x^A. Da $\dim \operatorname{Hom}(P(x), M) = 1$ für jeden regulären A-Modul $M \in S_x^A$ gilt, ist der Funktor $\operatorname{Hom}(P(x), -)$ auf R_x^A treu und somit bildet R_x^A eine Halbordnung bzgl. $\leqq$. Insbesondere ist $\mathscr{R}_x^A :=$ (add R_x^A, $\operatorname{Hom}(P(x), -)$) eine Vektorraumkategorie gegeben durch die Halbordnung R_x^A. Wir notieren die Halbordnungen in Tabelle II.

4.3. Im Allgemeinen ist das reguläre Komplement von T_1 zum Kippmodul nicht eindeutig, zum Beispiel betrachten wir die zahme verkleidete Algebra A, die durch den Köcher



gegeben ist. Sei x der angegebene Punkt von A. Für diesen Punkt gilt

$$T_1 = P(x) \oplus \begin{matrix} 0 \\ 000 \\ 11111 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 1 \\ 110 \\ 00011 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 0 \\ 110 \\ 01111 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 1 \\ 121 \\ 00111 \end{matrix}.$$

Setze

$$T_2' = \begin{matrix} 0 \\ 111 \\ 00010 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 1 \\ 110 \\ 00111 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 1 \\ 221 \\ 00121 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 0 \\ 110 \\ 11111 \end{matrix},$$

dann ist $T_2' \notin \operatorname{add} S_x^A$. Aber eine leichte Nachprüfung überzeugt uns, daß $T_1 \oplus T_2'$ ein Kippmodul mit regulärem Modul T_2' ist.

Es ist trivial, daß es nur endlich viele reguläre Komplemente zu T_1 gibt. Aber wie viele gibt es denn? Weil ein reguläres Komplement zu T_1 einige partielle Kippmoduln in A-mod liefert (siehe [Ri]) und jeder partieller Kippmodul in einem Flügel liegen muß, können wir den von Ringel in [Ri, p. 205] gegebenen Klassifikationssatz der Kippmoduln über C, wobei C eine durch den linear geordneten Köcher vom Typ $\mathbb{A}_n$ gegebene Algebra ist, benutzen. Mit c_n bezeichnen wir die Anzahl der (multiplizitätenfreien) Kippmoduln über C. Also beantworten wir die Frage in Tabelle III, in der die Anzahl der regulären (multiplizitätenfreien) Komplemente angegeben ist.

TABELLE III

h_x^A \ Typ Δ	$\tilde{\mathbb{E}}_6$	$\tilde{\mathbb{E}}_7$	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	$\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$	$\tilde{\mathbb{D}}_n$
1	4	6	24	$c_{p-1}c_{q-1}$	c_{n-5}
2	1	2	2 od. 3		c_{n-6} od. $c_p c_q$ mit $p+q=n-6$
3	0	1	1 od. 2		
4		0	1		
5			0		
6			0		

5. Das präprojektive Komplement zum Kippmodul

Unser Hauptziel dieses Abschnittes ist es, den Satz I(3) zu zeigen. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen.

5.1. Proposition. *Sei A eine zahme verkleidete Algebra, und M, Y präprojektive unzerlegbare A-Moduln mit $\langle h^A, \underline{\dim}\, Y\rangle \geqq \langle h^A, \underline{\dim}\, M\rangle$ und* $\mathrm{Ext}^1(Y, M) = \mathrm{Ext}^1(M, Y) = 0$. *Dann gilt:*

Jeder von Null verschiedene Morphismus $f\colon Y \to M$ ist injektiv.

Beweis. Setze $C := \mathrm{Koker}(f)$ und $K := \mathrm{Ker}(f)$ sowie $B := \mathrm{Bild}(f)$.

(1) Sei f surjektiv. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Y \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

folgt $\langle h^A, \underline{\dim}\, K\rangle = \langle h^A, \underline{\dim}\, Y - \underline{\dim}\, M\rangle = \langle h^A, \underline{\dim}\, Y\rangle - \langle h^A, \underline{\dim}\, M\rangle \geqq 0$. Aber K ist präprojektiv, somit muß $K=0$ sein, dies zeigt an, daß f ein Isomorphismus ist.

(2) Nun sei f nicht surjektiv. Dann gilt $B \neq M$.

$$0 \to K \to Y \to B \to 0, \qquad (*)$$

$$0 \to B \to M \to C \to 0. \qquad (**)$$

Wende $\mathrm{Hom}(M, -)$ auf $(*)$ an. Dann ist mit $\mathrm{Ext}^1(M, Y) = 0$ auch $\mathrm{Ext}^1(M, B) = 0$, somit folgt aus $\dim \mathrm{Hom}(M, M) = 1$, daß C unzerlegbar ist.

Wenn C regulär oder präinjektiv ist, dann folgt aus $\langle h^A, \underline{\dim}\, K\rangle = \langle h^A, \underline{\dim}\, Y\rangle - \langle h^A, \underline{\dim}\, C\rangle \geqq 0$, daß $K=0$ und dann f injektiv ist. Also setzen wir voraus, das C präprojektiv ist. Insbesondere gilt proj.dim. $C = 1$. Wende $\mathrm{Hom}(M, -)$ auf $(*)$ noch einmal an, so gilt

$$\cdots \to (M, B) \to \mathrm{Ext}^1(M, K) \to \mathrm{Ext}^1(M, Y) \to \cdots.$$

Da $\operatorname{Hom}(M, B)=0=\operatorname{Ext}^1(M, Y)$ ist, ist $\operatorname{Ext}^1(M, K)=0$. Nun wende $\operatorname{Hom}(-, K)$ auf $(**)$ an:

$$0 \to (C, K) \to (M, K) \to (B, K) \to {}^1(C, K) \to {}^1(M, K) \to {}^1(B, K) \to 0.$$

Da $\operatorname{Ext}^2(C, K)=0=\operatorname{Ext}^1(M, K)$ gilt, ist $\operatorname{Ext}^1(B, K)=0$. Also muß K verschwunden sein, denn Y ist unzerlegbar und $f \neq 0$. Somit ist der Beweis fertig. ∎

5.2. KOROLLAR. *Sei $Y \in S_x^A$ mit*

$$\langle h^A, \underline{\dim}\, Y\rangle = -h_x^A \qquad \textit{und} \qquad \dim \operatorname{Hom}(P(x), Y)=1.$$

Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to P(x) \to Y \to \tau^{-1}E \to 0,$$

wobei E ein unzerlegbarer regulärer A-Modul mit $\operatorname{Hom}(P(x), E) \neq 0$ *und* $\operatorname{Hom}(P(x), \tau^{-1}E)=0$ *ist.*

5.3. Die Umkehrung des Korollars ist auch richtig.

LEMMA. *Sei E ein regulärer unzerlegbarer A-Modul mit*

$$\dim \operatorname{Hom}(P(x), E)=1 \qquad \textit{und} \qquad \dim \operatorname{Hom}(P(x), \tau^{-1}E)=0$$

und sei die universelle Erweiterung gegeben durch

$$0 \to P(x) \to T(E) \to \tau^{-1}E \to 0.$$

Dann gilt $T(E) \in S_x^A$ mit $\dim \operatorname{Hom}(P(x), T(E))=1$ *und* $\langle h^A, \dim T(E)\rangle = -h_x^A$.

Beweis. Es ist trivial, daß $\dim \operatorname{Ext}^1(\tau^{-1}E, P(x))=1$ gilt und $T(E)$ unzerlegbar ist. Wende $\operatorname{Hom}(-, P(x))$ auf die universelle Sequenz an, so gilt $\operatorname{Ext}^1(T(E), P(x))=0$. Somit ist $T(E) \in S_x^A$. ∎

5.4. *Bemerkung.* Wir setzen

$$\bar{S}_x^A := \{X \in A\text{-ind} \mid X \not\cong Q(x) \text{ und } \operatorname{Hom}(X, Q(x)) \neq 0 = \operatorname{Hom}(\tau^{-1}X, Q(x))\}.$$

Dann gibt es eine bijektive Abbildung zwischen $S_x^{A^{\mathrm{op}}}$ und $\bar{S}_x^A$, nämlich

$$D = \operatorname{Hom}_k(-, k)\colon S^{A^{\mathrm{op}}} \to \bar{S}_x^A.$$

Dabei bezeichnen wir mit $Q(x)$ den unzerlegbaren injektiven A-Modul zum Punkt x.

Wir wissen schon, daß es genau $n-r-1$ unzerlegbare reguläre A^{op}-Moduln E' in $S_x^{A^{\mathrm{op}}}$ gibt, die auch die Eigenschaft $\dim \operatorname{Hom}(P_{A^{\mathrm{op}}}(x), E') = 1$ haben. Deshalb gibt es auch genau $n-r-1$ reguläre unzerlegbare A-Moduln E in $\bar{S}_x^A$, die auch die Bedingung $\dim \operatorname{Hom}(E, Q(x)) = 1$ erfüllen. Seien $E_1, ..., E_{n-r-1}$ alle solche A-Moduln in $\bar{S}_x^A$. Setze $T_0' = \bigoplus_{i=1}^{n-r-1} T(E_i)$. Nach 5.3 und 5.2 gilt $T_0' \cong \bigoplus_{X \in L_x^A} X =: T_0$.

5.5. Lemma. *$T_0 \oplus T_1$ ist ein A-Kippmodul.*

Beweis. Es bleibt zu zeigen, daß $\operatorname{Ext}^1(T_0, T_1) = \operatorname{Ext}^1(T_1, T_0) = \operatorname{Ext}^1(T_0, T_0) = 0$ gilt. Wir haben zwei exakte Sequenzen:

$$0 \to P(x)^{h_x^A} \to \bigoplus_{i=2}^{r} M_i^{u_i} \to H \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to P(x)^{n-r-1} \to \bigoplus_{i=1}^{n-r-1} T(E_i) \to \bigoplus_{i=1}^{n-r-1} \tau^{-1} E_i \to 0, \tag{2}$$

wobei H unzerlegbar mit $\underline{\dim}\, H = h^A$ ist.

Wende $\operatorname{Hom}(T_0, -)$ auf (1) bzw. auf (2) an:

$$\cdots \to {}^1(T_0, P(x)^{h_x^A}) \to {}^1(T_0, \bigoplus M_i^{u_i}) \to {}^1(T_0, H) \to \cdots$$

$$\cdots \to {}^1(T_0, P(x)^{n-r-1}) \to {}^1(T_0, T_0) \to {}^1(T_0, \bigoplus \tau^{-1} E_i) \to \cdots .$$

Da $\operatorname{Ext}^1(T_0, P(x)) = 0 = \operatorname{Hom}(H, \tau T_0) = D \operatorname{Ext}^1(T_0, H)$ und $0 = \operatorname{Hom}(\bigoplus \tau^{-1} E_i, T_0) = D \operatorname{Ext}^1(T_0, \bigoplus \tau^{-1} E_i)$ gelten, ist $\operatorname{Ext}^1(T_0, T_0) = 0 = \operatorname{Ext}^1(T_0, T_1)$. Wenn wir $\operatorname{Hom}(T_1, -)$ auf (2) anwenden, gilt:

$$\cdots {}^1(T_1, P(x)^{n-r-1}) \to {}^1(T_1, T_0) \to {}^1(T_1, \bigoplus \tau^{-1} E_i) \to \cdots .$$

Aber T_1 ist präprojektiv, daraus folgt $\operatorname{Ext}^1(T_1, \bigoplus \tau^{-1} E_i) = 0$, somit ist $\operatorname{Ext}^1(T_1, T_0) = 0$. ∎

5.6. Lemma. *Sei Y ein präprojektiver A-Modul, so daß $Y \oplus T_1$ ein partieller Kippmodul ist. Dann gehört Y zu add S_x^A, falls Y keinen direkten Summand enthält, der zu $P(x)$ isomorph ist.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß jeder unzerlegbare direkte Summand X von Y zu S_x^A gehört. Gemäß 2.1 gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to P(x)^{h_x^A} \to \bigoplus_{i=1}^{r} M_i^{u_i} \to H \to 0.$$

Dabei ist H unzerlegbar mit $\underline{\dim}\, H = h^A$. Nun wende $\mathrm{Hom}(-, X)$ auf diese exakte Sequenz an, so liefert uns dies eine exakte Sequenz

$$\cdots \to (P(x)^{h^A_x}, X) \to \mathrm{Ext}^1(H, X) \to \mathrm{Ext}^1\left(\bigoplus_i M_i^{r_i}, X\right) = 0.$$

Wir wissen, daß für einen präprojektiven A-Modul X immer $\mathrm{Ext}^1(H, X) \neq 0$ gilt, also ist $\mathrm{Hom}(P(x), X) \neq 0$. Aus $\mathrm{Ext}^1(X, P(x)) = 0$ erhalten wir automatisch $\mathrm{Hom}(P(x), \tau X) = 0$, somit ist $X \in S^A_x$. ▌

Den Beweis des folgenden Lemmas möchten wir gerne bis zum Abschnitt 6 verschieben, wo man das Lemma als Korollar bekommen kann.

5.7. Lemma. *Sei Y unzerlegbar präprojektiv und $Y \notin K^A_x$. Falls $Y \oplus T_1$ ein partieller Kippmodul ist, dann gilt $\langle h^A, \underline{\dim}\, Y \rangle = -h^A_x$.*

5.8. *Beweis zum Satz* I(3). Aus 5.5 folgt, daß $T_0 \oplus T_1$ ein Kippmodul ist. Nach 5.6 und 5.7 ist T_0 das einzige präprojektive Komplement zu T_1. ▌

5.9. Setze $L^A_x := \{N \in S^A_x \mid \langle h^A, \underline{\dim}\, N\rangle/\dim \mathrm{Hom}(P(x), N) = -h^A_x\}$, dann besteht L^A_x genau aus solchen A-Moduln in S^A_x, welche nicht in K^A_x liegen und die Eigenschaft $\langle h^A, \underline{\dim}\, N\rangle = -h^A_x$ erfüllen. Nach 5.1 ist $\mathrm{Hom}(P(x), -)$ ein treuer Funktor auf $\mathrm{add}\, L^A_x$, also ist $\mathscr{L}^A_x := (\mathrm{add}\, L^A_x, \mathrm{Hom}(P(x), -))$ eine Vektorraumkategorie gegeben durch die Halbordnung L^A_x bzgl. $\leqq$.

Wie in 4.2 gibt es eine analoge Liste für L^A_x. (Siehe Tabelle IV.)

Zum Schluß bemerken wir das folgende Lemma:

5.10. Lemma. *Es gibt keinen präinjektiven Modul Q, so daß $Q \oplus T_1$ ein partieller A-Kippmodul ist.*

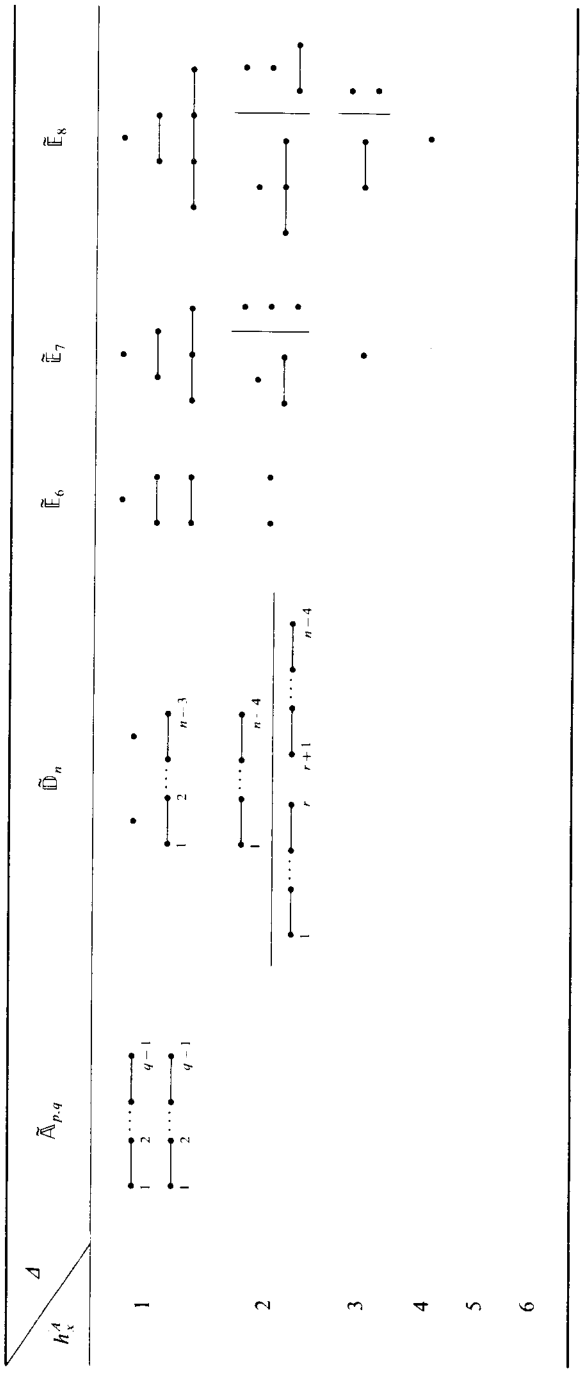
Beweis. Angenommen es ist Q ein präinjektiver A-Modul mit der obigen Eigenschaft. Dann ist $\mathrm{proj.dim.}\, Q \leqq 1$. Wende $\mathrm{Hom}(Q, -)$ auf die exakte Sequenz

$$0 \to P(x)^{h^A_x} \to \bigoplus_{M_i \in K^A_x} M_i^{r_i} \to H \to 0$$

mit H unzerlegbar und $\underline{\dim}\, H = h^A$ an, so haben wir wegen $\mathrm{Ext}^1(Q, H) \cong D\,\mathrm{Hom}(H, \tau Q) \neq 0$ auch $\mathrm{Ext}^1(Q, \bigoplus_{M_i \in K^A_x} M_i^{r_i}) \neq 0$. Dieser Widerspruch zeigt nun, daß es keinen präinjektiven A-Modul Q gibt, so daß $T_1 \oplus Q$ ein partieller A-Kippmodul ist. ▌

5.11. *Bemerkung.* Im allgemeinen kann es zu einem präprojektiven partiellen Kippmodul über einer zahmen verkleideten Algebra ein

TABELLE IV



Δ
h_x^Δ
$\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$
$\tilde{\mathbb{D}}_n$
$\tilde{\mathbb{E}}_6$
$\tilde{\mathbb{E}}_7$
$\tilde{\mathbb{E}}_8$
1
2
3
4
5
6

präinjektives Komplement geben. Ein Beispiel kann man in [Ha, p. 139] sehen.

6. Kriterien für Moduln in einer kritischen Menge

In diesem Abschnitt charakterisieren wir die Moduln, die in K_x^A liegen. Nun setze $\partial' X = \langle h^A, \underline{\dim}\, X \rangle / \dim \operatorname{Hom}(P(x), X)$, so sind die in K_x^A liegenden Moduln X durch $\partial' X$ vollständig bestimmt.

6.1. Satz. *Sei $Y \in S_x^A$. Dann gilt: Y ist genau dann in K_x^A, wenn $-h_x^A < \partial' Y < 0$ gilt.*

Beweis. Im folgenden behalten wir die Bezeichnungen des 4. und 5. Abschnitts bei.

Falls $h_x^A = 1$ ist, so gibt es nichts zu zeigen. Nun sei $h_x^A \neq 1$. Sei Y aus K_x^A. Nach der Bemerkung von 2.1 gilt $\partial' Y > -h_x^A$. Umgekehrt sei für Y die Bedingung erfüllt. Da $h_x^A \neq 1$ ist, gilt $\dim \operatorname{Hom}(P(x), Y) = 1$ für jedes Element Y in S_x^A. Wir haben $\operatorname{End}(Y) \cong k$ und $\operatorname{Ext}^i(Y, Y) = 0$ für alle $i > 0$ und zwei exakte Sequenzen

$$0 \to P(x)^{h_x^A} \to \bigoplus_{i=1}^{r} M_i^{t_i} \to H \to 0, \tag{$*$}$$

$$0 \to P(x)^{n-r-1} \to T_0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-r-1} \tau^{-1} E_i \to 0, \tag{$**$}$$

wobei H unzerlegbar mit $\underline{\dim}\, H = h^A$ und E_i regulär ist. Wende $\operatorname{Hom}(Y, -)$ auf $(*)$ bzw. auf $(**)$ an:

$$\cdots \to {}^1(Y, P(x)^{h_x^A}) \to {}^1\Big(Y, \bigoplus_i M_i^{t_i}\Big) \to {}^1(Y, H) \to 0,$$

$$\cdots \to (Y, P(x)^{n-r-1}) \to {}^1(Y, T_0) \to {}^1\Big(Y, \bigoplus_i^{n-r-1} \tau^{-1} E_i\Big) \to 0.$$

Da Y aus S_x^A und präprojektiv ist, gilt mit $\operatorname{Ext}^1(Y, P(x)) = \operatorname{Ext}^1(Y, H) = \operatorname{Ext}^1(Y, \bigoplus_i \tau^{-1} E_i) = 0$ auch $\operatorname{Ext}^1(Y, T_1) = \operatorname{Ext}^1(Y, T_0) = 0$. Wir werden zeigen, daß für diesen Modul Y auch $\operatorname{Ext}^1(T_1, Y) = \operatorname{Ext}^1(T_0, Y) = 0$ gilt. Somit ist $Y \oplus T_0 \oplus T_1$ ein Kippmodul. Nach 5.5 ist $T_0 \oplus T_1$ schon ein Kippmodul, also gilt $Y \in \operatorname{add}(T_0 \oplus T_1)$. Da Y unzerlegbar ist und jeder unzerlegbare direkte Summand X von T_0 die Eigenschaft $\langle h^A, \underline{\dim}\, X \rangle = -h_x^A$ erfüllt, ist $Y \in \operatorname{add} T_1$. Somit gilt $Y \in K_x^A$.

Sei $0 \neq f \in \operatorname{Hom}(P(x), Y)$, sei $K := \operatorname{Ker}(f)$, $C := \operatorname{Koker}(f)$ und $B := \operatorname{Bild}(f)$, wir diskutieren die zwei Fälle:

(1) f is surjektiv, d.h. $C=0$. Wende $\operatorname{Hom}(\bigoplus_{i=1}^{r} M_i, -)$ bzw. $\operatorname{Hom}(T_0, -)$ auf die exakte Sequenz

$$0 \to K \to P(x) \to Y \to 0$$

an. Wir haben dann mit $\operatorname{Ext}^1(\bigoplus_i M_i, P(x))=0$ auch $\operatorname{Ext}^1(\bigoplus_i M_i, Y)=0$ bzw. $\operatorname{Ext}^1(T_0, Y)=0$. Dies ist, was wir zeigen wollten.

(2) f ist nicht surjektiv, d.h. $C \neq 0$ und $B \not\cong Y$. Aus End $(Y) \cong k$ und $\operatorname{Ext}^1(Y, B)=0$ folgt, daß C unzerlegbar ist. Angenommen, daß C präprojektiv ist. Wende $\operatorname{Hom}(Y, -)$ auf die exakte Sequenz

$$0 \to K \to P(x) \to B \to 0$$

an. Dies liefert folgende exakte Sequenz

$$0 \to (Y, K) \to (Y, P(x)) \to (Y, B) \to {}^1(Y, K) \to 0.$$

Da $\operatorname{Hom}(Y, B)=0$ ist, ist $\operatorname{Ext}^1(Y, K)=0$, nun wende $\operatorname{Hom}(-, K)$ auf

$$0 \to B \to Y \to C \to 0 \qquad (***)$$

an. Dann ergibt sich die exakte Sequenz

$$\cdots \to {}^1(C, K) \to {}^1(Y, K) \to {}^1(B, K) \to {}^2(C, K) \to 0.$$

Weil C präprojektiv ist, erhalten wir $\operatorname{Ext}^2(C, K)=0$. Damit ist $\operatorname{Ext}^1(B, K)=0$, also muß $K=0$ sein, d.h. f ist injektiv. Aber $\langle h^A, \underline{\dim}\, C\rangle = \langle h^A, \underline{\dim}\, Y\rangle - \langle h^A, \underline{\dim}\, P(x)\rangle = \partial' Y - (-h_x^A)\rangle > 0$. Dies widerspricht der Präprojektivität von C. Also ist C kein präprojektiver Modul und es gelten $\operatorname{Ext}^1(T_0, C)=0$ sowie $\operatorname{Ext}^1(\bigoplus_i M_i, C)=0$. Wir wissen nämlich, daß $\operatorname{Ext}^1(T_0, B)=0=\operatorname{Ext}^1(\bigoplus_i M_i, B)$ gilt. Nun wenden wir $\operatorname{Hom}(T_0, -)$ bzw. $\operatorname{Hom}(\bigoplus_i M_i, -)$ auf die exakte Sequenz $(***)$ an und erhalten:

$$\cdots \to {}^1(T_0, B) \to {}^1(T_0, Y) \to {}^1(T_0, C) \to 0$$

bzw.

$$\cdots \to {}^1\Big(\bigoplus_i M_i, B\Big) \to {}^1\Big(\bigoplus_i M_i, Y\Big) \to {}^1\Big(\bigoplus_i M_i, C\Big) \to 0.$$

Also sind $\operatorname{Ext}^1(T_0, Y)=0$ und $\operatorname{Ext}^1(\bigoplus_i M_i, Y)=0$, und somit gehört Y schon zu K_x^A. ∎

6.2. KOROLLAR. $C_x^A = K_x^A$.

6.3. KOROLLAR. *Sei Y präprojektiv aus S_x^A, so daß $Y \oplus T_1$ ein partieller A-Modul ist, dann ist Y entweder in K_x^A oder $\langle h^A, \underline{\dim}\, Y\rangle = -h_x^A$ und $\operatorname{Hom}(M_i, Y)=0$ für alle Moduln M_i aus K_x^A.*

Beweis. Sei Y nicht in K_x^A und $Y \ncong P(x)$. Wende $\mathrm{Hom}(-, Y)$ auf $(*)$ an, dann bekommen wir eine exakte Sequenz

$$0 \to (H, Y) \to \left(\bigoplus_{i=1}^{r} M_i^{u_i}, Y\right) \to (P(x)^{h_x^A}, Y) \to {}^1(H, Y) \to 0,$$

daraus folgt $\langle h^A, \underline{\dim}\, Y\rangle = \dim \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i=1}^r M_i^{u_i}, Y) - h_x^A$. Wenn $\mathrm{Hom}(\bigoplus_i^r M_i, Y) \neq 0$ wäre, würde $\langle h^A, \underline{\dim}\, Y\rangle > -h_x^A$ gelten, somit wäre Y nach dem Satz 6.1 in K_x^A. Also ist $\mathrm{Hom}(\bigoplus_i^r M_i, Y) = 0$. Dies impliziert $\langle h^A, \underline{\dim}\, Y\rangle = -h_x^A$. ∎

6.4. *Beweis zum Lemma* 5.7. Nach 6.3 ist der Beweis klar. ∎

7. Domestizierte Erweiterung der Vektorraumkategorie $\mathscr{C}_x^A$

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir gezeigt, daß zu einem Punkt x einer gegebenen zahmen verkleideten Algebra A die Vektorraumkategorie $\mathscr{C}_x^A := (\mathrm{add}\, C_x^A, \mathrm{Hom}(P(x), -))$ gerichtet und kritisch ist. In diesem Abschnitt werden wir den Zusammenhang zwischen $\mathscr{C}_x^A$ und $\mathscr{L}_x^A$ und $\mathscr{R}_x^A$ untersuchen. Es wird gezeigt, daß die Vereinigung von $\mathscr{C}_x^A$ und $\mathscr{R}_x^A$ bzw. von $\mathscr{C}_x^A$ und $\mathscr{L}_x^A$ eine tubulare Erweiterung bzw. eine tubulare Koerweiterung von $\mathscr{C}_x^A$ im Sinne von Ringel ist.

7.1. Lemma. (1) *Der Funktor* $\mathrm{Hom}(P(x), -)$ *ist auf* $\mathrm{add}(L_x^A \cup C_x^A)$ *treu.*

(2) *Der Funktor* $\mathrm{Hom}(P(x), -)$ *ist auf* $\mathrm{add}(C_x^A \cup R_x^A)$ *treu.*

Beweis. (1) Nach 2.4 und 5.9 ist $\mathrm{Hom}(P(x), -)$ auf $\mathrm{add}\, L_x^A$ und $\mathrm{add}\, C_x^A$ schon treu. Wegen 6.3 bleibt es zu zeigen, daß für einen von Null verschiedenen Morphismus $f\colon N \to M$ mit $N \in L_x^A$ und $M \in C_x^A$ immer $\mathrm{Hom}(P(x), f) \neq 0$ gilt.

Nimm ein $\mu \in \mathrm{Hom}(P(x), N)$ mit $\mu \neq 0$, dann ist μ nach 5.1 immer injektiv und der $\mathrm{Koker}(\mu)$ immer ein regulärer unzerlegbarer Modul. Angenommen es ist $\mathrm{Hom}(P(x), f) = 0$. Betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(x) \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "0"'] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Koker}(\mu) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "g"] & 0 \\
& & M & &
\end{tikzcd}$$

Da $\mu f = 0$ ist, existiert ein Morphismus $g\colon \mathrm{Koker}(\mu) \to M$ mit $f = \pi g$. Aber M ist präprojektiver Modul, also ist $g = 0$ und folglich $f = 0$, das ist jedoch ein Widerspruch. Also ist (1) gezeigt.

Zu (2) genügt es, eine analoge Argumentation wie in (1) durchzuführen, wenn man die exakte Sequenz in 2.4 gebraucht.

7.2. Die tubulare Koerweiterung einer Vektorraumkategorie wurde in [Ri] eingeführt. Dort hat Ringel die domestizierten tubularen Koerweiterungen der kritischen gerichteten Vektorraumkategorien vollständig klassifiziert.

Unser Hauptergebnis dieses Abschnittes ist der folgende Satz:

SATZ. (1) $(\mathrm{add}(L_x^A \cup C_x^A), \mathrm{Hom}(P(x), -))$ *ist eine domestizierte tubulare Koerweiterung von* $\mathscr{C}_x^A$.

(2) $(\mathrm{add}(C_x^A \cup R_x^A), \mathrm{Hom}(P(x), -))$ *ist eine domestizierte tubulare Erweiterung von* $\mathscr{C}_x^A$.

Beweis. Sei $C_x^A = \{M_1, \ldots, M_r\}$. Aus der folgenden exakten Sequenz

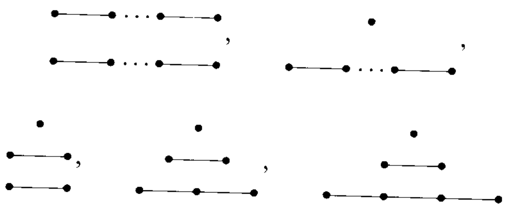
$$0 \to P(x)^{h_x^A} \to \bigoplus_{i=1}^{r} M_i^{t_i} \to H \to 0$$

mit H ein homogener A-Modul folgt:

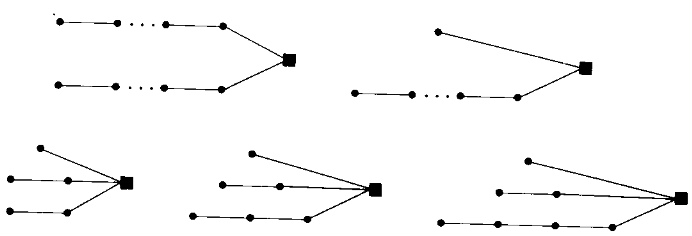
(1) $\dim \mathrm{Hom}(X, \bigoplus M_i^{t_i}) = h_x^A$ für jeden Modul $X \in L_x^A$,

(2) $\dim \mathrm{Hom}(\bigoplus M_i^{t_i}, Y) = h_x^A$ für jeden Modul $Y \in R_x^A$.

Nun folgt der Satz aus dem Lemma 4.1 und der Eindeutigkeit der kritischen Menge in S_x^A. Wenn z.B. $h_x^A = 1$ ist, ist L_x^A als Halbordnung eine der folgenden

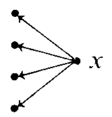


Wir können leicht von den obigen Formen die zugehörigen tubularen Erweiterungen erreichen, und zwar die folgenden:



wobei mit ■ die unzerlegbaren Objekte M mit $\mathrm{Hom}(P(x), M) = k^2$ bezeichnet werden. ▮

7.3. *Beispiele.* (1) Sei A eine zahme verkleidete Algebra, die durch den Köcher

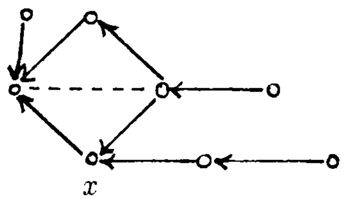


gegeben ist. Für den angegebenen Punkt x gilt:

(a) $S_x^A = C_x^A$.

(b) Jeder Modul aus S_x^A wird von $P(x)$ erzeugt.

(2) Sei A die zahme verkleidete Algebra gegeben durch den Köcher

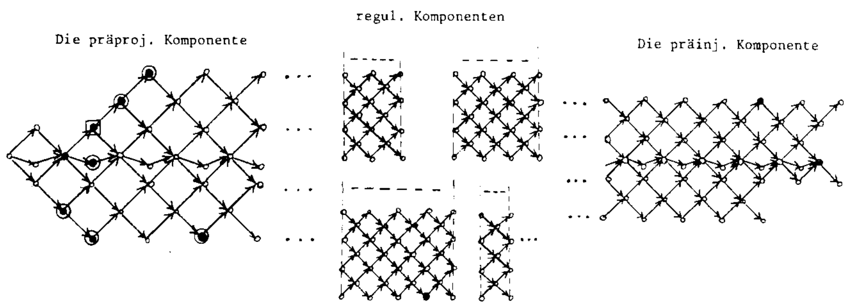


mit

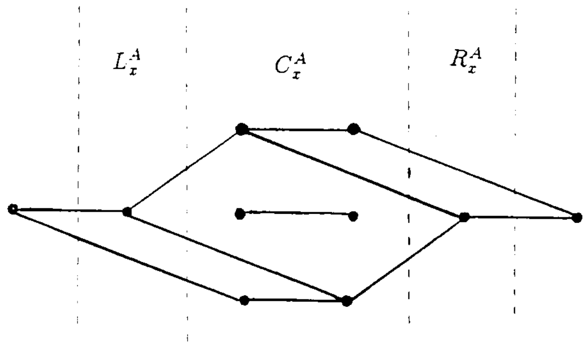
$$h^A = \begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & & & & \\ 2 & & & 2 & & 1 & \\ & & 3 & & 2 & & 1 \end{array} .$$

Wir betrachten den Punkt x mit $h_x^A = 3$.

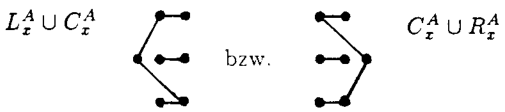
Der Auslander–Reiten–Köcher von A sieht folgendermaßen aus. Dabei bezeichnen wir mit den großen dunklen Punkten die Elemente in S_x^A.



Die unzerlegbaren Moduln in der kitischen Menge C_x^A sind eingekreist, der rechteckig umrandete unzerlegbare Modul bildet die Menge L_x^A, und der einzige reguläre Modul in S_x^A bildet die Menge R_x^A. Die Menge S_x^A wird folgendermaßen zerlegt:



Dabei sind zwei Moduln M und N durch eine Kante M–N genau dann verbunden, wenn $M \geqq N$ und $M \neq N$ gelten und es keinen unzerlegbaren Modul Y aus S_x^A mit $M > Y > N$ gibt. Nun ist es aber klar, daß die Vereinigung von L_x^A und C_x^A bzw. von C_x^A und R_x^A die folgende Form hat:



Sie ist eine tubulare Koerweiterung bzw. Erweiterung von C_x^A.

Referenzen

[Ha] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **119** (1988).

[HV] D. Happel und D. Vossieck, Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component, *Manuscripta Math.* **42** (1983), 221–243.

[NR] L. A. Nazarova und A. V. Rojter, Representations of partially ordered sets, *J. Soviet Math.* **23**, No. 5 (1915), 585–607.

[Ri] C. M. Ringel, "Tame Algebras and Integral Quadratic Forms," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1099, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1984.

[X] C. C. Xi, Vektorraumkategorie zu einem unzerlegbaren projektiven Modul einer Algebra, *J. Algebra* **139** (1991), 355–363.

Printed by Catherine Press, Ltd., Tempelhof 41, B-8000 Brugge, Belgium