解题思路探索

从本科高代的一道习题说起

在本科学习阶段，同学们在学完一节课的知识后，如何运用所学知识来解决问题，如做习题，往往感到比较困难，甚至不知所措，无从下手。下面我们利用矩阵的秩作为例子，探索如何分析思考问题，找出解题思路。

问题: 设A, B是数域上的$m \times n$矩阵，求证: 秩$(A+B) \leq$ 秩$A+$ 秩B.

当看见这个问题时，首先要观察这个不等式的含义。容易看到, 右边的实际上是分块矩阵

$$D := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

的秩，即秩D=秩A+秩B. 这是因为通过初等变换可将A, B分别化为

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$r =$ 秩A, $s =$秩B，用同样的初等变换可将D化为

$$D_1 := \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而D_1的秩容易看出是$r+s$. 因初等变换不改变矩阵的秩，所以秩D =秩$D_1 = r+s$.

不等式的左边出现矩阵的和$A+B$. 如何得到矩阵的和呢？或者说如何用矩阵乘法的形式表示矩阵的和呢？这时你可能会想到: a, b是数,

$$a+b = (1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ 或者 } \quad a+b = (a,b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由此启发，你自然要问，上面的等式能推广到矩阵上吗？如何用矩阵来体现这个等式呢？当然，数域中的1在矩阵中应该就是单位矩阵I_n 了。有了这样的类比，你自然要检查一下下面矩阵的等式是否成立：

$$A+B = (I_m, I_m)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

由分块矩阵的乘法可知，这个等式是成立的。注意: 在所有分块矩阵的乘法中，都要注意乘法是否有定义。这样就有

$$\text{秩}(A+B) = \text{秩}\Big((I_m, I_m)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\Big).$$

再由矩阵乘积的秩与因子的秩的不等式可得

$$秩(A+B) \leq 秩\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

到这里，你自然就要比较

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

的秩. 一个比较容易的想法是将矩阵$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$扩大为

$$C := \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix},$$

这样对角线上就出现了矩阵A 和B, 可以看出, C 与$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$就比较接近. 事实上，从分块矩阵来看，将$D$的第2列加到第一列即得$C$, 也就是

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

由于矩阵$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$是可逆的, 所以右乘这个矩阵不改变原矩阵的秩，即有

$$秩(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}) = 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

这样就有

$$秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix} = 秩(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}) = 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

再由容易看出的不等式: 秩$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix}$, 就得到

$$\begin{aligned}
秩(A+B) &= 秩\left((I_m, I_m)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \\
&\leq 秩\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
&\leq 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix} \\
&= 秩(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}) \\
&= 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\
&= 秩A + 秩B.
\end{aligned}$$

在这个思考的过程中，我们用到的知识和概念主要是

(1) 分块矩阵的乘法、秩的定义。

(2) 给一个矩阵添加一行或一列得到的新矩阵的秩大于等于原矩阵的秩。

(3) 矩阵乘积的秩小于等于因子的秩。

(4) 给一个矩阵(不必方阵)左乘或右乘一个可逆矩阵不改变矩阵的秩。

(5) 初等变换不改变矩阵的秩。

(6) 施行一次行的初等变换就相当于左乘一个相应的初等矩阵；施行一次列的初等变换就相当于右乘一个相应的初等矩阵。

上面写的是思考的过程，看起来有点长，但把这个过程写成书面的证明，就是如下的简短形式：

证: 利用矩阵乘积的秩小于等于因子的秩，以及左乘或右乘一个可逆矩阵不改变矩阵的秩的事实，有

$$秩(A+B) = 秩\left((I_m, I_m)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \le 秩\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \le 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix}$$

$$= 秩\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\right) = 秩\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = 秩A + 秩B.$$

2020年11月24日惠昌常于首师大

上面是用分块矩阵来证明的。下面介绍另一种证法: 利用的是矩阵的秩也可用行向量组成的空间(或列向量组成的空间)的维数来证明。

首先，假设A和B的列向量分别是$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$和$\beta_1, \cdots, \beta_n$,这样$A+B$ 的列向量就自然的是$\alpha_1+\beta_1, \cdots, \alpha_n+\beta_n$. 因为矩阵的秩是列向量组的极大无关组所含向量的个数，所以进一步假设$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$和$\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_s}$分别是$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$和$\beta_1, \cdots, \beta_n$的极大无关组，也就有秩$(A) = r$, 秩$(B) = s$. 这样，由极大无关组的定义容易知道,$\alpha_1+\beta_1, \cdots, \alpha_n+\beta_n$ 的每个向量都可由$\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_s}\}$这组向量线性表示，所以$\alpha_1+\beta_1, \cdots, \alpha_n+\beta_n$的极大无关组所含向量个数不超过$r+s$(原由是通常所说的替换定理),即秩$(A+B) \le r+s =$ 秩$(A)+$ 秩(B).

利用行向量也可同样证明。

上面我们用到的知识和概念主要有

(1) 矩阵秩的另一种定义: 矩阵的是等于列向量组的极大无关组向量的个数, 也等于行向量的极大无关组所含向量的个数。

(2) 一组向量的极大无关组的定义。

(3) 替换定理: 向量$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性无关，且可由$\beta_1, \cdots, \beta_t$这组向量线性表示,则$s \le t$,且在重排这些$\beta_i$的顺序下，可得$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t\}$与$\{\beta_1, \cdots, \beta_t\}$等价.

2020年12月28日惠昌常于北京

利用矩阵的列空间的维数类似地也可证明另一个习题。

问题: 设A,B分别是数域上的$m\times n$和$n\times p$矩阵，且$AB=0$, 求证: 秩(A)+秩$(B)\le n$.

思考: 当你看到$AB=0$时，你就得想如果将矩阵B按列分块，它的每列都是线性方程组$AX=0$的解，这样矩阵B 的列空间就是齐次线性方程组$AX=0$的解空间的子空间，而这个解空间的维数是n-秩(A), 这样由于子空间的维数不超过大空间的维数，可得: 秩$(B)\le n-$秩(A), 即秩(A)+秩$(B)\le n$.

证: 设B的列向量为$\beta_1,\cdots,\beta_p$，B的列空间记作L. 由$AB=0$ 知，β_i是线性方程组$AX=0$的解，所以B的列空间L是$AX=0$的解空间V的子空间，从而

$$\text{秩}(B)=dim(L)\le dim(V)=n-\text{秩}(A),\ \text{即 秩}(A)+\text{秩}(B)\le n.$$

利用分块矩阵以及矩阵乘积的秩小于等于因子的秩这个事实，也可给出另一个证明。下面介绍2020级一班陈柏伊同学的一个证法.

证: 令

$$C:=\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix}, D:=(I_n,B),\ E:=CD=\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}.$$

因为A的一个r阶非零子式和B的一个s阶非零子式都会给出E的一个分块下三角子式,其中对角线上分别是A和B 的非零子式, 所以E的这个$r+s$阶子式也是非零的，从而

$$\text{秩}(E)\ge\text{秩}(A)+\text{秩}(B).$$

于是 秩$(A)+$ 秩$(B)\le$ 秩$(E)\le$ 秩$(C)\le n$.

请同学们自己思考这两种证明中用到的知识点。

再观察一下上面的证明，你可以得到下面的一般事实：

设A是$m\times n$矩阵, B是$p\times q$矩阵, C是$p\times n$矩阵，则

$$\text{秩}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\ge\text{秩}(A)+\text{秩}(B).$$

思考: 这里的不等号会不会就是等号呢?

2021年1月5日惠昌常于北京