《高等代数》中矩阵的一个小应用
矩阵如何公开传送你的秘密?

惠昌常 (Changchang Xi)

April 20, 2022

首都师范大学数学科学学院
21级实验班

这节课的目的

矩阵的小应用

大家也许体会到，目前所学高等代数的内容大都与矩阵的理论相关，如线性方程组的求解、二次型、线性变换、线性空间，甚至多项式也在矩阵中出现，如矩阵的特征多项式。已经知道，矩阵在解析几何、坐标变换、投入产出、交通线路、电网等方面有应用，那么矩阵还会在我们的生活中有其他的用处吗？

为了提高大家的学习兴趣，今天介绍矩阵的一个小应用的例子：

如何利用矩阵在公开的通讯系统中来传送秘密?

即矩阵应用于密码学中的一个例子。

- 密码学(cryptography)就是研究信息传输过程中的加密、解密和相关的问题的一门学科。

这节课的目的

矩阵的小应用

大家也许体会到，目前所学高等代数的内容大都与矩阵的理论相关，如线性方程组的求解、二次型、线性变换、线性空间，甚至多项式也在矩阵中出现，如矩阵的特征多项式。已经知道，矩阵在解析几何、坐标变换、投入产出、交通线路、电网等方面有应用，那么矩阵还会在我们的生活中有其他的用处吗？

为了提高大家的学习兴趣，今天介绍矩阵的一个小应用的例子：

如何利用矩阵在公开的通讯系统中来传送秘密?

即矩阵应用于密码学中的一个例子。

- 密码学(cryptography)就是研究信息传输过程中的加密、解密和相关的问题的一门学科。

- 问题: 你想用手机给你的朋友发个重要的(商业)信息, 但你不想让很多人知道这个秘密。那怎么办呢? 比如: 有疫情, 你不能出门亲自送信息, 也没法直接打电话告诉(有被窃听的风险). 现有的条件就是朋友圈发短息、微信、邮件(email)、电报等公开的通讯设施.
- 办法: 那就是你对信息加密后, 公开发送。大家都能看到你发的信息, 但不知其意!

- 问题: 你想用手机给你的朋友发个重要的(商业)信息, 但你不想让很多人知道这个秘密。那怎么办呢? 比如: 有疫情, 你不能出门亲自送信息, 也没法直接打电话告诉(有被窃听的风险). 现有的条件就是朋友圈发短息、微信、邮件(email)、电报等公开的通讯设施.
- 办法: 那就是你对信息加密后, 公开发送。大家都能看到你发的信息, 但不知其意!

加密的方法: 置换

- 最简单的加密信息的办法就是我们所学的置换。如将26个英文字母置换。

原码: $ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ$

置换为

密码: $CDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZAB$

这样原始信息

GAO DENG DAI SHU IS INTERESTING

就变成了

ICQ FGPI FCK UJW KU KPVGTGUVKPI

加密的方法: 置换

- 最简单的加密信息的办法就是我们所学的置换。如将26个英文字母置换。

原码: $ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ$

置换为

密码: $CDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZAB$

这样原始信息

GAO DENG DAI SHU IS INTERESTING

就变成了

ICQ FGPI FCK UJW KU KPVGTGUVKPI

加密的方法: 置换

- 最简单的加密信息的办法就是我们所学的置换。如将26个英文字母置换。

原码: $ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ$

置换为

密码: $CDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZAB$

这样原始信息

GAO DENG DAI SHU IS INTERESTING

就变成了

ICQ FGPI FCK UJW KU KPVGTGUVKPI

加密的方法: 置换

- 最简单的加密信息的办法就是我们所学的置换。如将26个英文字母置换。

原码: $ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ$

置换为

密码: $CDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZAB$

这样原始信息

GAO DENG DAI SHU IS INTERESTING

就变成了

ICQ FGPI FCK UJW KU KPVGTGUVKPI

但这样的密码系统比较容易破解。于是就有人提出另外的一些办法, 如

- Hill密码, 它是将原始信息分成n个字母的小组，再把每个小组加密。这样的想法是Lester S. Hill 在1929年和1931年在Amer. Math. Monthly 上的文章引入的.

我们将26个字母用数字来标记

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

- 比较简单的办法将原始码依次每2个字母为一组，最后不够时就用最后的字母填充, 再把每组的原始码用2×2矩阵变换为加密的信息。

但这样的密码系统比较容易破解。于是就有人提出另外的一些办法, 如

- Hill密码, 它是将原始信息分成n个字母的小组，再把每个小组加密。这样的想法是Lester S. Hill 在1929年和1931年在Amer. Math. Monthly 上的文章引入的.

我们将26个字母用数字来标记

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

- 比较简单的办法将原始码依次每2个字母为一组，最后不够时就用最后的字母填充, 再把每组的原始码用2×2矩阵变换为加密的信息。

Example

- 原始信息: I AM HIDING
- 传输矩阵为2×2 矩阵: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- 原始信息分组: IA MH ID IN GG
- 数字表示: (9,1), (13, 8), (9,4), (9,14), (7,7).
- 用矩阵A加密(9,1)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

用矩阵A加密(13,8)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Example

- 原始信息: I AM HIDING
- 传输矩阵为2×2 矩阵: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- 原始信息分组: IA MH ID IN GG
- 数字表示: (9,1), (13, 8), (9,4), (9,14), (7,7).
- 用矩阵A加密(9,1)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

用矩阵A加密(13,8)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Example

- 原始信息: I AM HIDING
- 传输矩阵为2×2 矩阵: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- 原始信息分组: IA MH ID IN GG
- 数字表示: (9,1), (13, 8), (9,4), (9,14), (7,7).
- 用矩阵A加密(9,1)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

用矩阵A加密(13,8)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Example

- 原始信息: I AM HIDING
- 传输矩阵为2×2 矩阵: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- 原始信息分组: IA MH ID IN GG
- 数字表示: (9,1), (13, 8), (9,4), (9,14), (7,7).
- 用矩阵A加密(9,1)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

用矩阵A加密(13,8)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Example

- 原始信息: I AM HIDING
- 传输矩阵为2×2 矩阵: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- 原始信息分组: IA MH ID IN GG
- 数字表示: (9,1), (13, 8), (9,4), (9,14), (7,7).
- 用矩阵A加密(9,1)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

用矩阵A加密(13,8)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Example

- 原始信息: I AM HIDING
- 传输矩阵为2×2 矩阵: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- 原始信息分组: IA MH ID IN GG
- 数字表示: (9,1), (13, 8), (9,4), (9,14), (7,7).
- 用矩阵A加密(9,1)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

用矩阵A加密(13,8)为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

- 29不在我们的表中，怎么办？我们约定超过25的那些数用模26的同余类来标记。这样这些数字就与26个字母一一对应起来了，可以说这些字母也有了运算！

$$A\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29\\24\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}3\\24\end{pmatrix}\pmod{26}.$$

- 类似的计算就有

$$A\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\12\end{pmatrix},$$
$$A\begin{pmatrix}9\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37\\42\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}\pmod{26},$$
$$A\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\21\end{pmatrix}.$$

- 29不在我们的表中，怎么办？我们约定超过25的那些数用模26的同余类来标记。这样这些数字就与26个字母一一对应起来了，可以说这些字母也有了运算！

$$A\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29\\24\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}3\\24\end{pmatrix}\pmod{26}.$$

- 类似的计算就有

$$A\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\12\end{pmatrix},$$
$$A\begin{pmatrix}9\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37\\42\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}\pmod{26},$$
$$A\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\21\end{pmatrix}.$$

于是加密后的信息是

(11,3) (3,24) (17,12) (11,16) (21,21)

翻译成字母就是

KC CX QL KP UU

于是加密后的信息是

(11,3) (3,24) (17,12) (11,16) (21,21)

翻译成字母就是

KC CX QL KP UU

如何破解这个收到的信息？

- 问题: 收到这样的信息后如何解读呢？即怎样解码呢？
- 例如：传送的矩阵是$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

收到的加密信息是

KSYBKYQUZKYHEU

怎么知道它的意思呢?

如何破解这个收到的信息？

- 问题: 收到这样的信息后如何解读呢？即怎样解码呢？
- 例如：传送的矩阵是$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

收到的加密信息是

KSYBKYQUZKYHEU

怎么知道它的意思呢?

如何破解这个收到的信息？

- 问题: 收到这样的信息后如何解读呢？即怎样解码呢？
- 例如：传送的矩阵是$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

收到的加密信息是

KSYBKYQUZKYHEU

怎么知道它的意思呢?

如何破解这个收到的信息？

- 问题: 收到这样的信息后如何解读呢？即怎样解码呢？
- 例如：传送的矩阵是$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

收到的加密信息是

KSYBKYQUZKYHEU

怎么知道它的意思呢?

可逆矩阵的作用

- 如果知道这个矩阵A的逆矩阵,给这些向量乘以A^{-1}就知道原始的数对, 在依照字母与数字的对应, 就得到它的意思了. 由于这里我们用的是模26的同余类, 所以我们要求的逆矩阵也是模26的同余类的矩阵, 即

$$AB = BA = E_2 \pmod{26}$$

容易知道, 这样的矩阵可逆的充要条件是它的行列式模26的余数与26是互素的.

- 这样, $\det(A) = 3$, $3^{-1} \equiv 9 \pmod{26}$, 由$AA^* = det(A)^{-1}E$得

$$A^{-1} = 9\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 27 & -54 \\ -18 & 45 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

可逆矩阵的作用

- 如果知道这个矩阵A的逆矩阵,给这些向量乘以A^{-1}就知道原始的数对, 在依照字母与数字的对应, 就得到它的意思了. 由于这里我们用的是模26的同余类, 所以我们要求的逆矩阵也是模26的同余类的矩阵, 即

$$AB = BA = E_2 \pmod{26}$$

容易知道, 这样的矩阵可逆的充要条件是它的行列式模26的余数与26是互素的.

- 这样, $\det(A) = 3$, $3^{-1} \equiv 9 \pmod{26}$, 由$AA^* = det(A)^{-1}E$得

$$A^{-1} = 9\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 27 & -54 \\ -18 & 45 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

- 将

KSYBKYQUZKYHEU

翻译成数字向量

$$(11,19),(25,2),(11,25),(17,21),(0,11),(25,8),(5,21).$$

- 给它们左乘A^{-1} (mod 26):

$$\begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\ 20\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ 4\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\ 7\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\ 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 15\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 14\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\ 23\end{pmatrix}.$$

- 将

KSYBKYQUZKYHEU

翻译成数字向量

$$(11,19),(25,2),(11,25),(17,21),(0,11),(25,8),(5,21).$$

- 给它们左乘A^{-1} (mod 26):

$$\begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\ 20\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ 4\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\ 7\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\ 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 15\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 14\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 24\\ 8 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\ 23\end{pmatrix}.$$

- 将

KSYBKYQUZKYHEU

翻译成数字向量

$(11, 19), (25, 2), (11, 25), (17, 21), (0, 11), (25, 8), (5, 21).$

- 给它们左乘A^{-1} (mod 26):

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

- 得到数对

$$(19, 20), (21, 4), (25, 7), (1, 15), (4, 1), (9, 14), (15, 23).$$

- 用字母翻译出来:

ST UD YG AO DA IN OW

- 所要的信息是:

STUDY GAO DAI NOW

现在学高代

- 你也可以用3 个字母一组, 用3×3矩阵; 也可以先置换, 再分组, 然后用矩阵变换. 选择手段会很多的!
- 现实的通讯还要考虑传输中其他的干扰等问题。

- 得到数对

$$(19, 20), (21, 4), (25, 7), (1, 15), (4, 1), (9, 14), (15, 23).$$

- 用字母翻译出来:

ST UD YG AO DA IN OW

- 所要的信息是:

STUDY GAO DAI NOW

现在学高代

- 你也可以用3 个字母一组, 用3×3矩阵; 也可以先置换, 再分组, 然后用矩阵变换. 选择手段会很多的!
- 现实的通讯还要考虑传输中其他的干扰等问题。

- 得到数对

$$(19, 20), (21, 4), (25, 7), (1, 15), (4, 1), (9, 14), (15, 23).$$

- 用字母翻译出来:

ST UD YG AO DA IN OW

- 所要的信息是:

STUDY GAO DAI NOW

现在学高代

- 你也可以用3 个字母一组, 用3×3矩阵; 也可以先置换, 再分组, 然后用矩阵变换. 选择手段会很多的!
- 现实的通讯还要考虑传输中其他的干扰等问题。

- 得到数对

$$(19, 20), (21, 4), (25, 7), (1, 15), (4, 1), (9, 14), (15, 23).$$

- 用字母翻译出来:

ST UD YG AO DA IN OW

- 所要的信息是:

STUDY GAO DAI NOW

现在学高代

- 你也可以用3 个字母一组, 用3×3矩阵; 也可以先置换, 再分组, 然后用矩阵变换. 选择手段会很多的!
- 现实的通讯还要考虑传输中其他的干扰等问题。

- 得到数对

$$(19, 20), (21, 4), (25, 7), (1, 15), (4, 1), (9, 14), (15, 23).$$

- 用字母翻译出来:

ST UD YG AO DA IN OW

- 所要的信息是:

STUDY GAO DAI NOW

现在学高代

- 你也可以用3 个字母一组, 用3×3矩阵; 也可以先置换, 再分组, 然后用矩阵变换. 选择手段会很多的!
- 现实的通讯还要考虑传输中其他的干扰等问题。

- 得到数对

$$(19, 20), (21, 4), (25, 7), (1, 15), (4, 1), (9, 14), (15, 23).$$

- 用字母翻译出来:

ST UD YG AO DA IN OW

- 所要的信息是:

STUDY GAO DAI NOW

现在学高代

- 你也可以用3 个字母一组, 用3×3矩阵; 也可以先置换, 再分组, 然后用矩阵变换. 选择手段会很多的!
- 现实的通讯还要考虑传输中其他的干扰等问题。

- 得到数对

$$(19, 20), (21, 4), (25, 7), (1, 15), (4, 1), (9, 14), (15, 23).$$

- 用字母翻译出来:

ST UD YG AO DA IN OW

- 所要的信息是:

STUDY GAO DAI NOW

现在学高代

- 你也可以用3 个字母一组, 用3×3矩阵; 也可以先置换, 再分组, 然后用矩阵变换. 选择手段会很多的!
- 现实的通讯还要考虑传输中其他的干扰等问题。

今天举的是一个小例子, 其背后涉及的是信息安全。说大点，在商业上就可能是传送商业机密, 再大点，可能就是传送军事机密, 更大点，可能就是国家机密。

希望大家树立远大理想, 好好学习, 把疫情的不便变为学习知识的有利机会, 学好高代，为今后在工作岗位上更好地为国家发展贡献自己的力量, 打下坚实的基础.

2022年4月20日, 星期三(惠昌常于花园桥校区数学楼620室)