如何在阅读中思考问题？

——点点滴滴(一)

在阅读数学文章或学习他人的结论时，一定要有自己独立的思考。不仅读明白文章中的想法和证明，还要试图脱离其方法或思路来思考同样的问题，逐步的学会发现问题和提出新的结论，推进相关的研究成果. 要做到这一点，需要从点滴开始，日积月累终成大器。下面我们就从一个例子来做点说明。考虑如下同调代数中的一个结论：

假设A, B 是两个代数。对任意的模${}_BX$, ${}_AY$, ${}_BM_A$, 如果${}_BM$投射, M_A 平坦, 则 $\mathrm{Ext}^n_A({}_AY, \mathrm{Hom}_B({}_BM, {}_BX)) \simeq \mathrm{Ext}^n_B(M\otimes_A Y, {}_BX)$对$\forall n \geq 0$成立。如果 $\mathrm{Ext}^p_B(M, X) = 0$, $\forall p > 0$ 且 M_A投射, 则 $\mathrm{Ext}^n_A({}_AY, \mathrm{Hom}_B({}_BM, {}_BX)) \simeq \mathrm{Ext}^n_B(M\otimes_A Y, {}_BX)$。

证明　对任意的 ${}_BX$, 我们有短正合列 $0 \to_B X \to I_0 \to X' \to 0$, 其中 I_0是内射模。由假设可知, $\mathrm{Ext}^n_B(M, X) = 0$, $\forall n > 0$. 这样我们用函子$\mathrm{Hom}_B(M, -)$ 作用上述正合列就得到了下面的 A-模的正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M, I_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M, X') \longrightarrow 0.$$

利用伴随同构定理，我们就得到了以下的正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A Y, I_0) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_B(M\otimes_A Y, X') \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^1_B(M\otimes_A Y, X) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\simeq"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_A(Y, \mathrm{Hom}_B(M, I_0)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(Y, \mathrm{Hom}_B(M, X')) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(Y, \mathrm{Hom}_B(M, X)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

由于 ${}_BI_0$是内射模, M_A是投射模, 从而 $\mathrm{Hom}_B(M, I_0)$是内射 A-模, 因此上述正合交换图表的第二行的映射是满射。由于竖向的前两个都是同构，就得到第第三项也是同构，从而证明了结论中的第一个同构等式。

如果我们取短正合列$0 \to Y' \to P \to_A Y \to 0$, 其中 P 是投射 A-模。使用函子$M\otimes_A -$作用上述正合列就得到了如下的B-模的正合列

$$0 \longrightarrow M\otimes_A Y' \longrightarrow M\otimes_A P \longrightarrow M\otimes_A Y \longrightarrow 0.$$

因此我们可类似的得到上述结论中的第二个结果.

从这两个同构式中，我们可以看出，由于证法的不用,所需要的条件也不同。这些不同的条件会使人们应用起来更方便一些。当我们知道第一个式子和它的证明时，就要试图去想有没有类似的第二个同构式。如何能想到这一点呢? 具体到这些同构式, 由于 $\mathrm{Ext}^n(X, Y)$ 有两种定义, 一种是利用关于X的投射分解来计算, 另一种是关于Y 的内射分解的计算。这样就可以试一试从两种分解中能否得到新的结果。

惠昌常

2015年7月9日，德国 Stuttgart