如何在阅读中思考问题？

——点点滴滴(二)

在阅读数学文章或学习其中的一个结论时，要给自己一点时间，去独立地思考、理解和联想，也就是说，在读明白文章中的想法、证明和表述后，还要试图理解和思考这些结论究竟意味着什么，能给我们提供哪些进一步的信息，比如：在一些特殊情况下，这些结论讲的是什么，它们与以前的哪些知识可能有联系。通过这些思考，希望能对所学的东西有一个自己的独特理解，能理解的较深刻一些。下面我们就从一个简单的例子来做点说明。在同调代数的一般教科书中都会有如下结论：

假设R是一个有单位元的环，M是一个R-模，定义M的Pontrjagin 对偶为$M^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

A sequence of R-modules $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ is exact if and only if the sequence of Pontrjagin dual modules $0 \to C^\vee \xrightarrow{g^\vee} B^\vee \xrightarrow{f^\vee} A^\vee \to 0$ is exact.

首先，直观来看，这个结论将模序列的正合性转化为了对偶模的正合性。其实，这个结论有许多简单的特殊情况值得思考：

(1) 如果$C = 0$, 就给出何时f 是单射的条件；如果$A = 0$, 我们就将g是否满射归结为对偶$g^\vee$是否单射。

(2) Pontrjagin对偶没有这样的性质：对任意的R-模M, $(M^\vee)^\vee \simeq M$. 但由上述结论可得：若$f : M \to N$是一个模同态，则f 是一个同构当且仅当$f^\vee : M^\vee \to N^\vee$是一个模同构.

证明：需要证明的是：$f^\vee : M^\vee \to N^\vee$是同构能推出$f : M \to N$是同构。对此我们只要考虑序列：$0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0 \to 0$. 利用前面的结论即可得到所要。

利用(2), 我们还可以得到如下的结论：

(3) 设$f : S \to R$ 是一个环的满态射(ring epimorphism), ${}_S N$是一个S-模。如果$N^\vee$是一个R-模，则N 本身还是一个R-模，使得它的S-模结构是由限制系数而来的。

证明：考察S-模同态$g : N \to R \otimes_S N, n \mapsto 1 \otimes n$. 我们证明：$g^\vee : (R \otimes_S N)^\vee \to N^\vee$ 是个同构。可以验证，$g^\vee$ 就是伴随映射：$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_S N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_S(R_S, N^\vee)$. 当然后者是$S$-模同构。注意，由于$f$ 是满同态，且R和$N^\vee$都是右R-模，所以就有$\mathrm{Hom}_S(R_S, N^\vee) = \mathrm{Hom}_R(R_R, N^\vee) = N^\vee$. 这样，根据(2), 我就知道，$g$ 是同构(作为S-模的同构)。容易看到，$R \otimes_S N$ 有一个左R-模结构，这样，即可得N 的一个R- 模结构。

这个例子说明，通过简单观察和思考，不断深入，就有可能得到比较深刻的结论。在培养思考的习惯时，还有一个基本问题要思考，那就是想一想所学结论的逆命题是否成立。如：我们知道，如果$M \simeq N$, 则$M^\vee \simeq N^\vee$. 那么它反过来对吗？即：如果有两个模M和N满足$M^\vee \simeq N^\vee$，是否可得$M \simeq N$? 有人也许会说，由(2) 可知，这是对的。究竟对不对，还是留给大家来判断。请大家注意这个问题的前提和(2)中条件的区别。细心观察问题间的区别，这也是在学习的过程中要注意的。

惠昌常

2016年3月16日，首师大北二区