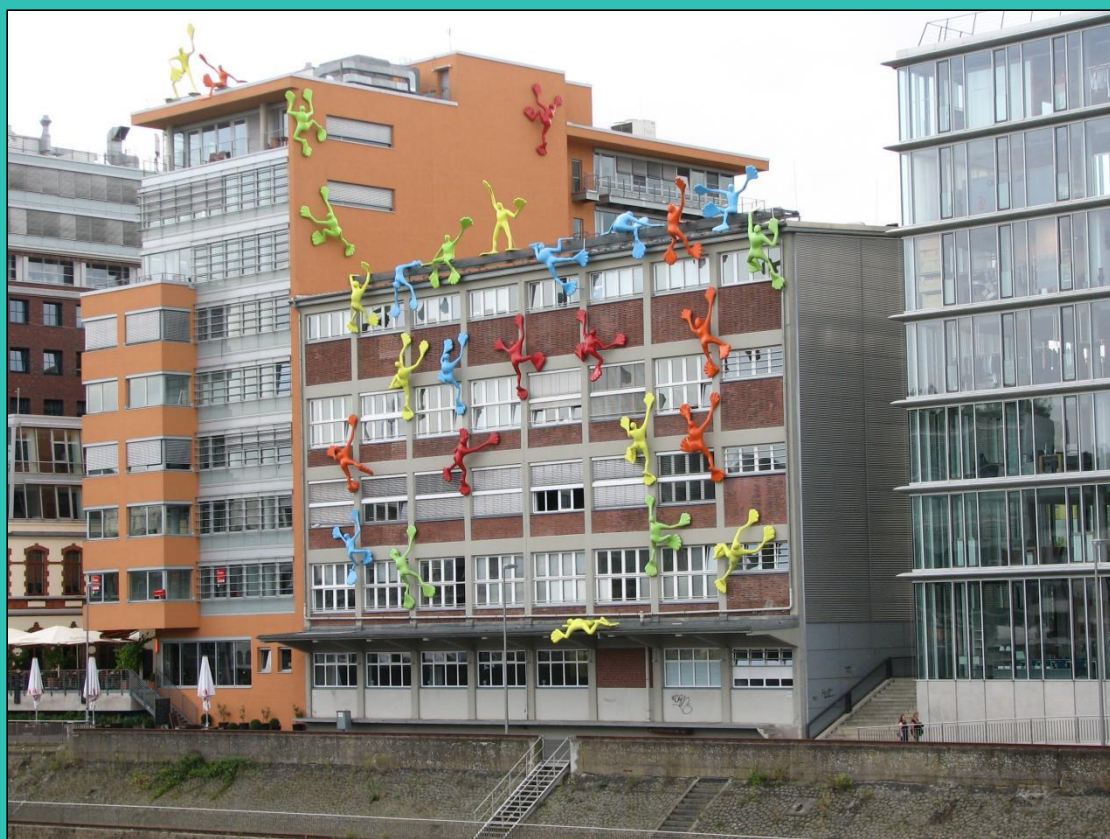


汕头大学数学系讲义

层论导引

徐 斐



2026 年 1 月 7 日

层论导引

徐斐*

2026 年 1 月 7 日

目录

1	第一讲	4
1.1	经典层论回顾	4
1.2	Grothendieck 拓扑与层	5
2	第二讲	10
2.1	拓扑斯	10
2.2	拓扑的更多例子	11
2.3	计算实例	13
3	第三讲	16
3.1	若干概念	16
3.2	半层化	19
3.3	层化	22
4	第四讲	25
4.1	层化与拓扑	25
4.2	局部满态射与层化	28
4.3	局部满态射与拓扑	31
4.4	阶段性结语	33
5	第五讲	34
5.1	连续函子与座态射	34
5.2	上连续函子与座态射	38
5.3	拓扑斯态射	40
6	第六讲	42
6.1	诱导拓扑与限制	42
6.2	广义切片范畴	44
6.3	切片拓扑斯	46

*几乎所有内容均来自经典文献，错漏之处必为作者问题。请读者指正！邮箱：fxu@stu.edu.cn

7 第七讲	49
7.1 阿贝尔层	49
7.2 具有代数结构的层	50
7.3 结构层及其模	51
7.4 赋环拓扑斯及其模	53
7.5 张量与内态射	55
7.6 模的整体与局部性质	57
8 第八讲	59
8.1 拓扑斯上同调	59
8.2 Čech 上同调	63
8.3 模表示应用举例	66
8.4 阶段性结语	69
9 第九讲	70
9.1 覆盖空间基本定理	70
9.2 笛卡尔态射与纤维范畴	71
9.3 纤维范畴产生伪函子	73
9.4 伪函子产生纤维范畴	77
9.5 三个例子	79
10 第十讲	82
10.1 下降数据范畴	82
10.2 广义下降数据范畴	85
10.3 叠形	87
11 第十一讲	91
11.1 2-纤维积	91
11.2 叠形化	93
11.3 叠形的函子性	96
11.4 叠形的局部化	98
11.5 比较引理	99

引言

本文内容起源于 2020-2024 年在汕头大学数学系讲授的几次博士生课程《同伦与同调》的手写讲义，目标是探讨层、叠形乃至高阶范畴方法在有限群模表示中的应用。课程内容分为两个部分：一是经典层论，二是 Grothendieck 层论。前者与代数拓扑关系密切，后者选材基于范畴论和同调代数。此文主要包含课程讲义的后半部分内容，由郑晨佑、张懋胤、赵一豪三位同学转成 LaTeX。

给定一个小范畴（如有有限群相关各类范畴） $\mathcal{C}$ ，我们称反变函子 $\mathfrak{F} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{S}et$ 为 $\mathcal{C}$ 上的集合预层（presheaf of sets）。如果赋予 $\mathcal{C}$ 一个 Grothendieck 拓扑 $\mathcal{J}$ ，则后者可以提供预层上的约束条件（某种黏合性质），而满足条件 $\mathcal{J}$ 的预层叫做集合层（sheaf of sets）。我们称 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为一个座（site，取底座之意，也有人翻译为“位形”），而构建其上的代数结构 $\mathfrak{F}$ 为座 $\mathbf{C}$ 上的层。如

果 $\mathcal{C}$ 是拓扑空间 X 的开集偏序集 $\mathcal{P}_X$ (偏序由包含关系给出, 赋予相应的典范 Grothendieck 拓扑 $\mathcal{J}_{can}$), 那么座 $(\mathcal{P}_X, \mathcal{J}_{can})$ 上的层论就是 X 上的经典层论, 这些层又等价于 X 上的平展空间 (étale space, X 的某种“覆盖空间” $p: E \rightarrow X$)。在实际应用中, 我们往往需要进一步考虑具有代数结构的层, 如环层 (sheaf of rings) 和阿贝尔层 (sheaf of abelian groups 或 abelian sheaf) 等。

为了模拟覆盖 (covering 或 fibration) 这一重要代数拓扑构造, Grothendieck 引入了范畴的覆盖, 即纤维范畴概念 (fibred category)。范畴 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴等价于反变伪函子 (pseudofunctor) $\mathfrak{F}: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{Cat}$ (因而是广义预层, 有时也叫预叠形, prestack)。同样, 赋予 $\mathcal{C}$ 一个 Grothendieck 拓扑 $\mathcal{J}$ 相当于附加给前述伪函子某种黏合条件, 而满足条件 $\mathcal{J}$ 的伪函子叫做叠形 (stack)。由于 $\mathcal{Cat}$ 是 2-范畴, 所以 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 上所有叠形构成 2-范畴。基于上述类比, 人们有时也说叠形是 2-层。

层这一术语来自法文 faisceau, 早期英文同时将其翻译为 sheaf 和 stack (这两个近义词都有“束”和“捆”的意思)。后期发展过程中, 两个英文单词的数学含义被区分和明确。中文将 sheaf 翻译为层, 可能是起源于其拓扑中的覆盖之含义。法文中, stack 对应 champ, 当前中文翻译为“叠形” (也有翻译为“叠”或“堆栈”), 应该是基于流形 (manifold) 和概形 (scheme) 的译法 (因为这些几何体都是更为基本的几何体黏合而成)。

本文内容以经典的范畴论和同调代数知识为基础, 如 Mac Lane 的《Categories for the Working Mathematician》(第二版, 第 1-10 章) 和 Rotman 的《An Introduction to Homological Algebra》(第二版) 的主体内容。讲义所有内容均包含在经典著作中, 如原创的 SGA4, 以及 Kashiwara-Schapira 的《Categories and Sheaves》、MacLane-Moerdijk 的《Sheaves in Geometry and Logic》、Johnstone 的《Sketches of an Elephant: a Topos Theory Compendium》, 还有在线参考书 Stacks Project。作者加入了若干可计算的例子。

感谢北京师范大学胡维教授允许作者使用其 WeMath 平台, 并尽心排版, 使得讲义能够电子化。受限于个人知识水平、写作能力和理解角度, 所以文中不可避免含有不少错漏和谬误之处, 敬请读者批评指正!

1 第一讲

1.1 经典层论回顾

Leray 和 Schauder (1934 年) 在水动力方程研究中使用了拓扑方法。二战中被俘后, Leray (1940-1944 年) 在纳粹集中营开办了一所大学, 讲授代数拓扑并涉及到上同调群的计算。在此过程中, 他发明了谱序列和层的概念, 战后陆续发表一系列工作。随后在 Cartan 的讨论班中 (1950 年代), Lazard 给出层的一个等价定义, 利用平展空间来描述层。很快, Serre (1955 年) 成功地将层和谱序列应用于代数几何、代数拓扑; Grothendieck (1957 年) 为研究 Weil 猜想, 将层从拓扑空间推广到范畴上。

定义 1.1.1: 拓扑空间上的层

设 (X, T) 为一个拓扑空间。记 $\mathcal{P}_X$ 为 X 中所有开集通过包含关系形成的偏序集 (将 $\subset$ 用 $\rightarrow$ 表示, 看作一个范畴)。称反变函子 $\mathfrak{F}: \mathcal{P}_X^{op} \rightarrow \text{Set}$ 为 X 上一个**集合预层**, 简称预层。对于 $V \rightarrow U$ 和 $s \in \mathfrak{F}(U)$, 记 $s|_V := \mathfrak{F}(V \rightarrow U)(s)$, 称为 s 在 $\mathfrak{F}(V)$ 中的限制。

假设 $\mathfrak{F}$ 还满足以下条件, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 X 上的**集合层**, 简称层:

- (1) (黏合存在性) 对 $\forall U \in \text{Ob} \mathcal{P}_X$ 及 $\forall U = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ (即 $V_{\alpha} \in \text{Ob} \mathcal{P}_X$ 形成的 U 的开覆盖), 若有 $\{s_{\alpha} \in \mathfrak{F}(V_{\alpha})\}_{\alpha}$ 使得 $s_{\alpha}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}} = s_{\beta}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}}$ 对任意 α, β 都成立, 则存在 $s \in \mathfrak{F}(U)$ 使得 $s|_{V_{\alpha}} = s_{\alpha}, \forall \alpha$.
- (2) (黏合唯一性) 如果有 $s, t \in \mathfrak{F}(U)$, 满足 $s|_{V_{\alpha}} = t|_{V_{\alpha}}, \forall \alpha$, 那么 $s = t$.

上述定义中的条件 (1) 和 (2) 可以通过更加简洁 (但是抽象) 的范畴论术语来表达。

注解 1.1.2: 黏合性质的范畴论刻画

以上定义中的两个条件相当于要求: 对任意开集 U 和它的任意开覆盖 $\{V_{\alpha}\}_{\alpha}$,

$$\mathfrak{F}(U) \xrightarrow{e} \prod_{\gamma} \mathfrak{F}(V_{\gamma}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(V_{\alpha} \cap V_{\beta})$$

为**等化子** (equalizer) 序列, 其中 e 和另外两个映射由限制给出。实际使用中, 常简称 $(\mathfrak{F}(U), e)$ 或 $\mathfrak{F}(U)$ 为等化子。

Grothendieck 观察到, 定义中的所有术语都能用范畴论的语言来替代, 因而能够在任意范畴上引入层的概念。

注解 1.1.3: 交集的范畴论刻画

上述定义中使用“交集”概念 (但不用到“并集”), 而这恰好是集合范畴中的纤维积 (fibred product) 构造。因此, 只要范畴中总存在纤维积, 交集构造就能被替代。实际上, 在处理覆盖的替代方案中发现, 纤维积并非核心要素, 其存在性条件可以删除。

最后我们要找到“覆盖”的替代表述。

注解 1.1.4: 覆盖的范畴论刻画

设 U 为开集而 $\{V_{\alpha}\}_{\alpha}$ 为其开覆盖。我们需要先对开覆盖做一些技术处理, 将它们转化为函子 (预层)。

开集 V_α 的任意开子集 V ，不必是开覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中一元。然而，所有 V_α ，加上它们的所有开子集，形成一个新的开覆盖 $\{V'_\beta\}_{\beta \in I'}$ 。这两个开覆盖加在预层上的黏合条件等价（参见命题 3.2），但后一类型的覆盖能够等同于特定函子。

1. 首先，开集 U 的所有开子集合在一起构成 U 的一个开覆盖。根据子集与包含映射的一一对应，此覆盖相当于所有以 U 为终点的态射（即包含映射）形成的集合 h_U ：

$$h_U = \{V \xrightarrow{f} U \mid f \in \text{Mor}(P_X)\},$$

进一步能够等同于可表函子（representable functor） $\text{Hom}_{\mathcal{P}_X}(-, U)$ 。

2. 其次，任取开覆盖 $U = \bigcup_\alpha V_\alpha$ 。我们假设所有 V_α 的开子集都是此覆盖中的成员。于是我们得到上述集合 h_U 的一个子集：

$$S_U = \{f \in h_U \mid f = f_\alpha g, \text{ 某个 } \alpha\}.$$

若将集合 h_U 等同于可表函子 $\text{Hom}_{\mathcal{P}_X}(-, U)$ ，则子集 S_U 等同于一个子函子： $S : \mathcal{P}_X^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ ，使得

$$S(V) = \{f : V \rightarrow U \mid f \in S_U\}.$$

1.2 Grothendieck 拓扑与层

如果范畴的对象构成一个集合，则称之为小范畴。由于任意范畴都在恰当选取的某个宇宙（universe）里是小范畴，所以后续各类构造都能在某个宇宙中实现。我们将忽略所有集合论方面的讨论。

定义 1.2.1: 筛

设 $\mathcal{C}$ 为小范畴且 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 。则可表函子 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, x)$ 等同于集合

$$h_x = \{\mathcal{C} \text{ 中所有以 } x \text{ 为终点的态射}\}.$$

可表函子的任意子函子 S （或它对应的 h_x 的子集）叫作 x 上的**筛**。

我们将不区分筛的函子和集合表述，根据实际需要采用相应的形式。我们称 h_x 为 x 上的最大筛，而 $\emptyset_x$ 为最小筛。

从注解 2.4 中可以看出，空间 X 中开集 U 的每个开覆盖有一个自然的方式生成一个 U 的新开覆盖，后者形成一个筛（下称“覆盖筛”）。以下结论指出，在层的定义 2.1 中，我们只需要对覆盖筛验证黏合条件即可（而不必讨论所有的开覆盖）。

命题 1.2.2

令 $\mathfrak{F}$ 为 (X, T) 上的预层。则 $\mathfrak{F}$ 为层，当且仅当，对 $\forall U \in \mathcal{P}_X$ ， $\forall$ 开覆盖 $U = \bigcup_\alpha V_\alpha$ 以及 $\{V_\alpha\}_\alpha$ 产生的覆盖筛 S ，包含 $S \xrightarrow{i_S} h_U$ 诱导产生的集合映射 i_S^*

$$\mathfrak{F}(U) \xrightarrow{\text{Yoneda}} \text{Nat}(h_U, \mathfrak{F}) \xrightarrow{i_S^*} \text{Nat}(S, \mathfrak{F})$$

为 1-1 对应。

证明. 对于开覆盖 $U = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$, 考虑等化子序列

$$E \xrightarrow{d} \prod_{\gamma} \mathfrak{F}(V_{\gamma}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(V_{\alpha} \cap V_{\beta}).$$

由于 d 必为单射, 所以可设等化子 E 为 $\prod_{\gamma} \mathfrak{F}(V_{\gamma})$ 的子集。若 $\{e_{\gamma}\}_{\gamma} \in E$, 则 $e_{\gamma} \in \mathfrak{F}(V_{\gamma})$ 且 $e_{\alpha}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}} = e_{\beta}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}}$ 。根据等化子的泛性质, 存在自然映射 $c: \mathfrak{F}(U) \rightarrow E$ 使得 $e = dc$ 。

现在考虑开覆盖 $\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ 生成的覆盖筛 S 。显然 $S = \{V | V \subset V_{\alpha} \text{ 为开子集}, \forall \alpha\}$, 相应的等化子序列如下

$$E' \xrightarrow{d'} \prod_{V \in S} \mathfrak{F}(V) \rightrightarrows \prod_{V, W \in S} \mathfrak{F}(V \cap W).$$

首先, 我们证明 E 同构于 E' 。为此我们将两个等化子序列摆称两列。中间水平方向的映射, 从左往右是投影, 从右往左利用限制映射 (注意: 不依赖于包含映射 $V \rightarrow V_{\gamma}$ 的选取)。下方水平映射也是类似构造。

$$\begin{array}{ccc} E' & & E \\ d' \downarrow & & \downarrow d \\ \prod_{V \in S} \mathfrak{F}(V) & \xrightleftharpoons{\quad} & \prod_{\gamma} \mathfrak{F}(V_{\gamma}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \prod_{V, W \in S} \mathfrak{F}(V \cap W) & \xrightleftharpoons{\quad} & \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(V_{\alpha} \cap V_{\beta}) \end{array}$$

因此, 我们根据泛性质获得两个映射 $E' \rightarrow E$ 和 $E \rightarrow E'$, 并进一步得知它们必然互逆。

其次, 可证 $E' \cong \text{Nat}(S, \mathfrak{F})$: 若 $\{e_{\gamma}|_V\}_{V \in S} \in E'$, 则定义自然变换 $\theta: S \rightarrow \mathfrak{F}$ 使得

$$\theta_V(V \hookrightarrow V_{\gamma}) = e_{\gamma}|_V$$

(这与 V_{γ} 选取无关!)。易证这提供所需 1-1 映射。

最后, 构造下方交换图, 左列为等化子序列:

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(S, \mathfrak{F}) & \xleftarrow{i_S^*} & \text{Nat}(h_U, \mathfrak{F}) \\ d'' \downarrow & & \downarrow \cong \\ \prod_{V \in S} \mathfrak{F}(V) & \xleftarrow{e} & \mathfrak{F}(U) \\ \Downarrow & & \\ \prod_{V, W \in S} \mathfrak{F}(V \cap W) & & \end{array}$$

其中, 对 $\theta: S \rightarrow \mathfrak{F}$, $d''(\theta) = \{\theta(V \rightarrow U)\}_V$, 而 e 来自自然的限制。基于定义及上述讨论, $\mathfrak{F}$ 为层, 当且仅当对任意 U 和它的任意开覆盖, $(\mathfrak{F}(U), e) \cong (E, d)$ 为等化子, 当且仅当对任意 U 和它的任意覆盖筛 S , i_S^* 为同构。 $\square$

通过使用筛的概念替换开覆盖的概念, Grothendieck 得以引入一套公理, 在一般范畴 $\mathcal{C}$ 上模拟 $\mathcal{P}_X$ 中开覆盖应有的结构, 从而使得我们能够将层的定义推广至一般范畴。

定义 1.2.3: Grothendieck 拓扑

设 $\mathcal{C}$ 为小范畴。其上一个 **Grothendieck 拓扑** $\mathcal{J}$ 给 $\mathcal{C}$ 中每个对象 x 均指定一个筛集 $\mathcal{J}(x)$, 满足

- (1) $h_x \in \mathcal{J}(x), \forall x$;
- (2) (稳定性) 若 $S \in \mathcal{J}(x)$, 则对 $\forall f: y \rightarrow x$, 有 $f^*(S) \in \mathcal{J}(y)$, 其中 $f^*(S) := \{g \in \text{Mor}\mathcal{C} \mid \text{cod}(g) = y \text{ 且 } fg \in S\}$;
- (3) (传递性) 若 $S \in \mathcal{J}(x)$ 且 R 为 x 上的筛, 使得对 S 中所有 $u: y \rightarrow x$ 都有 $u^*(R) \in \mathcal{J}(y)$, 则 $R \in \mathcal{J}(x)$.

属于 $\mathcal{J}(x)$ 的筛叫作 x 上的**覆盖筛**(covering sieve)。

注解 1.2.4: 公理的直观意义

定义中的三条公理, 大致上用范畴论语言陈述拓扑空间中开覆盖的以下性质:

1. 开集是自身的开覆盖;
2. 如果 U 为开集而 V 是开子集, 则 U 的任意开覆盖 $\{V_\alpha\}$ 通过取交集产生 V 的一个开覆盖 $\{V_\alpha \cap V\}$;
3. 如果开集 U 有一个开覆盖 $\{V_\alpha\}$, 而每个 V_α 也有一个开覆盖, 则后者的所有开覆盖组成 U 的一个开覆盖。

从定义出发, 我们能推导一些常用性质。

注解 1.2.5: 覆盖筛的性质

- (1) 若 $R, S \in \mathcal{J}(x)$, 则 $R \cap S \in \mathcal{J}(x)$.
验证: 取 $f \in R$ 有 $f^*(R \cap S) = f^*(S) \in \mathcal{J}(y)$ 。于是 $R \cap S$ 是覆盖筛。
- (2) 若 $S \in \mathcal{J}(x)$ 且 R 为 x 上的筛, 满足 $S \subseteq R$, 则 $R \in \mathcal{J}(x)$.
验证: 取 $\forall f: y \rightarrow x (f \in S)$ 。则 $f^*(S) = h_y$ 。又由 $S \subseteq R$ 可推出 $f^*(S) \subseteq f^*(R)$ 。于是 $f^*(R) = h_y, \forall f \in S$, 即 $R \in \mathcal{J}(x)$ 。
- (3) 由上可知, 对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $\mathcal{J}(x)$ 是余滤过偏序集, 因而 $\varinjlim_{\mathcal{J}(x)}$ 为正合。
关于正合性和极限的讨论, 参见 Kashiwara-Schapira 等文献。

文献中常用 $\mathcal{C}^\wedge$ 记 $\mathcal{C}$ 上预层范畴。由于每个预层都是可表函子的余极限, 所以 $\mathcal{C}^\wedge$ 可以看作是 $\mathcal{C}$ 的完备化, 很多问题都能够提升到预层范畴上讨论。

注解 1.2.6: 从预层范畴的角度理解筛

由 Yoneda 嵌入 $h_-: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\wedge, x \mapsto h_x$, 可知态射集 S 为 x 上的筛当且仅当 S 构成 h_x 的子

函子。若有 $f: y \rightarrow x$ ，则产生自然变换 $f: h_y \rightarrow h_x$ 。于是可构造拉回

$$\begin{array}{ccc} h_y \times_{h_x} S & \longrightarrow & S \\ \downarrow \text{单} & & \downarrow \\ h_y & \xrightarrow{f} & h_x \end{array}$$

而 $h_y \times_{h_x} S$ 就等同于态射集 $f^*(S)$ 。我们经常在筛的两种等价描述中自由切换。

对于有限范畴，SGA4 里面明确刻画了其所有可能的拓扑。这使得我们能够计算一些例子。

例 1.2.7: 有限范畴上的拓扑

取 $\mathcal{C}$ 为

$$1_x \curvearrowright x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} y \curvearrowright 1_y$$

存在两个可表函子 h_x 和 h_y 。作为态射集 $h_x = \{1_x\}$, $h_y = \{1_y, f, g\}$ 。作为函子 $\begin{cases} h_x(x) = \{1_x\} \\ h_x(y) = \emptyset \end{cases}$,

$$\begin{cases} h_y(x) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \{f, g\} \\ h_y(y) = \{1_y\} \end{cases}.$$

可表函子 h_x 除了 h_x 和 $\emptyset_x$ ，没有非平凡的子函子； h_y 除了 h_y 和 $\emptyset_y$ ，还有真子函子 S_f 、 S_g 和 S ，即

$$\begin{cases} S_f(x) = \{f\} \\ S_f(y) = \emptyset \end{cases}, \begin{cases} S_g(x) = \{g\} \\ S_g(y) = \emptyset \end{cases}, \begin{cases} S(x) = \{f, g\} \\ S(y) = \emptyset \end{cases}.$$

根据 SGA4, $\mathcal{C}$ 上恰有 4 个拓扑，分别是最大拓扑 $\mathcal{J}_{\max}$ (含所有筛)、拓扑 $\mathcal{J}_1 = \{h_x, h_y, S\}$ 、拓扑 $\mathcal{J}_2 = \{\emptyset_x, h_x, h_y\}$ 和最小拓扑 $\mathcal{J}_{\min} = \{h_x, h_y\}$ 。

我们再给出一个一般性例子。

例 1.2.8: 稠密拓扑 $\mathcal{J}_{den}$

设 $\mathcal{C}$ 为小范畴且 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 。令 $S \in \mathcal{J}_{den}(x)$ 当且仅当对 $\mathcal{C}$ 中 $\forall f: y \rightarrow x$ 存在 $g: z \rightarrow y$ 使得 $fg: z \rightarrow x$ 在 S 中。

验证. (1) $h_x \in \mathcal{J}(x)$ 。(由定义可得)

(2) 设 $S \in \mathcal{J}_{den}(x)$ 。对 $\forall f: y \rightarrow x$ ，考虑

$$f^*(S) = \{g | \text{cod}g = y \text{ 且 } fg \in S\}.$$

要说明 $f^*(S) \in \mathcal{J}_{den}(y)$ 。取 $\forall u: w \rightarrow y$ 。(需找到 $v: a \rightarrow w$ 使得 $uv: a \rightarrow y \in f^*(S)$ 。)从 $fu: w \rightarrow x$ 在 S 中可知 $fu v \in S$ ，即 $uv \in f^*(S)$ 。

(3) 设 $S \in \mathcal{J}_{den}(x)$ 及 R 为 x 上的筛，使得对 S 中 $\forall u: y \rightarrow x$ ，有 $u^*(R) \in \mathcal{J}_{den}(y)$ 。要证 $R \in \mathcal{J}_{den}(x)$ 。取 $\forall \iota: y \rightarrow x$ ，则 $\iota^*(R) \in \mathcal{J}(y)$ ，即对 $\forall f: z \rightarrow y$ 存在 $g: w \rightarrow z$ 使得 $fg: w \rightarrow y$ 在 $\iota^*(R)$ 中。后者相当于说 $\iota(fg) \in R$ 。根据定义， $R \in \mathcal{J}_{den}(x)$ 。

□

定义 1.2.9: Grothendieck 层

设 $\mathcal{C}$ 为小范畴, $\mathcal{J}$ 为其上 Grothendieck 拓扑。称 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为一个 座(site)。如果 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上预层, 且对任意 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 和任意覆盖筛 $S \in \mathcal{J}(x)$, 包含 $i_S : S \rightarrow h_x$ 诱导产生的集合映射

$$\mathfrak{F}(x) \cong \text{Nat}(h_x, \mathfrak{F}) \xrightarrow{i_S^*} \text{Nat}(S, \mathfrak{F}),$$

为 1-1 对应, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 $\mathbf{C}$ 上的 层。

在几何背景中的范畴 $\mathcal{C}$ 往往存在拉回 (即纤维积, 如 $\mathcal{C} = \mathcal{P}_X$)。此时习惯引入 拓扑基 $\mathcal{K}$ (也叫预拓扑, pretopologie), 并由此出发定义层。实际上, 任意拓扑基都生成一个拓扑, 两者定义的层一样。本课程将避免讨论拓扑基相关内容。

2 第二讲

2.1 拓扑斯

本节介绍 Grothendieck 拓扑斯 (topos) 的概念。粗略而言, 拓扑斯是集合范畴 $\mathbf{Set}$ 的推广, 表示论特别关注其中具有代数结构的对象。正如 $\mathbf{Set}$ 中的群对象 (group object) 就是群, 一个拓扑斯中的阿贝尔群对象就是这个拓扑斯底座上的阿贝尔层。拓扑斯又是一种广义空间, 存在同伦与上同调理论。Johnstone 的著作标题为 *Sketches of an Elephant*, 彰显出此庞然大物之宏伟和精妙程度。

Giraud 找到了 Grothendieck 拓扑斯的公理刻画。适当调整部分公理, 就能得到文献另一种重要的初等拓扑斯 (elementary topos), 后者在逻辑学里起着重要作用, 不在本课程讨论范围内。

为便于讨论, 我们回顾上一节层的定义。

定义 2.1.1: Grothendieck 层

设 $\mathcal{C}$ 为小范畴, $\mathcal{J}$ 为其上 Grothendieck 拓扑。称 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为一个座 (site)。

如果 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上预层, 且对任意 $x \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ 和任意覆盖筛 $S \in \mathcal{J}(x)$, 包含 $i_S : S \rightarrow h_x$ 诱导产生的集合映射

$$\mathfrak{F}(x) \cong \mathrm{Nat}(h_x, \mathfrak{F}) \xrightarrow{i_S^*} \mathrm{Nat}(S, \mathfrak{F}),$$

为 1-1 对应, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 $\mathbf{C}$ 上的层。

除了上述定义之外, 今后我们会看到层可以通过预层上的其它操作产生, 包括层化、局部化等等。

定义 2.1.2

范畴 $\mathcal{C}$ 上的预层和自然变换构成的范畴叫作预层范畴, 记作 $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ 或 $\mathcal{C}^\wedge$ 。若 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座, 则其上的层所确定的 $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ 中满子范畴叫作 $\mathbf{C}$ 上的层范畴, 记作 $\mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ 或 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 或 $\mathcal{C}^\sim$ 。

如果范畴 $\mathcal{E}$ 等价于某个 $\mathbf{Sh}(\mathbf{C})$, 则称之为一个 Grothendieck 拓扑斯 (topos)。

由于 $\mathcal{C}^\wedge$ 是 $\mathcal{C}$ 的完备化, 在研究过程中我们不可避免地要考虑 $\mathcal{C}^\wedge$ 上的拓扑和层。因此, 上一节关于集合论方面的说明是为类似情况做铺垫。

例 2.1.3: 两种极端情况下的层范畴

在任意小范畴 $\mathcal{C}$ 上总有 $\mathcal{J}_{\min}$ 和 $\mathcal{J}_{\max}$ 。最小拓扑 $\mathcal{J}_{\min}$ 所给出的层范畴 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\min}) = \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ (预层拓扑斯)。最大拓扑所给出的层范畴 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\max})$ 是平凡范畴 $\{\mathfrak{F}_\bullet\}$, 其中 $\mathfrak{F}_\bullet(x) = \bullet$ (单点集)。

若 $\mathcal{C}$ 为平凡范畴 $\bullet$ (一个对象一个态射), 其上只有两个拓扑。拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\bullet, \mathcal{J}_{\min})$ 恰为集合范畴 $\mathbf{Set}$ 。

基于层的定义, 通过计算自然变换, 大家可以尝试计算第一讲中几个例子中的层范畴。沿用第一讲的模式, 我们混用函子和态射集的方式去表述和使用筛。

例 2.1.4

如果 $\mathcal{C} = G$ 为群，那么其上只有两个拓扑 $\mathcal{J}_{\min} = \{G\}$ 和 $\mathcal{J}_{\max} = \{G, \emptyset\}$ ，而且 $\mathcal{J}_{\text{den}} = \mathcal{J}_{\min}$ 。相应的层范畴（即拓扑斯）分别等价于 $G\text{-Set}$ （ G -集合范畴，其中群作用在右边）和 $\bullet$ 。

由于我们今后只讨论 Grothendieck 拓扑斯，所以后续将直接采用拓扑斯这一简洁名称。

注解 2.1.5: 拓扑斯的内蕴刻画

给定一个范畴 $\mathcal{E}$ ，Giraud 定理告诉我们如何从它的内在结构去判断它是否是一个拓扑斯。如果 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯，它还提供一个算法去构造一个座 $\mathbf{C}$ ，给出一个具体表现形式 $\mathcal{E} \simeq \text{Sh}(\mathbf{C})$ 。请注意， $\mathbf{C}$ 的选择不唯一，而且 $\mathbf{C}$ 可能很大。

因为陈述该定理需要大量概念上的铺垫，所以我们不把它包含进来。

2.2 拓扑的更多例子

为了描述和刻画层范畴，我们需要对各种拓扑开展进一步探讨。在拓扑空间上，拓扑有粗细之分；范畴上的拓扑也是如此。范畴上的所有拓扑可以通过显然的包含关系，形成一个偏序集。给定范畴 $\mathcal{C}$ ，以及其上两个拓扑 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 。如果 $\forall x, \mathcal{J}_1(x) \subset \mathcal{J}_2(x)$ ，那么我们称 $\mathcal{J}_1$ 比 $\mathcal{J}_2$ 粗，记作 $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ 。等价地，我们也说 $\mathcal{J}_2$ 比 $\mathcal{J}_1$ 细。

定义 2.2.1: 典范拓扑

若在范畴 $\mathcal{C}$ 上赋予拓扑 $\mathcal{J}$ ，使得座 $\mathcal{C}$ 上所有可表函子均为层，则称 $\mathcal{J}$ 为**次典范**(subcanonical)。最大的次典范拓扑叫作**典范拓扑**(canonical)。

拓扑决定了层，反之我们可以利用预层来构造适配的拓扑，即选取拓扑使得我们关注的预层成为层。

命题 2.2.2: 典范拓扑存在性

设 $\mathcal{C}$ 为范畴且 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in I}$ 为 $\mathcal{C}$ 上一族预层。对 $\forall x$ ，令 $\mathcal{J}(x)$ 为满足以下条件的筛 S 构成：对 $\forall f: y \rightarrow x$ 以下自然映射

$$\text{Nat}(h_y, \mathfrak{F}_i) \rightarrow \text{Nat}(f^*(S), \mathfrak{F}_i)$$

为同构。则 $\mathcal{J}$ 在 $\mathcal{C}$ 上定义了一个 Grothendieck 拓扑。这是使得 $\mathfrak{F}_i, i \in I$ ，均为层的最大拓扑。特别地，典范拓扑总存在。

证明。我们对照上一节的定义说明这些筛构成一个拓扑，逐一验证拓扑的三条公理。首先，由于对 $\forall f: y \rightarrow x$ ， $f^*(h_x) = h_y$ ，所以 h_x 满足定义要求，从而 $h_x \in \mathcal{J}(x)$ 。

其次，设 $S \in \mathcal{J}(x)$ 且 $\iota: z \rightarrow x$ 为态射。我们要证 $\iota^*(S) \in \mathcal{J}(z)$ 。由于对 $\forall f: y \rightarrow z$ 有交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(h_y, \mathfrak{F}_i) & \xrightarrow{\cong} & \text{Nat}(f^*(\iota^*(S)), \mathfrak{F}_i) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \text{Nat}((\iota f)^*(S), \mathfrak{F}_i) & \xrightarrow{\cong} & \text{Nat}(f^*(S), \mathfrak{F}_i) \end{array}$$

所以 $\iota^*(S)$ 满足定义要求, 从而 $\iota^*(S) \in \mathcal{J}(z)$ 。

最后, 设 $S \in \mathcal{J}(x)$ 且 R 是 x 上的筛, 满足: 对 S 中任意 $\iota: y \rightarrow x$ 有 $\iota^*(S) \in \mathcal{J}(y)$ 。我们要证 $R \in \mathcal{J}(x)$, 即证明对 $\forall f: w \rightarrow x$, 以下映射

$$\text{Nat}(h_w, \mathfrak{F}_i) \rightarrow \text{Nat}(f^*(R), \mathfrak{F}_i)$$

总是同构。

为此, 我们构造一个逆映射。设 $\varphi_i: f^*(R) \rightarrow \mathfrak{F}_i$ 为 $\text{Nat}(f^*(R), \mathfrak{F}_i)$ 中元素。我们构造 $\psi_i: h_w \rightarrow \mathfrak{F}_i$ (根据 Yoneda 引理, ψ_i 相当于 $\mathfrak{F}_i(w)$ 中元素)。对于 $\forall g \in f^*(S)$, 在 S 中考虑

$$fg: z \xrightarrow{g} w \xrightarrow{f} x$$

由假设条件, 可知 $(fg)^*(R) \in \mathcal{J}(z)$ 。从交换图

$$\begin{array}{ccc} (fh)^*(R) & \hookrightarrow & h_z \\ g \circ - \downarrow & & \downarrow g \circ - \\ f^*(R) & \hookrightarrow & h_w \end{array}$$

产生新交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(h_z, \mathfrak{F}_i) & \xrightarrow{\cong} & \text{Nat}((fh)^*(R), \mathfrak{F}_i) \\ \uparrow \text{“由 } g \text{ 诱导”} & & \uparrow \text{“由 } g \text{ 诱导”} \\ \text{Nat}(h_w, \mathfrak{F}_i) & \longrightarrow & \text{Nat}(f^*(R), \mathfrak{F}_i) \end{array}$$

以上构造给出

$$(z \xrightarrow{g} w) \mapsto \overline{\psi_i^g} \in \mathfrak{F}_i(z)$$

组装成一个自然变换 $f^*(S) \rightarrow \mathfrak{F}_i$ 。由于 $f^*(S) \in \mathcal{J}(w)$, 所以从

$$\text{Nat}(f^*(S), \mathfrak{F}_i) \cong \text{Nat}(h_w, \mathfrak{F}_i)$$

产生一个 $\text{Nat}(h_w, \mathfrak{F}_i)$ 中元素 ψ_i 。可以验证以上映射

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(f^*(R), \mathfrak{F}_i) & \longrightarrow & \text{Nat}(h_w, \mathfrak{F}_i) \\ \varphi_i \mapsto & & \psi_i \end{array}$$

是自然映射的逆。于是 $R \in \mathcal{J}(x)$ 。

从定义可知, 这是使得所有 $\mathfrak{F}_i$ 为层的最大拓扑。□

我们再给出一个常用的拓扑构造方式。

命题 2.2.3: 子范畴拓扑

设 $\mathcal{C}$ 为范畴且 $\mathcal{D}$ 为满子范畴。对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 和 x 上的筛 S , 令 $S \in \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(x)$ 当且仅当对 $\forall y \in \text{Ob}\mathcal{D}$, 自然映射

$$\bigsqcup_{f \in S} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \text{dom} f) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$$

为满射。则 $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ 构成 $\mathcal{C}$ 上一个拓扑, 称为一个子范畴拓扑。

证明. 为说明 $\mathcal{J}_D$ 是 $\mathcal{C}$ 上拓扑, 我们验证三条公理: 首先, 显然有 $h_x \in \mathcal{J}_D(x)$ 。

其次, 设 $S \in \mathcal{J}_D(x)$ 且取态射 $g: w \rightarrow x$ 。则 $g^*(S) = \{z \xrightarrow{l} w \mid gl \in S\}$ 。考察自然映射

$$\bigsqcup_{l \in g^*(S)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \text{dom} l) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w),$$

$\forall y \in \text{Ob} \mathcal{D}$ 。对于任意 $t: y \rightarrow w$, 则 $gt: y \rightarrow x$ 。从 $S \in \mathcal{J}_D(x)$ 可知, 存在 S 中 $t': w' \rightarrow x$ 以及 $t'': y \rightarrow w'$ 使得 $gt = t't'' \in S$, 即 $t \in g^*(S)$ 是 1_y 在上述自然映射下的像。

最后, 设 $S \in \mathcal{J}_D(x)$ 且 R 为 x 上的筛, 满足: 对 $\forall f \in S$, $f^*(R) \in \mathcal{J}_D(\text{dom} f)$ 。我们验证 $R \in \mathcal{J}_D(x)$ 。考察自然映射

$$\bigsqcup_{l \in R} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \text{dom} l) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x),$$

$\forall y \in \text{Ob} \mathcal{D}$ 。取 $t: y \rightarrow x$ 。由 $S \in \mathcal{J}_D(x)$ 可知存在 $y \xrightarrow{a} w$ 及 $w \xrightarrow{b} x$, 使得 $b \in S$ 且 $t = ba$ 。又由 $f^*(R) \in \mathcal{J}_D(\text{dom} f)$ 对 $\forall f \in S$ 成立可知, 存在满射

$$\bigsqcup_{g \in f^*(R)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \text{dom} g) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \text{cod} g)。$$

特别地, 由 $b^*(R) \in \mathcal{J}_D(w)$ 可得满射

$$\bigsqcup_{g \in b^*(R)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \text{dom} g) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w)。$$

因此对于 $a: y \rightarrow w = \text{dom} b$, 存在 $g \in b^*(R)$ 和 $y \xrightarrow{d} \text{dom} g$ 使得 $a = gd$ 。从 $t = ba = (bg)d$ 可知 t 在 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \text{dom}(bg)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$ 的像中。得证。□

从定义可以看出, 若 $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ 是 $\mathcal{C}$ 的两个满子范畴, 则 $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_1} \supset \mathcal{J}_{\mathcal{D}_2}$ 。

2.3 计算实例

在一个范畴上可以赋予多种拓扑, 产生预层范畴内的各个层范畴 (所有的左反射满子范畴, left reflexive)。给定范畴 $\mathcal{C}$, 以及其上两个拓扑 $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ 。从定义可知, 如果预层 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathcal{J}_2$ -层, 那么它必为 $\mathcal{J}_1$ -层。因此, $\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_1) \supset \text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_2)$ 。实际上, 若 $\mathcal{J}_1 \subsetneq \mathcal{J}_2$, 则 $\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_1) \supsetneq \text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_2)$ (我们将在随后讲义中用局部化手段证明)。

例 2.3.1: 描述偏序集上的拓扑及层范畴

考虑偏序集

$$\mathcal{P}: x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z。$$

为简单起见, 我们在左图中忽略了单位态射。我们描述其上的子范畴拓扑、相应的层范畴以及它们之间的关系。

首先我们简要回顾基本概念:

1. $\mathcal{P}$ 上预层范畴 $\text{PSh}(\mathcal{P})$, 其对象是反变函子 $\mathfrak{F}: \mathcal{P}^{op} \rightarrow \text{Set}$, 形如

$$\mathfrak{F}(x) \xleftarrow{\mathfrak{F}(f)} \mathfrak{F}(y) \xleftarrow{\mathfrak{F}(g)} \mathfrak{F}(z),$$

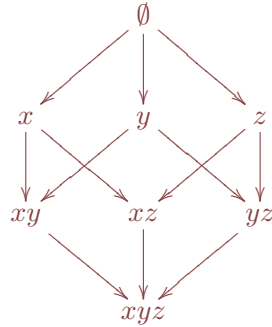
其中 $\mathfrak{F}(x)$ 等为集合, 而 $\mathfrak{F}(f)$ 等为映射。

2. 在 $\mathcal{P}$ 上给定拓扑 $\mathcal{J}$, 能从 $\text{PSh}(\mathcal{P})$ 中“挑选”出一些对象 (叫作 $\mathcal{J}$ -层), 构成一个满子范畴 $\text{Sh}(\mathcal{P}, \mathcal{J})$ 。也记 $\mathbf{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{J})$, 层范畴相应记为 $\text{Sh}(\mathbf{P})$ 。

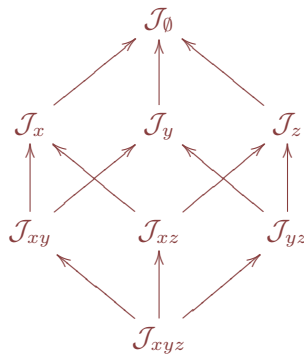
在 SGA4 中 Grothendieck-Verdier 指出, 对于有限范畴 $\mathcal{C}$ (finite category, 所有态射构成有限集), 其上的拓扑与完全满、幂等完备子范畴一一对应, 且这些子范畴通过子范畴拓扑产生所有拓扑。(我们将在下一节讨论。)

一、子范畴拓扑

以上偏序集 $\mathcal{P}$ 恰好存在八个子偏序集 (即子范畴, 含空集), 因而有八个子范畴拓扑。因为子偏序集由 $\mathcal{P}$ 的子集决定, 所以为简便起见, 我们用 xy 来表示子偏序集 $x \rightarrow y$ 。由此, 我们获得子偏序集的偏序集 (箭头表示包含关系)



从定义分析可知, 上述偏序集反同构于 $\mathcal{P}$ 上的所有子范畴拓扑形成的偏序集



其中, $\mathcal{J}_\emptyset = \mathcal{J}_{\max}$, $\mathcal{J}_{xyz} = \mathcal{J}_{\mathcal{P}} = \mathcal{J}_{\min}$, 以及 $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_{\text{den}}$ 。

二、刻画子范畴拓扑

我们具体刻画这些子范畴拓扑。为此我们利用以下基本性质 (见第一讲): 在有限范畴 $\mathcal{C}$ 上, 对于任意给定的拓扑 $\mathcal{J}$, 从拓扑的性质可知

1. 每个对象上总存在最小覆盖筛 $S_x^{\min} \in \mathcal{J}(x), \forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ (x 上所有覆盖筛的交);
2. 所有比最小覆盖筛大的筛都一定是覆盖筛。

于是对于有限范畴上的每个拓扑, 我们将只需给出各个对象上的最小覆盖筛。

在我们情况下可以验证, 对于每个对象 $w \in \text{Ob}\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}$ 的某个子偏序集 $\mathcal{Q}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}(w)$ 的最小覆盖筛

$$S_w^{\min} = \{\mathcal{Q} \text{ 中的对象到 } w \text{ 的所有态射}\}.$$

举例来说: 若 $\mathcal{Q} = xy$, 则有

1. $S_x^{\min} = \{1_x\}$, 即 h_x ;
2. $S_y^{\min} = \{1_y, f\}$, 即 h_y ;
3. $S_z^{\min} = \{g, gf\}$, 对应 h_z 的一个真子函子 S_z 。

作为函子, 我们有 $S_z(x) = \{gf\}$, $S_z(y) = \{g\}$, $S_z(z) = \emptyset$ 。

其它子范畴拓扑的计算方法类似。

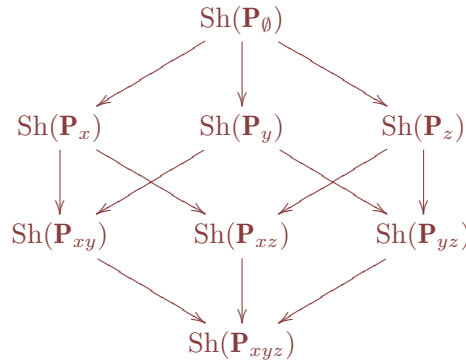
三、刻画层范畴

基于子范畴拓扑的描述, 我们能够计算相应的层范畴。以 $\mathbf{P}_{xy} = (\mathcal{P}, \mathcal{J}_{xy})$ 为例, 为计算 $\text{Sh}(\mathbf{P}_{xy})$, 我们需要判断什么样的预层 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathcal{J}_{xy}$ -层。这归结为分析定义中的自然映射

$$\text{Nat}(h_w, \mathfrak{F}) \rightarrow \text{Nat}(S, \mathfrak{F}),$$

$\forall S \in \mathcal{J}_{xy}(w), \forall w \in \text{Ob } \mathcal{P}$ 。通过计算相关的自然变换, 我们可以确定 $\mathfrak{F}$ 是否为 $\mathcal{J}_{xy}$ -层。实际上通过计算, 我们可以找到规律, 给出预层 $\mathfrak{F}$ 是否为 $\mathcal{J}_{xy}$ -层的判别法。

其它子范畴拓扑下的层范畴的讨论过程类似。最终我们获得八个对应的层范畴, 及其作为 $\text{PSh}(\mathcal{P})$ 的满子范畴的偏序关系:



我们将看到,

1. $\text{Sh}(\mathbf{P}_{xyz}) = \text{PSh}(\mathcal{P})$ 且 $\text{Sh}(\mathbf{P}_0) = \{\mathfrak{F}_\bullet\}$ 只包含预层范畴中的终对象。
2. 更一般地利用比较引理, 我们有

$$\text{Sh}(\mathbf{P}_Q) \simeq \text{PSh}(\mathbf{Q}).$$

因此上述层范畴有些不相等却相互等价。

3. 上述偏序集中给出 $\mathcal{P}$ 上所有的层范畴。

3 第三讲

将预层转化为层的过程,在经典层论中相对直观,涉及到把覆盖不断加细并取极限。在 Grothendieck 层论中,层化借鉴了这个思路,但是极限表述形式就抽象得多。需要强调的是:极限是范畴论的核心概念,以至于 Mac Lane 指出 “All concepts are Kan extensions”, Kan 扩张就是极限组装成的函子。我们将看到层论中常见的函子来自 Kan 扩张。此外,范畴局部化也基于极限,但在很多现代文献中采用 roof 的形式来表现 (参见 Gabriel-Zisman 的专著《Calculus of Fractions and Homotopy Theory》第一章)。

极限的应用在本讲中可管中窥豹,略见一斑,且可能成为阅读障碍。因为整体介绍相关理论将偏离课程目标,所以请读者查看 SGA4、Stacks Project 和 Kashiwara-Schapira 的范畴论专著相关章节。毋庸置疑,极限理论不容易让初学者掌握,本文中涉及到的相关表述和计算,希望对读者理解极限有些许帮助。

今后一个常用的事实是:根据覆盖筛的性质, $\mathcal{J}(x)$ 是滤过偏序集 (filtered), 从而

$$\varinjlim_{\mathcal{J}(x)}$$

与有限极限交换 (有限范畴上的极限)。当 $\mathcal{J}(x)$ 有限时这个事实容易直接推导:从 $\mathcal{J}(x)$ 存在最小覆盖筛 $S_x^{\min}$, 可知对任意预层 $\mathfrak{F} : \mathcal{J}(x)^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ 总有

$$\varinjlim_{\mathcal{J}(x)} \mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}(S_x^{\min}).$$

3.1 若干概念

给定范畴 $\mathcal{C}$ 上的预层 $\mathfrak{F}$, 如果 $\mathcal{C}$ 上被赋予了拓扑 $\mathcal{J}$, 我们有一个典范算法用于构造一个层 $\mathfrak{F}^a$ 。实际上, 该算法产生一个正合函子 $(-)^a : \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 。注意此处的函子正合性是最一般的形式, 通常利用与有限极限的交换性来定义 (没有短正合列这样的代数结构)。

定义 3.1.1: 座的 (拓扑) 生成集

设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座且 G 为 $\mathbf{Ob}\mathcal{C}$ 的一个子集。若 $\mathcal{C}$ 中每个对象 $x \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$ 上都存在一个 $S \in \mathcal{J}(x)$, 使得 $S = \langle f_i \mid \text{cod} f_i = x \rangle_{i \in I}$ 且 $\text{dom} f_i$ 属于 G , 则称 G 为 $\mathbf{C}$ 的一个 (拓扑) 生成集。

在上述定义中, 条件意味着每个对象 x 上都存在一个覆盖筛 $S \in \mathcal{J}(x)$, 后者由一组起点在 G 中的态射生成。

例 3.1.2: 范畴的生成集

如果在 $\mathcal{C}$ 上赋予最小拓扑 $\mathcal{J}_{\min}$, 则在每个对象 $x \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$ 上只有一个覆盖筛 $h_x \in \mathcal{J}_{\min}(x)$ 。若 G 是 $(\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\min})$ 的一个 (拓扑) 生成集, 则对任意 $x \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$, 存在态射集 $\{f_i : x_i \rightarrow x \mid x_i \in G\}_{i \in I}$ 生成所有终点为 x 的态射集。这说明存在某个 $i_0 \in I$ 以及 $l_{i_0} : x \rightarrow x_{i_0}$ 使得 $f_{i_0} l_{i_0} = 1_x$ 。如果 $u, v : x \rightarrow y$ 为两个态射, 且 $u f_i = v f_i, \forall i$, 那么利用 l_{i_0} 的存在性可以推出 $u = v$ 。这恰好是范畴论教材中更常见的概念: G 是范畴 $\mathcal{C}$ 的生成集 (set of generating objects or separating

objects)。

例 3.1.3

设 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的满子范畴, 且 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\mathcal{D}})$ 。则 $\text{Ob}\mathcal{D}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个生成集。

由于我们经常需要使用上范畴和下范畴等概念—它们是逗号范畴 (comma category) 的特例, 所以我们回顾必要的定义。

定义 3.1.4: 上范畴和下范畴

设 $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子且 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 。我们定义 x **上范畴** (category over x , 常常简称上范畴, overcategory) ϕ/x 如下:

1. 对象形如 (d, u) , 其中 $d \in \text{Ob}\mathcal{D}$ 且 $u : \phi(d) \rightarrow x$ 为 $\mathcal{C}$ 中态射,
2. 态射 $\gamma : (d_1, u_1) \rightarrow (d_2, u_2)$ 由 $\mathcal{D}$ 中态射 $\gamma : d_1 \rightarrow d_2$ 给出, 满足 $u_1 = u_2\phi(\gamma)$ 。

当 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴而 ϕ 为包含函子, 上范畴也常常记作 $\mathcal{D}/x = \phi/x$ 。

下范畴 (undercategory) $x \backslash \phi$ (或 x **下范畴**, category under x) 可以对偶定义如下:

1. 对象形如 (u, d) , 其中 $d \in \text{Ob}\mathcal{D}$ 且 $u : x \rightarrow \phi(d)$ 为 $\mathcal{C}$ 中态射,
2. 态射 $\gamma : (u_1, d_1) \rightarrow (u_2, d_2)$ 由 $\mathcal{D}$ 中态射 $\gamma : d_1 \rightarrow d_2$ 给出, 满足 $u_2 = \phi(\gamma)u_1$ 。

任何抽象的概念都有具体数学构造来支撑。

例 3.1.5: 切片范畴 (slice category)

考虑恒等函子 $\text{id} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 。上范畴 $\mathcal{C}/x$ 也叫切片范畴, 这在经典层论中非常直观。

设 $\mathcal{P}$ 为拓扑空间 X 上开集偏序集。则其中的对象是开集, 例如 U 。当我们考虑 $\mathcal{P}/U$ 时, 容易看出它同构于子偏序集 $\mathcal{P}_{\leq U}$ 。后者可以等同于 U , 相当于 X 的一个切片。

范畴 $\mathcal{C}$ 可以通过 Yoneda 嵌入, 等同于 $\mathcal{C}^{\wedge} = \text{PSh}(\mathcal{C})$ 的一个满子范畴, 其对象为所有可表函子。范畴论中一个经典的结论指出 “ $\mathcal{C}$ 生成 $\mathcal{C}^{\wedge}$ ” (证明见标准教材, 如 Mac Lane)。

命题 3.1.6

设 $\mathfrak{F} \in \text{PSh}(\mathcal{C})$ 。考虑 Yoneda 嵌入 $h_- : \mathcal{C} \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$ 并令 $\mathcal{C}/\mathfrak{F} := h_-/\mathfrak{F}$ 为 $\mathfrak{F}$ 上范畴, 则存在同构

$$\varinjlim_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}} \text{pr}_1 \cong \mathfrak{F}.$$

于是, 对 $\forall \mathfrak{G} \in \text{PSh}(\mathcal{C})$,

$$\text{Nat}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \cong \varprojlim_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}} \mathfrak{G}(\text{pr}_1(-)).$$

其中 $\text{pr}_1 : \mathcal{C}/\mathfrak{F} \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C}), (x, \alpha) \mapsto h_x$ 。

第二个同构能用于推导生成性质, 参见 3.1.2。

为陈述层化的定义, 我们再给出两个技术性概念和一个技术性结论。在首次阅读时, 结论的证明可以跳过。

定义 3.1.7

设 $\{f_i: y_i \rightarrow x\}_{i \in I}$ 为 $\mathcal{C}$ 中态射族。如果对 $\forall z \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 自然映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \rightarrow \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y_i, z)$$

为单射, 则称 $\{f_i\}$ 为一个**满态射族**。若 I 中只有一个态射, 则称此态射为**满态射**。

设 $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为 (正变) 函子。考虑 $\mathfrak{F}: \mathcal{D}^{op} \rightarrow \text{Set}$ 和 $\mathfrak{F}\phi: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ 。我们常常需要在比较两个函子的极限, ϕ 的性质对此影响很大。

定义 3.1.8

设 $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子。如果对于 $\forall d \in \text{Ob}\mathcal{D}$, $d \backslash \phi$ 为非空且连通, 则称 ϕ 为**终函子** (final functor)。

需要注意的是, 终函子在一些 (早期) 文献中也叫**共尾函子**, 即 cofinal functor。不过叫法不重要, 定义才是真正的关键。如果 $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是终函子, 则对任意 $\mathfrak{F}: \mathcal{D}^{op} \rightarrow \text{Set}$,

$$\lim_{\rightarrow \mathcal{C}} \mathfrak{F}\phi \rightarrow \lim_{\rightarrow \mathcal{D}} \mathfrak{F}$$

为同构。

设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座。则对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $\mathcal{J}(x)$ 是一个偏序集 (基于覆盖筛的包含关系), 从而是一个范畴。为了保证半层化定义中的极限是真正的集合, 我们需要以下铺垫。

命题 3.1.9

设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座, 且 G 为一个生成集。对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 令 $\mathcal{J}_G(x)$ 为 x 上由 $\{y_i \rightarrow x \mid y_i \in G\}$ 生成的覆盖筛组成。则

1. $\mathcal{J}_G(x)$ 是一个集合;
2. 包含函子 $\mathcal{J}_G(x) \hookrightarrow \mathcal{J}(x)$ 是终函子;
3. 对 $\forall R \in \mathcal{J}_G(x)$, 存在满态射族 $\{u_i: h_{y_i} \rightarrow R \mid y_i \in G\}$ 。

证明. 我们逐一论证。

1. 取

$$A(x) = A(h_x) = \bigsqcup_{y \in G} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$$

则 $|\mathcal{J}_G(x)| \leq 2^{|A(x)|}$ 。

2. 设 $S \in \mathcal{J}(x)$ 。我们能找到某个 $R \in \mathcal{J}_G(x)$ 使得 $R \subset S$ 。令

$$A(S) = \bigsqcup_{y \in G} S(y) = \bigsqcup_{y \in G} \text{Nat}(h_y, S)$$

且 $R = \langle A(S) \rangle$ 。下证 $R \in \mathcal{J}_G(x)$ 。取

$$\forall z \xrightarrow{u} x \in S$$

验证 $u^*(R)$ 为覆盖筛。由于 $u^*(R)$ 中包含 $\{y \rightarrow z \mid y \in G\}$, 所以 $u^*(R)$ 是覆盖筛。结合定义, 以上性质可推导出包含函子是终函子。

3. 令 $R \in \mathcal{J}_G(x)$ 。则

$$\bigsqcup_{u \in A(R)} h_{\text{dom} u}$$

存在到 R 的自然变换，是 $\mathcal{C}^\wedge$ 中的满态射。

□

注解 3.1.10

如果我们只是在小范畴 $\mathcal{C}$ 上研究，那么上述结论没有必要。然而我们曾经指出，我们常常需要在 $\mathcal{C}^\wedge = \text{PSh}(\mathcal{C})$ 上引入拓扑考虑其上的层。此时就要利用上述结论。

3.2 半层化

从预层出发，我们将分两步构造层。第一步是半层化，它与 Čech 上同调密切相关。

定义 3.2.1: 半层化

设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座且 G 为一个生成集。则对 $\forall x \in \text{Ob} \mathcal{C}$ 及预层 $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\wedge$,

$$\varinjlim_{\mathcal{J}(x)} \text{Nat}(-, \mathfrak{F}) \cong \varinjlim_{\mathcal{J}_G(x)} \text{Nat}(-, \mathfrak{F})$$

为集合。由此可定义预层 $\mathfrak{F}^\dagger \in \mathcal{C}^\wedge$ ，使得

$$\mathfrak{F}^\dagger(x) := \varinjlim_{\mathcal{J}(x)} \text{Nat}(-, \mathfrak{F}), \forall x \in \text{Ob} \mathcal{C}.$$

对 $\forall u: y \rightarrow x$ ，通过拉回可产生函子 $u^*: \mathcal{J}(x) \rightarrow \mathcal{J}(y)$ ，以及 $\mathfrak{F}^\dagger(u): \mathfrak{F}^\dagger(x) \rightarrow \mathfrak{F}^\dagger(y)$ 。因此我们有 $\mathfrak{F}^\dagger \in \text{PSh}(\mathcal{C})$ ，称为 $\mathfrak{F}$ 的半层化(half-sheafification)。

由定义可见，若 $\mathfrak{F}$ 为层，则 $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}^\dagger$ 。

从极限的泛性质，我们可以从一个自然变换 $\mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2$ 获得一个自然变换 $\mathfrak{F}_1^\dagger \rightarrow \mathfrak{F}_2^\dagger$ 。直接验证说明这产生一个函子

$$(-)^\dagger: \text{PSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C}).$$

设 $S \in \mathcal{J}(x)$ 。由极限定义，对任意覆盖筛 $\mathcal{S} \in \mathcal{J}(x)$ 存在映射

$$z_S: \text{Nat}(S, \mathfrak{F}) \rightarrow \mathfrak{F}^\dagger(x) = \text{Nat}(h_x, \mathfrak{F}^\dagger).$$

它与自然映射

$$\tilde{i}_S: \text{Nat}(h_x, \mathfrak{F}) \rightarrow \text{Nat}(S, \mathfrak{F})$$

合成，产生

$$\eta_x^\mathfrak{F} = z_S \tilde{i}_S: \mathfrak{F}(x) \rightarrow \mathfrak{F}^\dagger(x)$$

这提供一个自然变换

$$\eta^\mathfrak{F}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}^\dagger.$$

如果将 $\mathfrak{F}$ 中元素等同于 $\beta: h_x \rightarrow \mathfrak{F}$ ，则 $\eta_x^\mathfrak{F}$ 还等于 $\eta^\mathfrak{F} \beta = z_S(\beta i_S)$ 。综上所述，我们有半层化函子以及自然变换

$$\eta: \text{Id}_{\mathcal{C}^\wedge} \rightarrow (-)^\dagger.$$

为推导半层化的基本性质，我们先给出一个技术引理。对 $\forall u: y \rightarrow x$ （等同于 $\beta_u: h_y \rightarrow h_x$ ）上述构造产生交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(S, \mathfrak{F}) & \xrightarrow{z_S} & \text{Nat}(h_x, \mathfrak{F}^\dagger) \\ \downarrow & & \downarrow \mathfrak{F}^\dagger(u) \\ \text{Nat}(u^*(S), \mathfrak{F}) & \xrightarrow{z_{u^*(S)}} & \text{Nat}(h_y, \mathfrak{F}^\dagger), \end{array}$$

其中左侧垂直映射来自拉回中的自然变换 $\tilde{u}$,

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i_S} & h_x \\ \tilde{u} \uparrow & & \uparrow \beta_u \\ u^*(S) & \xrightarrow{z_{u^*(S)}} & h_y. \end{array}$$

我们有

$$\mathfrak{F}^\dagger(u)z_S(\alpha) = z_{u^*(S)}(\alpha\tilde{u})$$

又因为 $\mathfrak{F}^\dagger(u)(\beta) = \beta\beta_u, \forall \beta: h_x \rightarrow \mathfrak{F}^\dagger$ ，等式可改写为

$$(\star) \quad z_S(\alpha)\beta_u = z_{u^*(S)}(\alpha\tilde{u}),$$

而 $(\alpha\tilde{u})_w = \alpha_w u, \forall w \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 。

引理 3.2.2

1. 对 $\forall S \in \mathcal{J}(x)$ 及 $\alpha: S \rightarrow \mathfrak{F}$ ，下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\eta^\mathfrak{F}} & \mathfrak{F}^\dagger \\ \alpha \uparrow & & \uparrow z_S(\alpha) \\ S & \xrightarrow{i_S} & h_x \end{array} \quad ;$$

2. 对 $\forall \beta: h_x \rightarrow \mathfrak{F}^\dagger$ ，存在 $S \in \mathcal{J}(x)$ 及 $\alpha: S \rightarrow \mathfrak{F}$ 使得 $z_S(\alpha) = \beta$;

3. 对 $y \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 和 $\mu, \gamma: h_y \rightarrow \mathfrak{F}$ ，如果 $\eta^\mathfrak{F}\mu = \eta^\mathfrak{F}\gamma$ ，则有 $\ker(\mu, \gamma) \in \mathcal{J}(y)$ 。

4. 设 $S, R \in \mathcal{J}(x)$ 且 $\alpha: S \rightarrow \mathfrak{F}$ 和 $\beta: R \rightarrow \mathfrak{F}$ 为态射。则 $z_S(\alpha) = z_R(\beta)$ 当且仅当存在 $T \in \mathcal{J}(x)$ 且 $T \subset S \cap R$ 使得 $\alpha|_T = \beta|_T: T \rightarrow \mathfrak{F}$ 。

证明. 我们逐个验证。

1. 要证 $\eta^\mathfrak{F}\alpha = z_S(\alpha)i_S$ ，只需对 $\forall y \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ，及 $\forall \beta: h_y \rightarrow S$ （相当于 S 中一个态射 $u_\beta: y \rightarrow x$ 或 $u_\beta: h_y \rightarrow h_x$ ），验证以下两个合成一致

$$h_y \xrightarrow{\beta} S \xrightarrow[\begin{smallmatrix} z_S(\alpha) i_S \end{smallmatrix}]{\eta^\mathfrak{F} \alpha} \mathfrak{F}^\dagger.$$

考虑下图，其中底部长方形是拉回（因而底部形成交换图）

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{F} & \xrightarrow{\eta^{\mathfrak{F}}} & \mathfrak{F}^{\dagger} \\
 \alpha \uparrow & & \uparrow z_S(\alpha) \\
 S & \xrightarrow{i_S} & h_x \\
 \beta' \uparrow & \searrow \beta & \uparrow \gamma := i_S \beta \\
 \beta^*(S) = S \times_{h_x} h_y & \xrightarrow{i'} & h_y
 \end{array}$$

由于 $\gamma \in S$ ，所以 $\gamma^*(S) = h_y$ 且 i' 为恒等。于是从

$$\eta^{\mathfrak{F}} \alpha \beta = z_{\gamma^*(S)}(\alpha \beta)$$

且由 $(*)$ 可得

$$z_{\gamma^*(S)}(\alpha \beta) = z_S(\alpha) i_S \beta.$$

2. 由极限性质立即可得。
3. 由 (2) 存在 S_μ 以及 $\alpha_\mu : S \rightarrow \mathfrak{F}$ 使得 $Z_{S_\mu}(\alpha_\mu) = \eta^{\mathfrak{F}} \mu$ 。同理，存在 S_γ 以及 $\alpha_\gamma : S \rightarrow \mathfrak{F}$ 使得 $Z_{S_\gamma}(\alpha_\gamma) = \eta^{\mathfrak{F}} \gamma$ 。易见 $S_\mu \cap S_\gamma \subset \ker(\mu, \gamma)$ ，因而后者属于 $\mathcal{J}(y)$ 。
4. 由极限定义立即可得。

□

下面我们列举半层化的几个关键性质。

定义 3.2.3: 分离预层 (separated presheaf)

设 $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座且 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上预层。若对 $\forall x \in \text{Ob} \mathcal{C}$ 以及任意覆盖筛 $S \in \mathcal{J}(x)$ ，诱导映射

$$\text{Nat}(h_x, \mathfrak{F}) \rightarrow \text{Nat}(S, \mathfrak{F})$$

总是单射，则称 $\mathfrak{F}$ 为分离预层。

命题 3.2.4

1. 函子 $(-)^{\dagger} : \text{PSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$ 左正合；
2. 对 $\forall \mathfrak{F} \in \text{PSh}(\mathcal{C})$ ， $\mathfrak{F}^{\dagger}$ 分离；
3. $\mathfrak{F}$ 分离当且仅当 $\eta^{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}^{\dagger}$ 为单态射。若 $\mathfrak{F}$ 分离，则 $\mathfrak{F}^{\dagger}$ 为层；
4. $\eta^{\mathfrak{F}}$ 为同构当且仅当 $\mathfrak{F}$ 为层。

证明. 我们逐个验证。

1. 设 I 为有限范畴，且有 $\theta : I \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$ 。记 $\mathfrak{F}_i = \theta(i), \forall i \in I$ 及

$$\mathfrak{F} = \varprojlim_i \mathfrak{F}_i$$

另一种形式是写成

$$\mathfrak{F} = \varprojlim_I \theta$$

要证

$$(\varprojlim_i \mathfrak{F}_i)^\dagger \cong \varprojlim_i \mathfrak{F}_i^\dagger,$$

也即对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 要证

$$\varinjlim_{\mathcal{J}(x)} \text{Nat}(-, \varprojlim_i \mathfrak{F}_i) \cong \varprojlim_i \mathfrak{F}_i^\dagger(x).$$

由于后者同构于

$$\varprojlim_i \varinjlim_{\mathcal{J}(x)} \text{Nat}(-, \mathfrak{F}_i)$$

从

$$\varinjlim_{\mathcal{J}(x)}$$

与有限极限交换以及 $\text{Nat}(S, -)$ 是左正合, 可以得到以上同构。

2. 设 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 及 $\forall f, g : h_x \rightarrow \mathfrak{F}^\dagger$, 其像在某个 $\text{Nat}(S, \mathfrak{F})$ 中相等 ($S \in \mathcal{J}(x)$)。则存在 $R \in \mathcal{J}(x)$ 和 $\alpha, \beta : R \rightarrow \mathfrak{F}$ 使得 $z_R(\alpha) = f$ 且 $z_R(\beta) = g$ 。于是 $\eta^\mathfrak{F}\alpha = \eta^\mathfrak{F}\beta$ 。因此 α 与 β 在某个 $T \in \mathcal{J}(x) (T \subset R)$ 上相等。令 $\gamma : T \hookrightarrow R \rightarrow \mathfrak{F}$ 。则 $z_T(\gamma) = z_R(\alpha) = z_R(\beta)$, 即 $f = g$ 。

3. 若 $\mathfrak{F}$ 分离, 则 $\forall x$, $\eta_x^\mathfrak{F}$ 为单。因此 $\eta^\mathfrak{F}$ 为单。反之, 若 $\eta^\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}^\dagger$ 为单, 则 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{F}^\dagger$ 的子预层, 从而 $\mathfrak{F}$ 分离。

现设 $\mathfrak{F}$ 为分离。我们证明 $\mathfrak{F}^\dagger$ 为层。设 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $S \in \mathcal{J}(x)$ 且 $\alpha : S \rightarrow \mathfrak{F}^\dagger$ 。下证 α 通过 h_x 分解 (即 $\text{Nat}(h_x, \mathfrak{F}^\dagger) \rightarrow \text{Nat}(S, \mathfrak{F}^\dagger)$ 为满, 从而 1-1 并推出 $\mathfrak{F}^\dagger$ 为层)。

取 $R = \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{F}^\dagger} S$ 和 $\beta = z_R(\text{pr}_1)$ 。我们获得下图中上方两行构成的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\eta^\mathfrak{F}} & \mathfrak{F}^\dagger & & \\ \text{pr}_1 \uparrow & & \uparrow \alpha & \nwarrow \beta & \\ R & \xrightarrow{\text{pr}_2} & S & \xrightarrow{i_S} & h_x \\ \uparrow p_1 & & \uparrow \gamma & & \\ T & \xrightarrow[p_2]{\dots\dots\dots} & h_y & & \end{array}$$

对 $\forall y \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 及 $\forall \gamma : h_y \rightarrow S$, 要证 $\alpha\gamma = \beta i_S \gamma$ 。取 $T = h_y \times_S R$ 。则 $T \in \mathcal{J}(y)$ 且 p_2 为包含, 由 $\beta i_S \text{pr}_2 = \eta^\mathfrak{F} \text{pr}_1$, 可得

$$\beta i_S \text{pr}_2 p_1 = \eta^\mathfrak{F} \text{pr}_1 p_1 = \alpha \gamma p_2.$$

又从 $\beta i_S \text{pr}_2 p_1 = \beta i_S \gamma p_2$ 推出

$$\beta i_S \gamma p_2 = \alpha \gamma p_2.$$

从 $\mathfrak{F}^\dagger$ 的分离性可得 $\beta i_S \gamma = \alpha \gamma$ 。

4. 由 3 和半层化的定义立即可得。

□

以上命题说明, 任意预层经过最多两次半层化就得到一个层。

3.3 层化

我们接着讨论层化及其性质。首先我们陈述半层化的泛性质。

引理 3.3.1

设 $\mathbf{C}$ 为座, $\mathfrak{F} \in \text{PSh}(\mathcal{C})$ 且 $\mathfrak{G} \in \text{Sh}(\mathbf{C})$ 。那么任意自然变换 $\phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ 存在唯一分解 $\phi = \phi' \circ \eta^{\mathfrak{F}}$,

即有 $\mathfrak{F} \xrightarrow{\eta^{\mathfrak{F}}} \mathfrak{F}^{\dagger} \xrightarrow{\phi'} \mathfrak{G}$.

证明. 对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 从极限的泛性质构造 ϕ'_x

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(x) & \xrightarrow{\eta_x^{\mathfrak{F}}} & \mathfrak{F}^{\dagger}(x) = \varinjlim_{\mathcal{J}(x)} \text{Nat}(-, \mathfrak{F}) \\ & \searrow \phi_x & \downarrow \phi'_x \\ & & \mathfrak{G}(x). \end{array}$$

令 $\phi' = \{\phi'_x\}_x$, 其唯一性显然。 □

层化也产生一个函子, 并且具有良好性质。

定理 3.3.2

设 $\mathbf{C}$ 为座。包含函子

$$\iota: \text{Sh}(\mathbf{C}) \hookrightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$$

存在左伴随 $(-)^a = [(-)^{\dagger}]^{\dagger}: \text{PSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C})$, 且 $(-)^a$ 为正合。

证明. 对 $\mathfrak{F} \in \text{PSh}(\mathcal{C})$, 令 $\mathfrak{F}^a := (\mathfrak{F}^{\dagger})^{\dagger} \in \text{Sh}(\mathbf{C})$ 。要验证

$$\text{Nat}(\mathfrak{F}^a, \mathfrak{G}) \cong \text{Nat}(\mathfrak{F}, \iota(\mathfrak{G})), \forall \mathfrak{G} \in \text{Sh}(\mathbf{C}).$$

首先, 对

$$\mathfrak{F} \xrightarrow{\phi} \iota(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$$

可构造

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\eta^{\mathfrak{F}}} & \mathfrak{F}^{\dagger} & \xrightarrow{\eta^{\mathfrak{F}^{\dagger}}} & \mathfrak{F}^a = (\mathfrak{F}^{\dagger})^{\dagger} \\ & \searrow \phi & \downarrow \exists! \phi' & \swarrow \exists! \phi'' & \\ & & \mathfrak{G} & & \end{array},$$

即有自然映射

$$\text{Nat}(\mathfrak{F}, \iota(\mathfrak{G})) \rightarrow \text{Nat}(\mathfrak{F}^a, \mathfrak{G}).$$

其次, 对于 $\mathfrak{F}^a \xrightarrow{\psi} \mathfrak{G}$, 通过合成可产生

$$\mathfrak{F} \xrightarrow{\eta^{\mathfrak{F}}} \mathfrak{F}^{\dagger} \xrightarrow{\eta^{\mathfrak{F}^{\dagger}}} \mathfrak{F}^a = (\mathfrak{F}^{\dagger})^{\dagger} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{G},$$

即有自然映射

$$\text{Nat}(\mathfrak{F}^a, \mathfrak{G}) \rightarrow \text{Nat}(\mathfrak{F}, \iota(\mathfrak{G})).$$

最后, 可验证以上两个映射互逆。

由于 $(-)^a$ 是 ι 的左伴随, 所以是右正合, 从而正合。 □

注解 3.3.3

称 $(-)^a : \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ 为层化函子 (sheafification), 称 $\mathfrak{F}^a$ 为 $\mathfrak{F}$ 的层化或相伴层 (sheaf associated to $\mathfrak{F}$)。

小范畴 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}^\sim = \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ 中的像 $\{h_x^a\}_{x \in \mathbf{Ob} \mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}^\sim$ 的一个生成集。

由于层化可由两次半层化产生, 其记号在许多文献中也记为 $(-)^{\#}$ 。

例 3.3.4

设 X 为拓扑空间, $\mathcal{P}_X$ 为开集偏序集。考虑常值预层 $\underline{A} : \mathcal{P}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ 使得 $\underline{A}(U) = A$ 且 $\underline{A}(U \hookrightarrow V) = \text{Id}_A$ (A 为集合)。

计算可得

$$\underline{A}^\dagger(U) = \begin{cases} A, & U \neq \emptyset \\ pt, & U = \emptyset. \end{cases}$$

若 $|A| > 1$, 则 $\underline{A}^\dagger$ 不是层: 当 U 不连通时, 则 $\eta^{\underline{A}} : \underline{A}^\dagger \rightarrow \underline{A}^a$ 不是同构。

4 第四讲

本讲一方面将深化对拓扑与层范畴的刻画；另一方面起过渡作用，为后续介绍座态射和拓扑斯态射做铺垫。需要再次强调的是，由于层化由极限定义，本讲结论推导过程中频繁使用极限的性质（包括拉回等构造）。

前面我们通过范畴上的拓扑，定义了预层的层化。在这里我们将看到，层化函子能够识别所有覆盖筛。从这个角度而言，拓扑和层化两个构造相互确定。实际上，层化还提供了预层范畴上的拓扑和一族态射，预层范畴通过这族态射的局部化就是层范畴。

在很大程度上， $\mathcal{C}$ 上的拓扑与 $\mathcal{C}^\wedge$ 上的拓扑“相互决定”。在本讲末尾我们将陈述这一关系。完成对拓扑与层的讨论之后，下一讲我们将介绍态射的概念，展示如何比较座与拓扑斯。基于态射，我们能够严谨地说明前述“相互决定”的精确含义。

4.1 层化与拓扑

在第三讲我们构造了半层化和层化函子，其定义依赖覆盖筛上的极限。

引理 4.1.1

令 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座且 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 。设 S 是 x 上的筛而 $\iota_S : S \rightarrow h_x$ 为包含。则以下等价：

- (1) $S \in \mathcal{J}(x)$;
- (2) $\iota_S^a : S^a \rightarrow h_x^a$ 为自然同构。

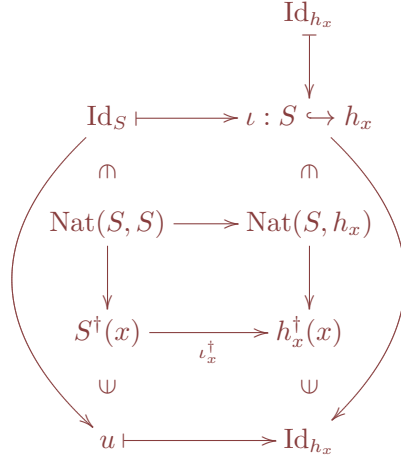
证明. 由于层化函子 $(-)^a$ 为正合，所以 $\iota_S^a : S^a \rightarrow h_x^a$ 为单态射。因为 $\text{Id}_{h_x} \in \text{Nat}(h_x, h_x)$ ，所以它定义了 $h_x^\dagger(x)$ 和 $h_x^a(x)$ 中的元素，仍记为 Id_{h_x} 。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Id}_{h_x} \in & & \text{Nat}(h_x, h_x) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Id}_{h_x} \in & h_x^\dagger(x) = \varinjlim_{\mathcal{J}(x)} \text{Nat}(-, h_x) & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Id}_{h_x} \in & & h_x^a(x)
 \end{array}$$

(1) $\Rightarrow$ (2) 若 $S \in \mathcal{J}(x)$ ，我们将构造态射 $h_x \rightarrow S^a$ 使得 $h_x \rightarrow S^a \rightarrow h_x^a$ 为自然变换 $\eta : h_x \rightarrow h_x^a$ 。这能推出 $S^a \rightarrow h_x^a$ 为满态射。

由定义可知 $\text{Id}_S \in \text{Nat}(S, S)$ 给出 $S^\dagger(x)$ 中一个元素 u ，而这个元素限制到 $\text{Id}_{h_x} \in h_x^\dagger(x)$ ，如

下图:



取 $\tilde{u} \in S^a(x)$ 为 $u \in S^\dagger(x) = \text{Nat}(h_x, S^\dagger)$ 决定的元素, 并令 $\psi : h_x \rightarrow S^a$ 满足 $\psi_x(1_x) = \tilde{u}$ 。从 $\tilde{u}$ 的构造可知合成

$$h_x \xrightarrow{\psi} S^a \xrightarrow{\iota^a} h_x^a$$

恰为 η 。

(2) $\Rightarrow$ (1) 若 $\iota^a : S^a \rightarrow h_x^a$ 为同构, 从交换图

$$\begin{array}{ccccc} h_x & \xrightarrow{\eta} & h_x^\dagger & \xrightarrow{\eta} & h_x^a \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota^\dagger & & \uparrow \iota^a \cong \\ S & \xrightarrow{\eta} & S^\dagger & \xrightarrow{\eta} & S^a \end{array}$$

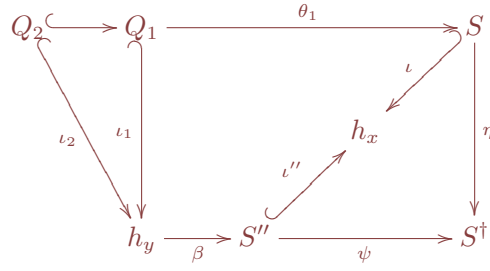
可知存在 $S' \in \mathcal{J}(x)$ 以及 $\varphi : S' \rightarrow S^\dagger$ 使得下图中, 外圈和右边方块交换

$$\begin{array}{ccccc} h_x & \xrightarrow{\eta} & h_x^\dagger & \xrightarrow{\eta} & h_x^a \\ \uparrow \iota' & & \uparrow \iota^\dagger & & \uparrow \iota^a \cong \\ S' & \xrightarrow{\varphi} & S^\dagger & \xrightarrow{\eta} & S^a \end{array}$$

记 $m = \eta \circ \iota'$ 及 $n = \iota^\dagger \circ \varphi$, 并取它们的核 $i : S'' \hookrightarrow S'$ (易见 S'' 是一个筛)。对 $\forall y \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 及 $\forall \alpha : h_y \rightarrow S'$ 有 $\eta \circ m \circ \alpha = \eta \circ n \circ \alpha$ 。基于第三讲的一个引理, $m \circ \alpha$ 和 $n \circ \alpha$ 的核 $\alpha^*(S'')$ 是 y 上覆盖筛, 即 $\alpha^*(S'') \in \mathcal{J}(y)$ 。于是 $S'' \in \mathcal{J}(x)$ 。因此存在 $\psi : S'' \rightarrow S^\dagger$ 及交换图

$$\begin{array}{ccc} S'' & \xrightarrow{\iota''} & h_x \\ \downarrow \varphi \circ i = \psi & \searrow \eta & \downarrow \eta \\ S^\dagger & \xrightarrow{\iota^\dagger} & h_x^\dagger \end{array}$$

任取 $\beta: h_y \rightarrow S'' (\forall y \in \text{Ob}\mathcal{C})$ 。存在 $Q_1 \in \mathcal{J}(y)$ 以及 $\theta_1: Q_1 \rightarrow S$ 满足 $\psi \circ \beta \circ \iota_1 = \eta \circ \theta_1$:

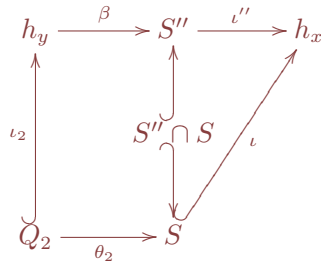


令 $f = \iota'' \beta \iota_1$ 及 $g = \iota \theta_1$ 。对 $\forall z \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 和 $\forall \gamma: h_z \rightarrow Q_1$ 有, 记 f 和 g 的核为 Q_2 且 ι_2 为包含。

$$\begin{aligned}
 \eta \circ f \circ \gamma &= \eta \circ \iota'' \circ \beta \circ \iota_1 \circ \gamma \\
 &= \iota^\dagger \circ \psi \circ \beta \circ \iota_1 \circ \gamma \\
 &= \iota^\dagger \circ \eta \circ \theta_1 \circ \gamma \\
 &= \eta \circ \iota \circ \theta_1 \circ \gamma \\
 &= \eta \circ g \circ \gamma.
 \end{aligned}$$

这说明 $\gamma^*(Q_2) \in \mathcal{J}(z)$, 从而 $Q_2 \in \mathcal{J}(y)$ 。

由上可知对 $\forall \beta: h_y \rightarrow S''$ 可构造 $Q_2 \in \mathcal{J}(y)$ 以及 $\theta_2: Q_2 \hookrightarrow Q_1 \xrightarrow{\theta_1} S$ 使得下图交换



其中 $S'' \cap S$ 是 x 上的筛。可见

$$Q_2 \subset \beta^*(S'' \cap S) = \beta^*(\iota''^*(S)) = (\iota'' \circ \beta)^*(S),$$

即 $\beta^*(S'' \cap S) \in \mathcal{J}(y)$ 。于是 $S'' \cap S \in \mathcal{J}(x)$, 从而 $S \in \mathcal{J}(x)$ 。 □

定理 4.1.2

令 $\mathcal{C}$ 为范畴而 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 为其上拓扑。以下等价

- (1) $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$;
- (2) $\mathcal{C}_1^\sim = \mathcal{C}_2^\sim$ 。此处 $\mathcal{C}_i^\sim = \text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_i)$ 。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) 显然。

(2) $\Rightarrow$ (1) 由条件可知, $(-)^{a_1} = (-)^{a_2}: \mathcal{C}^\wedge \rightarrow \mathcal{C}_i^\sim$ 。从上述引理可知, 对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 总有

$$\mathcal{J}_1(x) = \mathcal{J}_2(x).$$

于是 $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ 。 □

推论 4.1.3

设 $\mathcal{C}$ 为范畴而 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 为其上拓扑。则 $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ 当且仅当 $\mathcal{C}_2^\sim \subset \mathcal{C}_1^\sim$ 。

证明. “ $\Rightarrow$ ” 显然。

“ $\Leftarrow$ ” 设 $\mathcal{C}_2^\sim \subset \mathcal{C}_1^\sim$ 。若 $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\wedge = \text{PSh}(\mathcal{C})$ ，则有 $\mathfrak{F} \xrightarrow{\eta_1} \mathfrak{F}^{a_1}$ 及 $\mathfrak{F} \xrightarrow{\eta_2} \mathfrak{F}^{a_2}$ ，且根据层化的泛性质，存在 $\mathfrak{F}^{a_1} \rightarrow \mathfrak{F}^{a_2}$ 使得

$$\mathfrak{F} \xrightarrow{\eta_1} \mathfrak{F}^{a_1} \rightarrow \mathfrak{F}^{a_2}$$

恰为 $\mathfrak{F} \xrightarrow{\eta_2} \mathfrak{F}^{a_2}$ 。于是 $(\mathfrak{F}^{a_1})^{a_2} = \mathfrak{F}^{a_2}$ 。应用到 $S \hookrightarrow h_x$ 上，有交换图

$$\begin{array}{ccccc} S & \longrightarrow & S^{a_1} & \longrightarrow & S^{a_2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ h_x & \longrightarrow & h_x^{a_1} & \longrightarrow & h_x^{a_2} \end{array}$$

如果 $S \in \mathcal{J}_1(x)$ ，则 $S^{a_1} \rightarrow h_x^{a_1}$ 为同构。因而 $(S^{a_1})^{a_2} \rightarrow (h_x^{a_1})^{a_2}$ 也是同构，即 $S \in \mathcal{J}_2(x)$ 。 $\square$

读者可以通过第二讲的子范畴拓扑和具体例子来理解上述结论。

4.2 局部满态射与层化

范畴 $\mathcal{C}$ 上的拓扑与预层范畴 $\mathcal{C}^\wedge$ 上的拓扑相互关联，而后者能通过预层间的特定态射来体现。

引理 4.2.1

设 $\mathbf{C}$ 为座，则 $\mathcal{C}^\sim = \text{Sh}(\mathbf{C})$ 中既单且满的态射为同构。

证明. 令 $\Phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ 为既单且满的层态射。作为预层态射， Φ 为单。考虑预层范畴中的余积 $\mathfrak{G} \amalg_{\mathfrak{F}} \mathfrak{G}$ 及两个自然态射

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{G} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow i_1 \\ \mathfrak{G} & \xrightarrow{i_2} & \mathfrak{G} \amalg_{\mathfrak{F}} \mathfrak{G} \end{array}$$

因为 Φ 为单，所以上图既是推出，也是拉回。于是层化产生层范畴中的推出及拉回。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{G} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow i_1^a \\ \mathfrak{G} & \xrightarrow{i_2^a} & (\mathfrak{G} \amalg_{\mathfrak{F}} \mathfrak{G})^a \end{array}$$

由 $i_1^a \Phi = i_2^a \Phi$ 以及 Φ 为满，可知 $i_1^a = i_2^a$ ，且 $i_1^a = i_2^a$ 必为同构（由推出的泛性质判定）。再由上图为拉回，以及拉回的泛性质，可知 Φ 必为同构。 $\square$

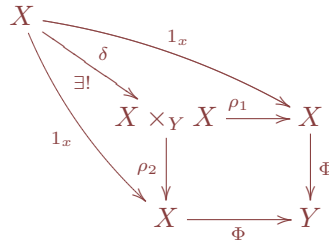
为陈述后面的定义，我们给出一个技术性引理。

引理 4.2.2

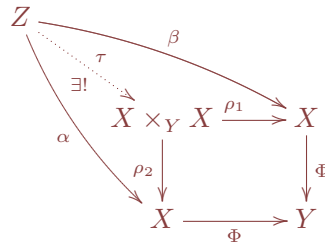
设 $\mathcal{C}$ 有纤维积且 $\Phi: X \rightarrow Y$ 为态射。记 $\rho_1, \rho_2: X \times_Y X \rightrightarrows X$ 为投影, 而 $\delta: X \rightarrow X \times_Y X$ 为对角态射。则

- (1) δ 为单, 而 ρ_1, ρ_2 为满;
- (2) Φ 为单 $\iff \delta$ 为同构 $\iff \delta$ 为满 $\iff \rho_1 = \rho_2$ 。

证明. 如图

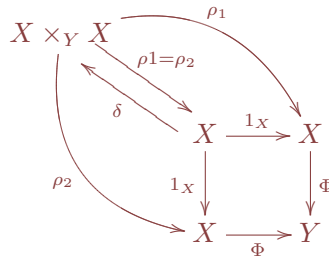


- (1) 考虑 $Z \rightrightarrows X \xrightarrow{\delta} X \times_Y X$ 满足 $\delta\alpha = \delta\beta$ 。由于 $\rho_1\delta\alpha = \rho_1\delta\beta$, 所以 $\alpha = \beta$ 。因此 δ 为单。考虑 $X \times_Y X \xrightarrow{\rho_i} X \xrightarrow{\mu} W$ 满足 $\mu\rho_i = \gamma\rho_i (i = 1, 2)$ 。由 $\mu\rho_i\delta = \gamma\rho_i\delta$, 可得 $\mu = \gamma$ 。因此 ρ_i 为满。
- (2) 设 Φ 为单。由上图可得 $\Phi\rho_1 = \Phi\rho_2$, 即有 $\rho_1 = \rho_2$ 。反之, 若 $Z \rightrightarrows X \xrightarrow{\Phi} Y$ 满足 $\Phi\alpha = \Phi\beta$, 则有



从 $\alpha = \rho_2\tau = \rho_1\tau = \beta$, 即 Φ 为单。

下证 Φ 为单 ($\iff \rho_1 = \rho_2$) 等价于 δ 为同构。若 δ 为同构, 则 δ 为满, 从而 $\rho_1 = \rho_2$ 。反之, 设 $\rho_1 = \rho_2$ 。则有交换图



从拉回的泛性质可知 δ 为同构。 □

如果有预层态射 $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$, 则此态射的像是 $\mathfrak{G}$ 的子函子。

命题 4.2.3

设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座, 且 $\Phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ 为预层态射。则以下等价:

- (1) 对所有 $\alpha: h_x \rightarrow \mathfrak{G}, x \in \text{Ob}\mathcal{C}, \bar{\Phi}: \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} h_x \rightarrow h_x$ 的像属于 $\mathcal{J}(x)$;
 (2) $\Phi^a: \mathfrak{F}^a \rightarrow \mathfrak{G}^a$ 为满态射;
 (2') 对所有 $\mathfrak{F}' \in \mathcal{C}^\sim = \text{Sh}(\mathbf{C})$, 自然映射

$$\text{Nat}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F}') \rightarrow \text{Nat}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$$

为单。

证明. (2) $\Rightarrow$ (2') 设有 $\mathfrak{F} \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{G} \xrightarrow[\Theta]{\Psi} \mathfrak{F}'$ 满足

$$\Psi\Phi = \Theta\Phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$$

下证 $\Psi = \Theta$ 。考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{G} & \xrightarrow[\Psi]{\Theta} & \mathfrak{F}' \\ \eta^{\mathfrak{F}} \downarrow & & \eta^{\mathfrak{G}} \downarrow & \nearrow \tilde{\Psi} & \nearrow \tilde{\Theta} \\ \mathfrak{F}^a & \xrightarrow{\Phi^a} & \mathfrak{G}^a & & \end{array}$$

由 $\eta^{\mathfrak{G}}$ 的泛性质, 可知 $\tilde{\Psi}$ 和 $\tilde{\Theta}$ 存在且唯一, 使得上图交换。又由 $\eta^{\mathfrak{F}}$ 的泛性质可知 $\tilde{\Psi} \circ \Phi^a = \tilde{\Theta} \circ \Phi^a$ 。于是从 Φ^a 为满可知 $\tilde{\Psi} = \tilde{\Theta}$, 从而 $\Psi = \Theta$ 。

(2') $\Rightarrow$ (2) 类似反推。

(1) $\Rightarrow$ (2) 设有 $\mathfrak{F}^a \xrightarrow{\Phi^a} \mathfrak{G}^a \xrightarrow[\Sigma]{\Gamma} \mathfrak{H}$ 满足 $\Gamma\Phi^a = \Sigma\Phi^a$ 。下证 $\Gamma = \Sigma$ 。

由

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{G} & & \\ \eta^{\mathfrak{F}} \downarrow & & \eta^{\mathfrak{G}} \downarrow & & \\ \mathfrak{F}^a & \xrightarrow{\phi^a} & \mathfrak{G}^a & \xrightarrow[\Sigma]{\Gamma} & \mathfrak{H} \end{array}$$

可得 $\Gamma\Phi^a\eta^{\mathfrak{F}} = \Sigma\Phi^a\eta^{\mathfrak{F}}$, 即 $\Gamma\eta^{\mathfrak{G}}\Phi = \Sigma\eta^{\mathfrak{G}}\Phi$ 。

下证 $\Gamma\eta^{\mathfrak{G}} = \Sigma\eta^{\mathfrak{G}}$ (然后由 $\eta^{\mathfrak{G}}$ 的泛性质可得 $\Gamma = \Sigma$)。由

$$\text{Nat}(h_x, \mathfrak{H}) \xrightarrow[\iota_*]{\cong} \text{Nat}(\text{Im}\bar{\Phi}, \mathfrak{H})$$

考虑覆盖筛 $\text{Im}\bar{\Phi}$ 和交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im}\bar{\Phi} & & \\ & \nearrow & \downarrow \iota & & \\ \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} h_x & \xrightarrow[\bar{\Phi}]{} & h_x & & \\ \rho \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ \mathfrak{F} & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{G} & \xrightarrow[\eta^{\mathfrak{G}}]{} & \mathfrak{G}^a \xrightarrow[\Sigma]{\Gamma} \mathfrak{H} \end{array}$$

从 $\Gamma\eta^{\mathfrak{G}}\Phi = \Sigma\eta^{\mathfrak{G}}\Phi$ 可得 $\Gamma\eta^{\mathfrak{G}}\Phi\rho = \Sigma\eta^{\mathfrak{G}}\Phi\rho$, 即 $\Gamma\eta^{\mathfrak{G}}\alpha\rho = \Sigma\eta^{\mathfrak{G}}\alpha\rho$ 且 $\Gamma\eta^{\mathfrak{G}}\alpha\iota = \Sigma\eta^{\mathfrak{G}}\alpha\iota$ 。由于 ι 诱导

同构

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(h_x, \mathfrak{G}^a) & \xrightarrow[\iota_*]{\cong} & \text{Nat}(\text{Im}\bar{\Phi}, \mathfrak{G}^a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Nat}(h_x, \mathfrak{H}) & \xrightarrow[\cong]{\iota_*} & \text{Nat}(\text{Im}\bar{\Phi}, \mathfrak{H}) \end{array}$$

所以有 $\Gamma\eta^{\mathfrak{G}}\alpha = \Sigma\eta^{\mathfrak{G}}\alpha, \forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 及 $\forall \alpha : h_x \rightarrow \mathfrak{G}$ 。从 Yoneda 引理可知, 这相当于说 $(\Gamma\eta^{\mathfrak{G}})_x = (\Sigma\eta^{\mathfrak{G}})_x : \mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{H}(x)$ 。

因此, $\Gamma\eta^{\mathfrak{G}} = \Sigma\eta^{\mathfrak{G}}$ (从而 $\Gamma = \Sigma$)。

(2) $\Rightarrow$ (1) 考虑 $\text{Im}\bar{\Phi} \hookrightarrow h_x$ (总是筛)。要证 $\text{Im}\bar{\Phi} \in \mathcal{J}(x)$ 。只需验证 $\bar{\Phi}^a : (\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} h_x)^a \rightarrow h_x^a$ 为满。由于 $(\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} h_x)^a \cong \mathfrak{F}^a \times_{\mathfrak{G}^a} h_x^a$, 而 $\mathfrak{F}^a \rightarrow \mathfrak{G}^a$ 为满, 所以 $\bar{\Phi}^a$ 为满。□

基于上述命题, 我们给出局部满态射的定义。

定义 4.2.4

设 $\mathcal{C}$ 为座, 且 $\Phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ 是预层态射。若 Φ^a 为满态射, 则称 Φ 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中的**局部满态射** (local epimorphism)。

局部满态射在有些文献中叫做 locally surjective maps。

注解 4.2.5

易见在任意拓扑下, $\mathcal{C}^\wedge$ 中满态射必为局部满。

4.3 局部满态射与拓扑

我们现在说明: 局部满态射与 $\mathcal{C}$ 上拓扑一一对应, 相互决定。根据定义, 能够很快给出以下性质。

引理 4.3.1

设 $\mathcal{C}$ 为座, 则 $\mathcal{C}^\wedge$ 中局部满态射满足以下性质:

- (LE1) 对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}, \text{Id} : h_x \rightarrow h_x$ 为局部满;
- (LE1') 若 $\phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ 为满态射, 则 ϕ 为局部满;
- (LE2) 设 $\mathfrak{F}_1 \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}_3$ 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中态射。如果 ϕ 和 ψ 均为局部满, 则 $\psi\phi$ 也是;
- (LE3) 设 $\mathfrak{F}_1 \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}_3$ 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中态射。如果 $\psi\phi$ 为局部满, 则 ψ 也是;
- (LE4) 设 $\phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中态射。若对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 以及 $\forall \alpha : h_x \rightarrow \mathfrak{G}, \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} h_x \rightarrow h_x$ 为局部满, 则 ϕ 为局部满。

以上讨论说明 $\mathcal{C}$ 上的拓扑 $\mathcal{J}$ 确定 $\mathcal{C}^\wedge$ 中的一族 (局部满) 态射, 满足性质 (LE1) – (LE4)。关于局部满态射的更多讨论细节见 Kashiwara-Schapira(第 16 章)。

注解 4.3.2

从定义容易推导, $(\text{LE1}) + (\text{LE2}) + (\text{LE3}) + (\text{LE4}) \Leftrightarrow (\text{LE1}') + (\text{LE2}) + (\text{LE3}) + (\text{LE4})$ 。

引理 4.3.3

设 $\mathcal{C}^\wedge$ 中一族态射满足 (LE1) + (LE2) + (LE3) + (LE4)。则它们确定 $\mathcal{C}$ 上一个拓扑 $\mathcal{J}$ 。该拓扑决定的局部满同态恰为事先给定的这族态射。

证明. 对任意 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 设 S 为 x 上的筛, 并令 $S \in \mathcal{J}(x)$ 当且仅当 $S \hookrightarrow h_x$ 为局部满。可以验证, 这些筛满足拓扑的定义, 产生 $\mathcal{C}$ 上一个拓扑。□

可以验证, 上述两个构造建立了 $\{\mathcal{C} \text{ 上拓扑}\}$ 与 $\{\mathcal{C}^\wedge \text{ 中满足条件 (LE1) + (LE2) + (LE3) + (LE4) 的态射族}\}$ 的一一对应。

例 4.3.4

容易验证, 预层范畴 $\mathcal{C}^\wedge$ 中所有满态射构成的态射族满足 (LE1) + (LE2) + (LE3) + (LE4), 对应 $\mathcal{C}^\wedge$ 上的最小拓扑。

同样, 预层范畴 $\mathcal{C}^\wedge$ 中所有态射构成的态射族也满足 (LE1) + (LE2) + (LE3) + (LE4), 而它对应 $\mathcal{C}^\wedge$ 上的最大拓扑。

范畴 $\mathcal{C}$ 上的拓扑 $\mathcal{J}$ 可以按照以下方式延拓为 $\mathcal{C}^\wedge$ 上一个拓扑 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}^\wedge}$ 。

命题 4.3.5

令 $\mathbf{C}$ 为座。则在 $\mathcal{C}^\wedge$ 存在一个拓扑 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}^\wedge}$, 使得对 $\forall \mathfrak{F} \in \text{Ob}\mathcal{C}^\wedge$ 和 $\mathfrak{F}$ 上任意筛 S , $S \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}^\wedge}(\mathfrak{F})$ 当且仅当 $\coprod_{f_\alpha \in S} f_\alpha$ 为局部满。拓扑 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}^\wedge}$ 是 $\mathcal{C}^\wedge$ 上满足以下条件的最小拓扑:

- (1) 大于 $\mathcal{C}^\wedge$ 上的典范拓扑 (即由 $\mathcal{C}^\wedge$ 中所有满态射给定的拓扑);
- (2) $\mathcal{C}$ 中所有覆盖筛在 $\mathcal{C}^\wedge$ 中生成的筛为覆盖筛。

证明. 首先, 由局部满态射的性质可知 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}^\wedge}$ 确为 $\mathcal{C}^\wedge$ 的 Grothendick 拓扑, 含所有满态射族。

其次, 设 $\mathcal{J}'$ 为满足以上条件的 $\mathcal{C}^\wedge$ 中拓扑。要证对 $\forall \mathfrak{G} \in \text{Ob}\mathcal{C}^\wedge, \mathcal{J}_{\mathcal{C}^\wedge}(\mathfrak{G}) \subset \mathcal{J}'(\mathfrak{G})$ 。令 $\langle f_\alpha : \mathfrak{F}_\alpha \rightarrow \mathfrak{G} \rangle_\alpha = S \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}^\wedge}(\mathfrak{G})$ 。下证 $S \in \mathcal{J}'(\mathfrak{G})$ 。令 $\iota_\alpha : \mathfrak{F}_\alpha \rightarrow \coprod_\beta \mathfrak{F}_\beta$ 为典范单态射且 $f := \coprod_\alpha f_\alpha$ 为由 $\{f_\alpha\}_\alpha$ 自然产生的态射 $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ 。为了证明 $S \in \mathcal{J}'(\mathfrak{G})$, 我们将其改写成 $S = \langle f \rangle$ 。根据 $\mathcal{C}^\wedge$ 的基本性质, 存在 $\{x_i\}_i \subset \text{Ob}\mathcal{C}$, 使得 $\{u_i : h_{x_i} \rightarrow \mathfrak{G}\}_i$ 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中满态射集 (生成一个覆盖筛 $\in \mathcal{J}'(\mathfrak{G})$)。要证 $\langle f \rangle \in \mathcal{J}'(\mathfrak{G})$, 只需证明对 $\forall i$, 拉回

$$pr_2 : \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} h_{x_i} \rightarrow h_{x_i}$$

为 $\mathcal{J}'$ 中覆盖筛。取 $\{v_{i_j} : h_{y_{i_j}} \rightarrow \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} h_{x_i}\}_j$ (生成 $\mathcal{J}'(\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} h_{x_i})$ 中覆盖筛), 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 满态射集。则 $\langle pr_2 \circ v_{i_j} : h_{y_{i_j}} \rightarrow h_{x_i} \rangle_j$ 为 $\mathcal{J}'$ 中覆盖, 因而对应 $\mathcal{C}$ 中 x_i 的一个覆盖。因此 $\langle pr_2 \circ v_{i_j} \rangle_j$ 是 $\mathcal{J}'$ 中覆盖筛。这说明 pr_2 生成的筛包含 $\mathcal{J}'$ 中一个覆盖筛, 即 $\langle pr_2 \rangle$ 是 $\mathcal{J}'$ 中覆盖筛。□

读者可以思考 $\mathcal{C}$ 上 $\mathcal{J}_{\min}$ 和 $\mathcal{J}_{\max}$ 在 $\mathcal{C}^\wedge$ 上所诱导产生的拓扑是什么?

注解 4.3.6

基于上述 $\mathcal{C}^\wedge$ 上拓扑 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}^\wedge}$, 前面的 (LE2) 和 (LE4) 的可以一般化为如下性质:

- (1) 设 $\mathfrak{F} \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{G}$ 为局部满且 $\mathfrak{F}' \xrightarrow{\Psi} \mathfrak{G}$ 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中任意态射。则 $\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为局部满。

(2) 如果 $\mathfrak{F} \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{G}$ 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中态射, $\Psi: \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{G}$ 为局部满且 $\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为局部满, 则 Φ 为局部满。

以上性质分别对应 Grothendieck 拓扑定义公理中的“稳定性”和“传递性”公理。

注解 4.3.7

对于范畴 $\mathcal{E}$ 和它的满子范畴 $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ 上任意拓扑 $\mathcal{J}_{\mathcal{E}}$ 可以限制为 $\mathcal{D}$ 上一个拓扑 $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ 。这个构造在我们引入座态射或拓扑斯态射后才便于给出。

假设我们接受这种构造, 那么 $\mathcal{C}$ 上拓扑 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ 延拓为 $\mathcal{C}^\wedge$ 上的拓扑 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}^\wedge}$, “限制”回到 $\mathcal{C}$ 上恰好是 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ 。具体情况请见第六讲。

借鉴 4.2.2 (“满态射和单态射相互确定”), 我们给出以下定义。需要强调的是层范畴中存在纤维积, 它是预层纤维积的层化。

定义 4.3.8

设 $\mathbf{C}$ 为座, 且 $\Phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ 是预层态射。若 $\delta: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{G}} \mathfrak{F}$ 为局部满, 则称 Φ 为**局部单态射**(local monomorphism)。

如果 Φ 既为局部满又是局部单, 则称之为**局部同构**(local isomorphism)。

例 4.3.9

如果考虑预层范畴 $\mathcal{C}^\wedge$ 中所有满态射构成的局部满态射族, 则局部单态射就是单态射, 因而局部同构就是通常的自然同构。

相对而言, 如果选预层范畴 $\mathcal{C}^\wedge$ 中所有态射构成的态射族为局部满态射族, 则所有态射, 即所有自然变换, 都是局部单和局部同构。

注解 4.3.10

局部同构恰为层化为同构的态射, 其性质详见 SGA4 或 Kashiwara-Schapira。设 Σ 由所有局部同构组成。则它是一个乘法系 (multiplicative system), 而预层范畴 $\mathcal{C}^\wedge = \text{PSh}(\mathcal{C})$ 的局部化 $\Sigma^{-1}\text{PSh}(\mathcal{C})$ 就是层范畴 $\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, 其中 $\mathcal{J}$ 是由前述局部满态射确定的拓扑。

在上例中, 我们很容易看出 $\text{PSh}(\mathcal{C})$ 的两种局部化。

4.4 阶段性结语

从第一讲到第四讲, 我们主要介绍单个范畴上的拓扑、相应的层以及层范畴的描述和性质。这些内容组成本课程的第一部分。在第二部分内容里面, 我们将讨论如何比较两个座、其上的层以及相应的层范畴。

我们迄今为止, 尚未引入具有代数结构的层, 如阿贝尔层。最简洁易懂的定义方式是考虑阿贝尔预层 $\mathfrak{F}: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Ab}$, 其中 $\text{Ab} = \text{Mod-}\mathbb{Z}$ 为阿贝尔群范畴。如果 $\mathfrak{F}$ 与遗忘函子的合成 $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \text{Ab} \rightarrow \text{Set}$ 在拓扑 $\mathcal{J}$ 下为集合层, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 上的阿贝尔层。所有 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 上的阿贝尔层构成的范畴记作 $\text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$, 或 $\text{Sh}(\mathbf{C}, \mathbb{Z})$, 是阿贝尔范畴这一概念的原始模板之一。此时对于表示论领域读者而言, 前四讲中许多范畴论概念都有更加熟悉的同调代数形式, 如核。

5 第五讲

作为讲义的第二部分的开端，我们将讨论如何比较拓扑斯。

给定一个拓扑斯 $\mathcal{E}$ ，一般存在不同范畴上的座 $\mathbf{C}_1$ 和 $\mathbf{C}_2$ ，满足 $\mathcal{E} \simeq \mathrm{Sh}(\mathbf{C}_1) \simeq \mathrm{Sh}(\mathbf{C}_2)$ 。基于此观察，拓扑斯是比座更为本质的数学构造。因此作为一类广义空间，我们应当考虑拓扑斯之间的态射。然而，座的底层范畴往往比拓扑斯小，不少情况下更便于计算。于是在不少实际工作中，我们会考虑座之间的态射。这些态射将诱导相应的拓扑斯态射，因而在一定程度上是更加底层的构造。

给定座 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ ，我们仍简记 $\mathcal{C}^\wedge = \mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ 为其上集合预层范畴，且 $\mathcal{C}^\sim = \mathrm{Sh}(\mathbf{C})$ 为集合层范畴。

5.1 连续函子与座态射

设 $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为小范畴之间的（正变）函子。它诱导出预层范畴之间的函子 Res_α ，称作“沿着 α 的限制”，简称限制

$$\mathrm{Res}_\alpha := - \circ \alpha : \mathcal{D}^\wedge \rightarrow \mathcal{C}^\wedge.$$

从经典范畴论可知，限制函子存在左伴随 LK_α 和右伴随 RK_α ，

$$\mathrm{LK}_\alpha, \mathrm{RK}_\alpha : \mathcal{C}^\wedge \rightarrow \mathcal{D}^\wedge.$$

分别称为“沿着 α 的左 Kan 扩张和右 Kan 扩张”，由极限所定义，简称左、右 Kan 扩张。

对于具有代数结构的层范畴，如阿贝尔层范畴，上述伴随函子仍然存在，在此不再赘述。两个 Kan 扩张在范畴论和同调代数里面占有核心地位，其抽象形式在一些情况下能显现为清晰的计算公式。

例 5.1.1

设 G 为有限群， H 为子群。将它们看作只有一个对象的范畴，并考虑包含函子 $\iota : H \rightarrow G$ 。则 $G^\wedge = G\text{-Set}$ 为 G -集合范畴，限制 $\mathrm{Res}_\iota : G^\wedge \rightarrow H^\wedge$ 等同于经典的限制函子 $\downarrow_H^G : G\text{-Set} \rightarrow H\text{-Set}$ 。相应地，左、右 Kan 扩张等同于诱导 $\uparrow_H^G$ 和余诱导 $\uparrow_H^G$ （此特殊情况下，两个 Kan 扩张恰好同构）。

我们非常关心限制函子何时能够保持层。

定义 5.1.2

设 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 为座，且 $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子。如果

$$\mathrm{Res}_\alpha : \mathcal{D}^\wedge \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$$

限制为层范畴之间的函子 $\mathrm{Res}_\alpha : \mathcal{D}^\sim \rightarrow \mathcal{C}^\sim$ ，则称 α 为**连续函子**。

Artin 在 1962 年的哈佛大学数学系讲义《Grothendieck Topologies》里面给出了一个重要例子（与 Galois 上同调密切相关）。该例子探讨拓扑群及其离散表示，使用特定的轨道范畴。为简便起见，我们仅考虑离散有限群的特例。

例 5.1.3

设 G 为有限群。我们构造其轨道范畴 $\mathcal{O}(G)$ 如下:

1. 对象是所有可迁轨道 G/H , 其中 H 为所有可能的子群,
2. 态射是上述 G -集合之间的所有 G -映射 (群论简单作业: 刻画这些映射)。

考虑 $G/1$ 构成的满子范畴 $\mathcal{O}_1(G)$ 。此对象 $G/1$ 的态射均为该轨道的自同构, 且所有态射构成的群 $\text{Aut}(G/1)$ 同构于 G 。包含函子

$$\iota: \mathcal{O}_1(G) \rightarrow \mathcal{O}(G)$$

产生预层范畴间的限制和 Kan 扩张。如果我们在 $\mathcal{O}(G)$ 上赋予子范畴拓扑 $\mathcal{J}_{\mathcal{O}_1(G)}$ (也叫稠密拓扑), 则 Res_ι 是连续函子。

实际上, 限制函子提供一个范畴等价, 将 $\mathcal{O}_1(G)^\wedge \cong G\text{-Set}$ 等同于 $\text{Sh}(\mathcal{O}(G), \mathcal{J}_{\mathcal{O}_1(G)})$ 。具体而言, 它将任意 G -集合 M 对应到不动点层 $\mathfrak{F}_M$, 其中 $\mathfrak{F}_M(G/H) = M^H$ 为 H -不动点集, $\forall G/H \in \text{Ob}\mathcal{O}(G)$ 。这个等价能够限制到 G 的各个线性表示范畴上。

Artin 的结论可以看作 Giraud 比较引理的特例。

上例提供了群表示与层论之间的第一个重要联系, 同时体现了态射研究的重要性。我们给出连续函子的一个等价刻画。

命题 5.1.4

设 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 为座, 且 $\alpha: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 为函子。则以下等价:

- (1) α 连续;
- (2) 对 $\forall c \in \text{Ob}\mathbf{C}$ 以及 $S \in \mathcal{J}(\mathbf{C})$, 包含函子 $S \hookrightarrow h_c$ 在左 Kan 扩张下的像

$$\text{LK}_\alpha S \rightarrow \text{LK}_\alpha h_c = h_{\alpha(c)}$$

为 $\mathbf{D}^\wedge$ 中局部同构;

- (3) 对所有 $\mathbf{C}^\wedge$ 中局部同构族 $\mathfrak{F}_i \rightarrow \mathfrak{F}$ (即 $\coprod_i \mathfrak{F}_i \rightarrow \mathfrak{F}$ 为局部同构), 产生的 $\mathbf{D}^\wedge$ 中态射族 $\text{LK}_\alpha \mathfrak{F}_i \rightarrow \text{LK}_\alpha \mathfrak{F}$ 为局部同构;
- (4) 存在函子 $\alpha^{-1}: \mathbf{C}^\sim \rightarrow \mathbf{D}^\sim$, 与余极限可交换, 且为 α 的扩张, 即有同构意义下的交换图

$$\begin{array}{ccc}
 \forall c \vdash & \xrightarrow{\quad} & h_c^a \\
 \downarrow \alpha & \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{\epsilon_{\mathbf{C}}} & \mathbf{C}^\sim \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha^{-1} \\ \mathbf{D} & \xrightarrow{\epsilon_{\mathbf{D}}} & \mathbf{D}^\sim \end{array} & \downarrow \alpha^{-1} \\
 \alpha(c) \vdash & \xrightarrow{\quad} & h_{\alpha(c)}^a \cong \alpha^{-1}(h_c^a)
 \end{array}$$

证明. 第一步, 我们按照下列顺序证明部分等价 $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ 。

(1) $\Rightarrow$ (4) 构造 $\alpha^{-1} = (-)^a \circ \text{LK}_\alpha \circ \iota$ 如下:

$$\alpha^{-1} : \mathcal{C}^\sim \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}^\wedge \xrightarrow{\text{LK}_\alpha} \mathcal{D}^\wedge \xrightarrow{(-)^a} \mathcal{D}^\sim.$$

由以上构造可知, 对 $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\sim$ 和 $\mathfrak{G} \in \mathcal{D}^\sim$,

$$\begin{aligned} \text{Nat}(\alpha^{-1}(\mathfrak{F}), \mathfrak{G}) &\cong \text{Nat}((\text{LK}_\alpha \mathfrak{F})^a, \mathfrak{G}) \\ &\cong \text{Nat}(\text{LK}_\alpha \mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \\ &\cong \text{Nat}(\mathfrak{F}, \text{Res}_\alpha \mathfrak{G}) \end{aligned}$$

作为左伴随函子, α^{-1} 与余极限可交换。

现在我们验证 α^{-1} 是 α 的扩张, 即 $\alpha^{-1}(h_c^a) \cong h_{\alpha(c)}^a$ 。首先我们注意到存在自然变换 $h_{\alpha(c)}^a \rightarrow \alpha^{-1}(h_c^a)$ (由 $(-)^a$ 的泛性质产生); 其次, 我们能够验证, 对 $\forall \mathfrak{G} \in \mathcal{D}^\sim$, 诱导产生的以下映射

$$\text{Nat}(\alpha^{-1}(h_c^a), \mathfrak{G}) \rightarrow \text{Nat}(h_{\alpha(c)}^a, \mathfrak{G})$$

为 1-1。实际上, 我们可验证下图交换

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(\alpha^{-1}(h_c^a), \mathfrak{G}) & \longrightarrow & \text{Nat}(h_{\alpha(c)}^a, \mathfrak{G}) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ \text{Nat}(\text{LK}_\alpha(h_c), \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Nat}(h_{\alpha(c)}, \mathfrak{G}) \end{array}$$

由此可推断上方水平映射为 1-1 的。基于 Yoneda 嵌入, 我们能得到所需同构。我们也能直接计算验证如下:

$$\begin{aligned} \text{Nat}(\alpha^{-1}(h_c^a), \mathfrak{G}) &\cong \text{Nat}(h_c^a, \text{Res}_\alpha \mathfrak{G}) \\ &\cong \text{Nat}(h_c, \text{Res}_\alpha \mathfrak{G}) \\ &\cong \alpha_*(\mathfrak{G})(c) \\ &= \mathfrak{G}(\alpha(c)) \end{aligned}$$

且有 $\text{Nat}(h_{\alpha(c)}^a, \mathfrak{G}) \cong \text{Nat}(h_{\alpha(c)}, \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}(\alpha(c))$ 。

(4) $\Rightarrow$ (2) 考虑右图 (根据定义, 左边方图交换):

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{h_-} & \mathcal{C}^\wedge & \xrightarrow{(-)^a} & \mathcal{C}^\sim \\ \alpha \downarrow & & \text{LK}_\alpha \downarrow & & \downarrow \alpha^{-1} \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{h_-} & \mathcal{D}^\wedge & \xrightarrow{(-)^a} & \mathcal{D}^\sim \end{array}$$

其中水平合成函子为 $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ 和 $\varepsilon_{\mathcal{D}}$ (因而外圈也交换)。在前面提过, 对 $\forall \mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\wedge$, 总有

$$\lim_{\rightarrow \mathcal{C}/\mathfrak{F}} h_- \xrightarrow{\cong} \mathfrak{F}$$

由于 $\text{LK}_\alpha, \alpha^{-1}$ 和 $(-)^a$ 均与 $\lim_{\rightarrow}$ 可交换, 有

$$\lim_{\rightarrow \mathcal{C}/\mathfrak{F}} \alpha^{-1}(h_-^a) \xrightarrow{\cong} \alpha^{-1}(\mathfrak{F}^a)$$

和

$$\lim_{\rightarrow \mathcal{C}/\mathfrak{F}} (\text{LK}_\alpha h_-)^a \xrightarrow{\cong} (\text{LK}_\alpha \mathfrak{F})^a$$

从 $\mathrm{LK}_\alpha h_- \cong h_{\alpha(-)}$ 可知 $\alpha^{-1}(h_-)^a \cong (h_{\alpha(-)})^a$, 从而

$$\alpha^{-1}(\mathfrak{F}^a) \cong (\mathrm{LK}_\alpha \mathfrak{F})^a$$

证明上图右框可交换 (同构意义下)。

设 $S \in \mathcal{J}(C)$ 。则 $S \xrightarrow{L} h_c$ 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中的局部同构, 而 $S^a \rightarrow h_c^a$ 为 $\mathcal{C}^\sim$ 中同构。于是 $(\mathrm{LK}_\alpha S)^a \rightarrow (\mathrm{LK}_\alpha h_c)^a$ 相当于 $\alpha^{-1}(S^a) \rightarrow \alpha^{-1}(h_c^a)$, 是 $\mathcal{D}^\sim$ 中同构。这说明 $\mathrm{LK}_\alpha S \rightarrow \mathrm{LK}_\alpha h_c$ 为 $\mathcal{D}^\wedge$ 中局部同构。

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $S \in \mathcal{J}(C)$, 则 $\alpha^{-1}(S) \rightarrow \alpha^{-1}(h_c)$ 为 $\mathcal{D}^\sim$ 中同构。于是对 $\forall \mathfrak{G} \in \mathcal{D}^\sim$, 有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Nat}(\alpha^{-1}(h_c), \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Nat}(\alpha^{-1}(S), \mathfrak{G}) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ \mathrm{Nat}(h_c, \alpha_*(\mathfrak{G})) & \longrightarrow & \mathrm{Nat}(S, \alpha_*(\mathfrak{G})) \end{array}$$

因为下方水平映射为 1-1, 所以 $\alpha_*(\mathfrak{G})$ 为层, 即 α 为连续。

第二步, 我们补全剩下的等价:

(3) $\Rightarrow$ (2) 显然成立。

(1) $\Rightarrow$ (3) 对 $\forall \mathfrak{G} \in \mathcal{D}^\sim, \alpha_*(\mathfrak{G}) \in \mathcal{C}^\sim$ 。于是有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Nat}(\mathfrak{F}^a, \alpha_* \mathfrak{G}) & & \\ \cong \downarrow & & \\ \mathrm{Nat}(\mathfrak{F}, \alpha_* \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Nat}((\mathrm{LK}_\alpha \mathfrak{F})^a, \mathfrak{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Nat}(\coprod_i \mathfrak{F}_i, \alpha_* \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Nat}((\coprod_i \mathrm{LK}_\alpha \mathfrak{F}_i)^a, \mathfrak{G}) \\ \cong \uparrow & & \\ \mathrm{Nat}((\coprod_i \mathfrak{F}_i)^a, \alpha_* \mathfrak{G}) & & \end{array}$$

由于 $\coprod_i \mathfrak{F}_i \rightarrow \mathfrak{F}$ 为局部同构, 所以上方水平映射为 1-1。因而下方水平映射为 1-1, 即 $\coprod_i \mathrm{LK}_\alpha \mathfrak{F}_i \rightarrow \mathrm{LK}_\alpha \mathfrak{F}$ 为局部同构。 $\square$

注解 5.1.5

条件 (3) 可修改为: 对 $\mathcal{C}^\wedge$ 中局部同构 $\mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F}, \mathrm{LK}_\alpha \mathfrak{F}' \rightarrow \mathrm{LK}_\alpha \mathfrak{F}$ 为局部同构。后者恰为 Kashiwara-Schapira 书中座态射的定义。

为了便于读者了解不同背景下连续函子的内涵, 我们再陈述一个定义和相应的刻画。

定义 5.1.6

令 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 为座, 且 $\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子。若对 $\forall c \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ 及 $S \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(c), \alpha(S)$ 生成 $\alpha(c)$ 上的一个覆盖筛, 则称 α **保持覆盖**。

命题 5.1.7

设 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 为座, 且 $\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子。如果 α 连续, 则 α 保持覆盖。若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 上拓扑由拓扑基 $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$ 和 $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ 给定, 且 α 与纤维积可换, 则 α 保持覆盖推出 α 连续。

代数几何中常假设 $\mathcal{C}$ 上存在纤维积, 使用拓扑基: 如 Stacks Project 用保持覆盖定义连续函子。因为篇幅限制, 我们在前面没有给出拓扑基的明确定义。对于不熟悉此定义的读者, 可以跳过下面的证明内容。

证明. 设 $S \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(c)$ 。则将 S 嵌入 $\mathcal{C}^\wedge$ 中产生局部同构族

$$\{h_{\text{dom}f} \xrightarrow{f \circ -} h_c | f \in S\}$$

对 $\forall \mathfrak{G} \in \mathcal{D}^\sim$, 有 $\alpha_* \mathfrak{G} \in \mathcal{C}^\sim$ 。可得交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(h_c, \text{Res}_\alpha \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Nat}(\coprod_f h_{\text{dom}f}, \text{Res}_\alpha \mathfrak{G}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Nat}(h_{\alpha(c)}, \mathfrak{G}) & \longrightarrow & \text{Nat}(\coprod_f h_{\alpha(\text{dom}f)}, \mathfrak{G}) \end{array}$$

由此可知下方水平映射为 1-1, 即

$$\coprod_f h_{\alpha(\text{dom}f)} \rightarrow h_{\alpha(c)}$$

为局部同构, 即

$$\{\alpha(f) : \alpha(\text{dom}f) \rightarrow \alpha(c) | f \in S\} = \alpha(S)$$

生成 $\alpha(c)$ 的覆盖筛。

设 α 保持覆盖。则 $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(c)$ 被映到 $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(\alpha(c))$ 中。若任取 $\{c_i \rightarrow c\} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(c)$, 则有

$$\alpha(c_i \times_c c_j) \cong \alpha(c_i) \times_{\alpha(c)} \alpha(c_j)$$

如果 $\mathfrak{G} \in \mathcal{D}^\sim$, 要证 $\text{Res}_\alpha \mathfrak{G} \in \mathcal{C}^\sim$ 。由等化子序列

$$\mathfrak{G}(\alpha(c)) \rightarrow \prod_i \mathfrak{G}(\alpha(c_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathfrak{G}(\alpha(c_i) \times_{\alpha(c)} \alpha(c_j))$$

以及 α 保持纤维积, 可将等化子改写为

$$\text{Res}_\alpha \mathfrak{G}(c) \rightarrow \prod_i \text{Res}_\alpha \mathfrak{G}(c_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \text{Res}_\alpha \mathfrak{G}(c_i \times_c c_j)$$

于是 $\text{Res}_\alpha \mathfrak{G} \in \mathcal{C}^\sim$, 即 α 为连续。 □

5.2 上连续函子与座态射

定义 5.2.1

设 $\mathbf{D} = (\mathcal{D}, \mathcal{J}_{\mathcal{D}})$ 和 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\mathcal{C}})$ 为两个座, 且 $\beta: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 。如果对 $\forall d \in \text{Ob} \mathcal{D}$ 以及 $S \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(\beta(d))$, 存在 $R \in \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(d)$ 使得 $\beta(R) \subseteq S$, 则称 $\beta: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为上连续(cocontinuous)。

注解 5.2.2

以上定义条件相当于说

$$\{f \in \text{Mor } \mathcal{D} \mid \text{cod } f = d, \beta(f) \in S\}$$

包含 R , 是 $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(d)$ 中覆盖筛。

以下是上连续函子的等价刻画。

命题 5.2.3

设 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{C}$ 为座, 且 $\beta: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子。则以下等价:

- (1) β 为上连续;
- (2) 函子

$$\Psi^{-1}: \mathcal{C}^{\sim} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\wedge} \xrightarrow{\text{Res}_{\beta}} \mathcal{D}^{\wedge} \xrightarrow{(-)^a} \mathcal{D}^{\sim}$$

存在右伴随;

- (3) $\text{RK}_{\beta}: \mathcal{D}^{\wedge} \rightarrow \mathcal{C}^{\wedge}$ 限制为层范畴间函子 $\mathcal{D}^{\sim} \rightarrow \mathcal{C}^{\sim}$ 。

证明. (2) $\Leftrightarrow$ (3) 对 $\forall \mathfrak{F} \in \mathcal{D}^{\sim}$ 和 $\forall \mathfrak{G} \in \mathcal{C}^{\sim}$,

$$\begin{aligned} \text{Nat}(\mathfrak{F}, \text{RK}_{\beta} \mathfrak{G}) &\cong \text{Nat}(\text{Res}_{\beta} \mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \\ &\cong \text{Nat}((\text{Res}_{\beta} \mathfrak{F})^a, \mathfrak{G}) \\ &\cong \text{Nat}(\Psi^{-1} \mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (3) 设 $\mathfrak{G} \in \mathcal{D}^{\sim}$ 。要证 $\text{RK}_{\beta} \mathfrak{G} \in \mathcal{C}^{\sim}$ 。我们将论证对 $\forall c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ 及 $\forall S \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(c), S \hookrightarrow h_c$, 诱导 $\mathcal{C}^{\wedge}$ 中同构 $\text{Nat}(h_c, \text{RK}_{\beta} \mathfrak{G}) \rightarrow \text{Nat}(S, \text{RK}_{\beta} \mathfrak{G})$ 。因为上式可在 $\mathcal{D}^{\wedge}$ 中改写为 $\text{Nat}(\text{Res}_{\beta}(h_c), \mathfrak{G}) \rightarrow \text{Nat}(\text{Res}_{\beta}(S), \mathfrak{G})$, 所以为证明 $\text{Res}_{\beta}(S) \hookrightarrow \text{Res}_{\beta}(h_c)$ 是 $\mathcal{D}^{\wedge}$ 中局部同构, 只需证它是局部满。

为此, 我们证明对 $\forall d \in \text{Ob } \mathcal{D}$ 以及 $\alpha: h_d \rightarrow \text{Res}_{\beta}(h_c), \text{Res}_{\beta}(S) \times_{\text{Res}_{\beta}(h_c)} h_d \rightarrow h_d$ 为覆盖, 后者 (在同构意义下) 来自下方拉回

$$\begin{array}{ccc} \text{Res}_{\beta}(S) \times_{\text{Res}_{\beta}(h_c)} h_d & \longrightarrow & h_d \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \text{Res}_{\beta}(S) & \longrightarrow & \text{Res}_{\beta}(h_c) \end{array}$$

我们注意到 α 可分解 (因为 $h_{\beta(d)} = \text{LK}_{\beta} h_d$) 为 $\alpha: h_d \rightarrow \text{Res}_{\beta}(h_{\beta(d)}) \rightarrow \text{Res}_{\beta}(h_c)$ 。因此上图可分解为

$$\begin{array}{ccc} \text{Res}_{\beta}(S) \times_{\text{Res}_{\beta}(h_c)} h_d & \longrightarrow & h_d \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Res}_{\beta}(S) \times_{\text{Res}_{\beta}(h_c)} \text{Res}_{\beta}(h_{\beta(d)}) & \longrightarrow & \text{Res}_{\beta}(h_{\beta(d)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Res}_{\beta}(S) & \longrightarrow & \text{Res}_{\beta}(h_c) \end{array}$$

其中左上角同构于拉回

$$\mathrm{Res}_\beta(S) \times_{\mathrm{Res}_\beta(h_c)} \mathrm{Res}_\beta(h_{\beta(d)}) \times_{\mathrm{Res}_\beta(h_{\beta(d)})} h_d.$$

由上图进一步产生

$$\mathrm{Res}_\beta(S) \times_{\mathrm{Res}_\beta(h_c)} \mathrm{Res}_\beta(h_{\beta(d)}) \rightarrow \mathrm{Res}_\beta(h_{\beta(d)}),$$

以及 $\mathrm{Res}_\beta(S) \times_{\mathrm{Res}_\beta(h_c)} h_d \rightarrow h_d$ 。因为 Res_β 与极限可换, 所以 $\mathrm{Res}_\beta(S \times_{h_c} h_{\beta(d)}) \cong \mathrm{Res}_\beta(S) \times_{\mathrm{Res}_\beta(h_c)} \mathrm{Res}_\beta(h_{\beta(d)}) \rightarrow \mathrm{Res}_\beta(h_{\beta(d)})$ 来自 $S \times_{h_c} h_{\beta(d)} \rightarrow h_{\beta(d)}$ ($\mathcal{C}^\wedge$ 中态射)。但是 $S \times_{h_c} h_{\beta(d)}$ 是 $S \in \mathcal{J}_\mathcal{C}(c)$ 沿着态射 $h_{\beta(d)} \rightarrow h_c$ (相当于 $\beta(d) \rightarrow c$) 的拉回, 所以 $S \times_{h_c} h_{\beta(d)} \in \mathcal{J}_\mathcal{C}(\beta(d))$ 。于是, 由 β 是上连续可得

$$R = \{f \in \mathrm{Mor} \mathcal{D} \mid \mathrm{cod} f = d \text{ 且 } \beta(f) \in S \times_{h_c} h_{\beta(d)}\}$$

是 $\mathcal{J}_\mathcal{D}(d)$ 中的覆盖筛。直接计算可知

$$R \subset \mathrm{Res}_\beta(S) \times_{\mathrm{Res}_\beta(h_c)} h_d$$

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 $\forall \mathfrak{G} \in \mathcal{D}^\sim$ 。则 $\mathrm{RK}_\beta \mathfrak{G} \in \mathcal{C}^\sim$ 。令 $d \in \mathrm{Ob} \mathcal{D}$ 及 $S \in \mathcal{J}_\mathcal{C}(\beta(d))$ 。我们有同构

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Nat}(h_{\beta(d)}, \mathrm{RK}_\beta \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Nat}(S, \mathrm{RK}_\beta \mathfrak{G}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathrm{Nat}(\mathrm{Res}_\beta(h_{\beta(d)}), \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Nat}(\mathrm{Res}_\beta(S), \mathfrak{G}) \end{array}$$

于是 $\mathrm{Res}_\beta(S) \rightarrow \mathrm{Res}_\beta(h_{\beta(d)})$ 是 $\mathcal{D}^\wedge$ 中局部同构。对 $\forall h_d \rightarrow \mathrm{Res}_\beta h_{\beta(d)}$, 有拉回

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & h_d \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Res}_\beta(S) & \longrightarrow & \mathrm{Res}_\beta(h_{\beta(d)}) \end{array}$$

由于局部同构的拉回为局部同构, 且 $R \rightarrow h_d$ 为单, 所以 $R \in \mathcal{J}_\mathcal{D}(d)$, 满足 $\beta(R) \subseteq S$ 。于是 β 为上连续。 $\square$

注解 5.2.4

1. 上连续函子的合成仍为上连续;
2. “连续”与“上连续”有种对偶关系: 设 $\beta: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 存在左伴随 $\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 。则 α 连续当且仅当 β 上连续。实际上由 α 是 β 的左伴随, 可得 Res_α 是 Res_β 的右伴随。因此 $\mathrm{Res}_\alpha \cong \mathrm{RK}_\beta$ 。

5.3 拓扑斯态射

定义 5.3.1

设 $\mathcal{C}^\sim$ 和 $\mathcal{D}^\sim$ 为拓扑斯。拓扑斯态射

$$\Phi: \mathcal{C}^\sim \rightarrow \mathcal{D}^\sim$$

由一对伴随函子 $\Phi_* : \mathcal{C}^\sim \rightarrow \mathcal{D}^\sim$ 及其左伴随 $\Phi^{-1} : \mathcal{D}^\sim \rightarrow \mathcal{C}^\sim$ 组成, 且 Φ^{-1} 为左正合。

两个拓扑斯态射 $\mathcal{C}^\sim \rightarrow \mathcal{D}^\sim$ 和 $\mathcal{D}^\sim \rightarrow \mathcal{E}^\sim$ 可以合成一个拓扑斯态射 $\mathcal{C}^\sim \rightarrow \mathcal{E}^\sim$ 。

函子 Φ^{-1} 实际为正合。此要求使得上述定义能够包含经典层论对应构造。

注解 5.3.2

- (1) 常称 Φ_* 为正像函子, Φ^{-1} 为逆像函子。
- (2) 连续函子 $\alpha : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 自然产生一个拓扑斯态射 $\Phi : \mathcal{C}^\sim \rightarrow \mathcal{D}^\sim$, 使得 $\Phi_* = \text{Res}_\alpha$ 及 $\Phi^{-1} = \text{LK}_\alpha^a$;
- (3) 上连续函子 $\beta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 也产生一个拓扑斯态射 $\Psi : \mathcal{D}^\sim \rightarrow \mathcal{C}^\sim$, 使得 $\Psi_* = \text{RK}_\beta$ 及 $\Psi^{-1} = \text{Res}_\beta^a$;
- (4) 对于拓扑斯态射 $\Phi : \mathcal{C}^\sim \rightarrow \mathcal{D}^\sim$, 存在座 $\mathbf{E}$ 以及函子 $\mathcal{C} \xrightarrow{\beta} \mathcal{E} \xleftarrow{\alpha} \mathcal{D}$, 其中 β 为上连续而 α 为连续, 使得 Φ 为 β 和 α 产生的拓扑斯态射的合成 (参见 Stacks Project)。

综合前面的讨论, 我们陈述本讲最后一个结论。

引理 5.3.3

设 $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 既连续且上连续。则有拓扑斯态射 $\Phi : \mathcal{C}^\sim \rightarrow \mathcal{D}^\sim$, 使得

- (1) $\Phi_* = \text{RK}_\alpha$ 且 $\Phi^{-1} = \text{Res}_\alpha$;
- (2) Φ^{-1} 存在左伴随 $\Phi_! := \text{LK}_\alpha^a$;
- (3) Φ^{-1} 与极限, 余极限均可交换。

6 第六讲

对于拓扑空间的子集，存在一个自然的方式使之成为子空间。我们将此概念合理推广至座上，引入诱导拓扑概念并证明 Giraud 比较引理。在第四讲里面，我们引入了切片范畴概念，后者被看作拓扑空间“切片”（即开子空间）的代数化。借助诱导拓扑，我们将引入并阐释广义切片范畴的数学意义。更进一步将拓扑斯看作一种广义空间，我们将介绍其“切片拓扑斯”的概念并说明后者确为拓扑斯。

6.1 诱导拓扑与限制

给定拓扑空间 (Y, T_Y) 及其任意集合映射 $f: X \rightarrow Y$, T_Y 能在 X 上诱导一个自然的拓扑使得 f 连续。该连续映射提供一个函子 $f^{-1}: \mathcal{P}_Y \rightarrow \mathcal{P}_X$ ($U \mapsto f^{-1}(U), \forall U$), 以及 $\text{Res}_{f^{-1}}: \mathcal{P}_X^\wedge \rightarrow \mathcal{P}_Y^\wedge$ 。在 $\mathcal{P}_Y$ 和 $\mathcal{P}_X$ 的典范拓扑下，易见 f^{-1} 保持覆盖，为连续函子。

定义 6.1.1

设 $\mathbf{D} = (\mathcal{D}, \mathcal{J}_\mathcal{D})$ 为座， $\mathcal{C}$ 为小范畴且 $\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子。在 $\mathcal{C}$ 上存在一个最大的使 α 连续的拓扑，称之为 $\mathcal{C}$ 上由 $\mathcal{J}_\mathcal{D}$ 经 α 诱导的拓扑，简称**诱导拓扑**。

利用第二讲一个结论，考虑所有 $\mathcal{C}$ 上预层

$$\{\text{Res}_\alpha \mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \in \mathcal{D}^\sim\} \subset \mathcal{C}^\wedge.$$

则存在 $\mathcal{C}$ 上拓扑，使得所有 $\text{Res}_\alpha \mathfrak{F}$ 均为层（即 α 连续）的最大拓扑（诱导拓扑）。

现在我们刻画诱导拓扑。

命题 6.1.2

设 $\mathbf{D} = (\mathcal{D}, \mathcal{J}_\mathcal{D})$ 为座， $\mathcal{C}$ 为小范畴， $\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子且 $\mathcal{J}_\mathcal{C}$ 为诱导拓扑。对于 $\forall c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ 及其上筛 S ，以下等价：

- (1) $S \in \mathcal{J}_\mathcal{C}(c)$;
- (2) 对 $\forall c' \in \text{Ob } \mathcal{C}$ 及 $f: c' \rightarrow c$ ，以下态射 $\text{LK}_\alpha(S \times_{h_c} h_{c'}) \rightarrow \text{LK}_\alpha(h_{c'})$ 为局部同构。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) 由拓扑公理可知拉回

$$S \times_{h_c} h_{c'} \rightarrow h_{c'}$$

为 c' 上覆盖筛。于是由 α 的连续性

$$\text{LK}_\alpha(S \times_{h_c} h_{c'}) \rightarrow \text{LK}_\alpha(h_{c'})$$

为局部同构。

(2) $\Rightarrow$ (1) 对 $\forall \mathfrak{G} \in \mathcal{D}^\sim$ ，有交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(\text{LK}_\alpha(h_{c'}), \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Nat}(\text{LK}_\alpha(S \times_{h_c} h_{c'}), \mathfrak{G}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Nat}(h_{c'}, \text{Res}_\alpha \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Nat}(S \times_{h_c} h_{c'}, \text{Res}_\alpha \mathfrak{G}) \end{array}$$

由 $\text{Res}_\alpha \mathfrak{G}$ 为层及诱导拓扑的最大性，可知 $S \in \mathcal{J}_\mathcal{C}(c)$ 。 □

注解 6.1.3

1. 若 $\mathbf{D} = (\mathcal{D}, \mathcal{J}_{\mathcal{D}})$ 为座, 且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ 为满子范畴 (记 $\iota: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$), 则对 $\forall c \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 以及任意 $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\wedge$, 总有

$$\text{LK}_\iota(\mathfrak{F})(c) = \mathfrak{F}(c)$$

因此

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(c) \\ &= \{S \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c) \mid S \in \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(c)\} \end{aligned}$$

2. 令 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\mathcal{C}})$ 为座。从第四讲可知, $\mathcal{C}$ 上拓扑可以延拓到 $\mathcal{C}^\wedge$ 上。考虑 $\mathcal{C}^\wedge$ 上这个拓扑。它在满子范畴 $\mathcal{C}$ 上诱导的拓扑恰为 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ 。

现在我们能够陈述和证明 Giraud 比较引理。

定理 6.1.4

设 $\mathcal{C}$ 为小范畴, $\mathbf{D}$ 为座且 $\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为忠实满函子, 在 $\mathcal{C}$ 上诱导拓扑。假定 $\mathcal{D}$ 中任一对象 c 都存在 $S \in \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(c)$, 且 S 由起点在 $\alpha(\mathcal{C})$ 中的态射生成。则限制函子

$$\text{Res}_\alpha: \mathcal{D}^\sim \rightarrow \mathcal{C}^\sim$$

为范畴等价。

证明. 不妨设 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{D}$ 的满子范畴, 而 $\alpha = \iota$ 为嵌入。我们证明 Res_ι 为忠实满 (fully faithful) 且本质满 (essentially surjective)。

1. 对 $\forall \mathfrak{G} \in \mathcal{D}^\wedge$, 我们证明余单位

$$\varepsilon_{\mathfrak{G}}: \text{LK}_\iota \text{Res}_\iota(\mathfrak{G}) \rightarrow \mathfrak{G}$$

为局部同构且 $\text{Res}_\iota: \mathcal{D}^\sim \rightarrow \mathcal{C}^\sim$ 为忠实满。对 $\forall c \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 考虑态射 $f: h_c \rightarrow \mathfrak{G}$ 。它可以唯一分解为

$$h_c \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}} \text{LK}_\iota \text{Res}_\iota(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathfrak{G}}} \mathfrak{G}$$

令 $f_1, f_2: h_d \rightrightarrows \text{Res}_\iota(\mathfrak{G})$ 为两个态射, 满足 $\varepsilon_{\mathfrak{G}} f_1 = \varepsilon_{\mathfrak{G}} f_2$ 。对 $\forall f': h_c \rightarrow h_d$, 有 $\varepsilon_{\mathfrak{G}} f_1 f' = \varepsilon_{\mathfrak{G}} f_2 f'$ 。由 $\varepsilon_{\mathfrak{G}}$ 的性质, 可知 $f_1 f' = f_2 f'$ 。由条件, 所有可能的 f' 生成 d 上一个覆盖筛。因此 $\text{Ker}(f_1, f_2) \in \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(d)$ 。根据局部同构的等价刻画, 可得 $\varepsilon_{\mathfrak{G}}$ 为局部同构, 即 $\varepsilon_{\mathfrak{G}}^a$ 为同构。因此在 $\mathcal{D}^\sim$ 上, $\text{LK}_\iota \text{Res}_\iota \cong \text{Id}$, 即 Res_ι 是忠实满。

2. 下证 Res_ι 为本质满: 条件保证了 $\iota: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ 为上连续。在此情况下, 有函子 $\text{RK}_\iota: \mathcal{C}^\sim \rightarrow \mathcal{D}^\sim$ 。于是根据 Kan 扩张的基本性质, 对于

$$\text{Res}_\iota \text{RK}_\iota(\mathfrak{F}) \cong \mathfrak{F}, \forall \mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\sim$$

以上说明 Res_ι 为本质满。

□

6.2 广义切片范畴

前面我们定义了切片范畴。更一般地，设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\mathcal{C}})$ 为座且 $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^{\wedge}$ 。考虑嵌入 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\wedge}$ ，我们能构造“广义切片范畴” $\mathcal{C}/\mathfrak{F}$ ($\mathcal{C}$ 在 $\mathfrak{F}$ 的局部化) 如下：

1. 对象： $\{(c, f) \mid c \in \text{Ob}\mathcal{C}, f: h_c \rightarrow \mathfrak{F}\}$
2. 态射： $(c', f') \xrightarrow{g} (c, f)$ 为 $\mathcal{C}^{\wedge}$ 中态射，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} h_{c'} & \xrightarrow{g} & h_c \\ & \searrow f' & \swarrow f \\ & \mathfrak{F} & \end{array}$$

其中 g 可看作 $\mathcal{C}$ 中态射 $g: c' \rightarrow c$ 。

以上构造产生自然函子

$$j_{\mathfrak{F}}: \mathcal{C}/\mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C},$$

使得 $j_{\mathfrak{F}}((c, f)) = c$ 且 $j_{\mathfrak{F}}(g) = g$ 。

根据前述讨论， $\mathcal{C}$ 上拓扑在 $\mathcal{C}/\mathfrak{F}$ 诱导一个拓扑，使得 $j_{\mathfrak{F}}$ 连续。由此产生函子

$$\text{Res}_{j_{\mathfrak{F}}}: \mathcal{C}^{\sim} \rightarrow (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^{\sim}$$

以及

$$\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}: (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^{\wedge} \rightarrow \mathcal{C}^{\wedge}$$

和

$$\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}^a: (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^{\sim} \rightarrow \mathcal{C}^{\sim}$$

为便于讨论，我们回顾此特殊情况下的 Kan 扩张的具体表达式。

注解 6.2.1

1. 对 $\forall \mathfrak{G} \in (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^{\wedge}$ 及 $c \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 。

$$\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G})(c) \cong \coprod_{f: h_c \rightarrow \mathfrak{F}} \mathfrak{G}(c, f)$$

若 $S \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}}(c', f')$ ，则 $\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(S)(c) = \coprod_{f: h_c \rightarrow \mathfrak{F}} S(c, f)$

2. 由此可推出， $\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}$ 与纤维积可换，从而保持单态射。（回顾： $\alpha: X \rightarrow Y$ 为单态射，相当于 $\delta: X \rightarrow X \times_Y X$ 为同构。）

广义切片范畴具有良好的函子性，其上的诱导拓扑便于刻画。

命题 6.2.2

设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\mathcal{C}})$ 为座， $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^{\wedge}$ 。则

1. 对于 $(c, f) \in \text{Ob}(\mathcal{C}/\mathfrak{F})$ 及其上的筛 R ， $R \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}}(c, f)$ 当且仅当 $\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} R \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(c)$ ；
2. $j_{\mathfrak{F}}$ 为连续和上连续；

3. 令 $\Psi: \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F}$ 为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中态射, $\tilde{\Psi}: \mathcal{C}/\mathfrak{F}' \rightarrow \mathcal{C}/\mathfrak{F}$ 是它诱导的函子。存在交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}/\mathfrak{F}' & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \mathcal{C}/\mathfrak{F} \\ & \searrow j_{\mathfrak{F}'} & \swarrow j_{\mathfrak{F}} \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

而 $j_{\mathfrak{F}'}$ 与 $\tilde{\Psi}$ 诱导的拓扑一致。

证明. 1. 若 $R \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}}(c, f)$, 则由 $j_{\mathfrak{F}}$ 的连续性可知 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} R \rightarrow \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} h_{(c, f)}$ 为局部同构。再由 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}$ 保持单态射可知 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} R$ 为 c 上覆盖筛。反之, 设 R 为 $(c, f) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}/\mathfrak{F})$ 上的筛, 且 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} R \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(c)$ 。对 $\forall g: c' \rightarrow c$ 可得 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} R \times_{h_c} h_{c'} \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(c')$ 。又因为 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}$ 与纤维积可换, 所以

$$\begin{aligned} & \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} R \times_{h_c} h_{c'} \\ & \cong \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} R \times_{\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} h_{(c, f)}} \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} h_{(c', fg)} \\ & \cong \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} (R \times_{h_{(c, f)}} h_{(c', fg)}). \end{aligned}$$

这说明

$$\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} (R \times_{h_{(c, f)}} h_{(c', fg)}) \rightarrow \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} h_{(c', fg)}$$

为局部同构。由诱导拓扑的性质可知

$$R \times_{h_{(c, f)}} h_{(c', fg)} \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}}(c', fg)$$

再从拓扑的公理可知 $R \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}}(c, f)$ 。

2. 由连续和上连续的定义与刻画。

3. 由 1 以及诱导拓扑的性质, 加上 $j_{\mathfrak{F}} \circ \tilde{\Psi} = j_{\mathfrak{F}'}$ 推出 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}} \circ \mathrm{LK}_{\tilde{\Psi}} \cong \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}'}}$ 。

□

以下结论说明预层拓扑斯在 $\mathfrak{F}$ 上的局部化 $(\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge$ 仍然是一个预层拓扑斯。

命题 6.2.3

令 $j_{\mathfrak{F}}: \mathcal{C}/\mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 如上, 则

1. 函子 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}: (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$ 分解为

$$(\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge \xrightarrow{e_{\mathfrak{F}}} \mathcal{C}^\wedge/\mathfrak{F} \xrightarrow{j_{\mathfrak{F}}^\wedge} \mathcal{C}^\wedge$$

且 $e_{\mathfrak{F}}$ 为范畴等价。

2. 函子 $e_{\mathfrak{F}} \circ \mathrm{Res}_{j_{\mathfrak{F}}}$

$$\mathcal{C}^\wedge \xrightarrow{\mathrm{Res}_{j_{\mathfrak{F}}}} (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge \xrightarrow{e_{\mathfrak{F}}} \mathcal{C}^\wedge/\mathfrak{F}$$

同构于函子 $\pi: \mathcal{C}^\wedge \rightarrow \mathcal{C}^\wedge/\mathfrak{F}$, 将 $\forall \mathfrak{G} \in \mathcal{C}^\wedge$ 映到 $(\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}, pr) \in \mathcal{C}^\wedge/\mathfrak{F}$ 。

证明. 对于第一点, 对 $(\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge$ 的终对象 $\mathfrak{F}_\bullet$, 可计算得

$$\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{F}_\bullet)(c) \cong \coprod_{h_c \xrightarrow{f} \mathfrak{F}} \mathfrak{F}(h_c, f) \cong \mathfrak{F}(c),$$

$\forall c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ 。于是 $\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{F}^\bullet) \cong \mathfrak{F}$ 。因此 $(\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$ 分解为

$$(\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge \rightarrow \mathcal{C}^\wedge/\mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C}^\wedge.$$

具体而言，对 $\tilde{\mathfrak{G}} \in (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge$ ，定义 $e_{\mathfrak{F}}(\tilde{\mathfrak{G}})$ 如下。令 $\mathfrak{G} \in \mathcal{C}^\wedge$ ，使之对 $\forall c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ，有

$$\begin{aligned} & \mathfrak{G}(c) \\ &= \text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\tilde{\mathfrak{G}})(c) \\ &= \{(x, f) \mid f \in \mathfrak{F}(c), x \in \tilde{\mathfrak{G}}(c, f)\}. \end{aligned}$$

它到 $\mathfrak{F}$ 存在自然变换 $\psi: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{F}$ 使得 $\psi_c: \mathfrak{G}(c) \rightarrow \mathfrak{F}(c)$ 为投影， $\forall c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ 。取 $e_{\mathfrak{F}}(\tilde{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{G}, \psi) \in \mathcal{C}^\wedge/\mathfrak{F}$ 。

反之，任取 $(\mathfrak{G}, \psi) \in \mathcal{C}^\wedge/\mathfrak{F}$ ，可构造 $\tilde{\mathfrak{G}} \in (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge$ ，使得对 $\forall(c, f) \in \mathcal{C}/\mathfrak{F}$ （即 $f \in \mathfrak{F}(c)$ ），

$$\tilde{\mathfrak{G}}(c, f) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge/\mathfrak{F}}((h_c, f), (\mathfrak{G}, \psi))$$

为 $pt \xrightarrow{f} \mathfrak{F}(c) \xleftarrow{\psi_c} \mathfrak{G}(c)$ 的拉回。

直接计算表明以上两种构造互逆，于是 $e_{\mathfrak{F}}$ 为等价。

对于第二点，我们注意到 $e_{\mathfrak{F}} \circ \text{Res}_{j_{\mathfrak{F}}}$ 是 $\mathcal{C}^\wedge/\mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$ 的右伴随。由于 π 也是右伴随，所以两个函子同构。□

6.3 切片拓扑斯

由于拓扑斯是比座更为本质的数学构造，所以关于广义切片范畴及其上拓扑斯的讨论，自然衍生出对“拓扑斯切片”的研究。设 $\mathbf{C}$ 是一个座且 $\mathfrak{F} \in \mathbf{C}^\wedge$ 。我们进一步说明“拓扑斯的切片” $\mathbf{C}^\sim/\mathfrak{F}^a$ 仍为拓扑斯。

由 $j_{\mathfrak{F}}: \mathcal{C}/\mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 的性质，可产生三个函子：

$$\begin{array}{ccc} & j_{\mathfrak{F}}^! & \\ \mathcal{C}^\sim & \xleftarrow{j_{\mathfrak{F}}^{-1}} \mathcal{C}/\mathfrak{F}^\sim & \xrightarrow{j_{\mathfrak{F}}^*} \mathcal{C}^\sim \end{array}$$

其中 $j_{\mathfrak{F}}^{-1}: \mathcal{C}^\sim \rightarrow (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\sim$ 称为**限制函子**， $j_{\mathfrak{F}*}: (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\sim \rightarrow \mathcal{C}^\sim$ 称为**正像函子**， $j_{\mathfrak{F}}^!: (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\sim \rightarrow \mathcal{C}^\sim$ 称为**空集延拓** (extension by the empty set)。当 $\mathcal{C} = \mathcal{P}_X$ 赋予典范拓扑，若 $\mathfrak{F} = h_U$ (U 为开子集)，则上图左边还能补上 $\mathcal{P}_U$ 和类似的三个函子。

引理 6.3.1

设 $\mathbf{C}$ 为座且 $\mathfrak{F} \in \mathbf{C}^\wedge$ 。令 $\mathfrak{G} \in (\mathcal{C}/\mathfrak{F})^\wedge$ 。则 $j_{\mathfrak{F}}^!(\mathfrak{G}^a) \cong \text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G})^a$ 。

证明。设 $\mathfrak{H} \in \mathbf{C}^\wedge$ 。由

$$\begin{aligned} & \text{Nat}(j_{\mathfrak{F}}^!(\mathfrak{G}^a), \mathfrak{H}) \\ & \cong \text{Nat}(\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G}^a), \mathfrak{H}) \\ & \cong \text{Nat}(\mathfrak{G}^a, \text{Res}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{H})) \\ & \cong \text{Nat}(\mathfrak{G}, \text{Res}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{H})) \\ & \cong \text{Nat}(\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G}), \mathfrak{H}) \\ & \cong \text{Nat}(\text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G})^a, \mathfrak{H}), \end{aligned}$$

可知 $j_{\mathfrak{F}}^!(\mathfrak{G}^a) \cong \text{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G})^a$ 。□

注解 6.3.2

1. 以上公式说明, 对 $\forall \mathfrak{G} \in (C/\mathfrak{F})^\sim$, $j_{\mathfrak{F}}!(\mathfrak{G})$ 是 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G})$ 的层化。由于前面给出了 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G})$ 的计算公式, 所以它表明了 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G})$ 的可计算性。
2. 若 $\mathfrak{F} = h_c$, 则记 $j_{\mathfrak{F}}$ 为 j_c 。对于 $\forall (c', f') \in \mathrm{Ob}(C/h_c)$, $j_{c!}[h_{(c', f')}^a] \cong h_{c'}^a$ 。

定理 6.3.3

设 $\mathbf{C}$ 为座且 $\mathfrak{F} \in C^\wedge$ 。则

1. 函子 $j_{\mathfrak{F}}! : (C/\mathfrak{F})^\sim \rightarrow C^\sim$ 分解为 $(C/\mathfrak{F})^\sim \xrightarrow{e_{\mathfrak{F}}^a} C^\sim/\mathfrak{F}^a \rightarrow C^\sim$, 且 $e_{\mathfrak{F}}^a$ 为范畴等价。
2. 函子 $C^\sim \rightarrow (C/\mathfrak{F})^\sim \rightarrow C^\sim/\mathfrak{F}^a$ 同构于 $\mathfrak{F}' \mapsto (\mathfrak{F}' \times \mathfrak{F}^a, pr)$, $\forall \mathfrak{F}' \in C^\sim$ 。

证明. 我们已经构造了 $e_{\mathfrak{F}} : (C/\mathfrak{F})^\wedge \rightarrow C^\wedge/\mathfrak{F}$ 。由定义, $C^\sim/\mathfrak{F}$ 是 $C^\wedge/\mathfrak{F}$ 的满子范畴, 且存在 $C/\mathfrak{F} \rightarrow C/\mathfrak{F}^a$ 和

$$\begin{array}{ccc} (C/\mathfrak{F})^\wedge & \xrightarrow{\mathrm{LK}_{\eta_{\mathfrak{F}}}} & (C/\mathfrak{F}^a)^\wedge \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ C^\wedge/\mathfrak{F} & \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{F}}} & C^\wedge/\mathfrak{F}^a \end{array}$$

对于第一点, 记 $\mathfrak{G}_\bullet$ 为 $(C/\mathfrak{F})^\sim$ 终对象。对 $\forall \tilde{\mathfrak{G}} \in (C/\mathfrak{F})^\wedge$, 存在自然态射

$$\theta_{\tilde{\mathfrak{G}}} : \tilde{\mathfrak{G}} \xrightarrow{\eta_{\tilde{\mathfrak{G}}}} \tilde{\mathfrak{G}}^a \rightarrow \mathfrak{G}_\bullet$$

令函子 $e_{\mathfrak{F}}^a : (C/\mathfrak{F})^\wedge \rightarrow C^\sim/\mathfrak{F}^a$ 将它映到

$$\Theta_{\tilde{\mathfrak{G}}} = \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\theta_{\tilde{\mathfrak{G}}}) : \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\tilde{\mathfrak{G}})^a \rightarrow \mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{G}_\bullet)^a \cong \mathfrak{F}^a,$$

即 $e_{\mathfrak{F}}^a(\tilde{\mathfrak{G}}) = (\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}(\tilde{\mathfrak{G}})^a, \Theta_{\tilde{\mathfrak{G}}}) \in C^\sim/\mathfrak{F}^a$ 。由引理可知 $e_{\mathfrak{F}}^a(\tilde{\mathfrak{G}}^a) = e_{\mathfrak{F}}^a(\tilde{\mathfrak{G}})$ 。

反之, 对 $\forall (\mathfrak{G}, \varphi) \in C^\sim/\mathfrak{F}^a$ 考虑拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}' & \longrightarrow & \mathfrak{G} \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathfrak{F} & \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{F}}} & \mathfrak{F}^a \end{array}$$

构造函数子 $C^\sim/\mathfrak{F}^a \xrightarrow{(e_{\mathfrak{F}}^a)^{-1}} (C/\mathfrak{F})^\sim$ 使得

$$(e_{\mathfrak{F}}^a)^{-1}(\mathfrak{G}, \varphi) := [(e_{\mathfrak{F}})^{-1}(\mathfrak{G}', \varphi')]^a.$$

借助以下事实, 可以验证上述两个构造互逆:

- (a) 由层化保持拉回, 有 $\mathfrak{G}'^a \cong \mathfrak{G}$;
- (b) $[(e_{\mathfrak{F}})^{-1}(\mathfrak{G}', \varphi')](c, f) = \mathrm{Nat}((h_c, f), (\mathfrak{G}', \varphi'))$ 可由拉回描述

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Nat}((h_c, f), (\mathfrak{G}', \varphi')) & \longrightarrow & \mathfrak{G}'(c) \\ \downarrow & & \downarrow \varphi'_c \\ pt & \xrightarrow{pt \mapsto f} & \mathfrak{F}(c) \end{array}$$

且 $\mathrm{LK}_{j_{\mathfrak{F}}}$ 保持拉回。

第二点显然。 □

以上说明拓扑斯的切片仍为拓扑斯。对 $\forall c \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $\mathcal{C}/c \cong \mathcal{C}/h_c$ 且 $(\mathcal{C}/c)^\sim \simeq \mathcal{C}^\sim/h_c^a$ 。

注解 6.3.4

将拓扑斯基本理论介绍完后，下一讲我们将讨论这类广义空间上的（整体和局部）代数结构。

7 第七讲

这部分内容主要是陈述性，便于我们讨论同调代数。

7.1 阿贝尔层

为定义阿贝尔层，我们简要回顾阿贝尔群的一种形式化定义：一个阿贝尔群 A 是一个集合，属于 Set ，带有乘法运算、逆运算及单位元，满足若干公理。令 1 为选定的单点集，即 Set 中一个终对象。这些构造和公理可以形式上表述为以下集合映射

$$\begin{array}{lll}
 \text{乘法:} & A \times A \xrightarrow{\circ} A, & (x, y) \mapsto x \circ y; \\
 \text{逆元:} & A \xrightarrow{i} A, & x \mapsto x^{-1}; \\
 \text{单位元:} & 1 \xrightarrow{e} A, & * \mapsto e; \\
 \text{交换性:} & A \times A \xrightarrow{\omega} A \times A, & (x, y) \mapsto (y, x);
 \end{array}$$

并满足一些等式（通过交换图表现；为便于表述，其中一些 A 等同于 $A \times 1$ 和 $1 \times A$ ）

(1) 乘法结合律:

$$\begin{array}{ccc}
 A \times A \times A & \xrightarrow{\text{Id} \times \circ} & A \times A \\
 \circ \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow A \\
 A \times A & \xrightarrow{\circ} & A
 \end{array}$$

(2) 单位元性质:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\text{Id} \times e} & A \times A \\
 \text{Id} \downarrow & \swarrow \circ & \downarrow A \\
 A & & A
 \end{array}
 \quad \text{以及} \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{e \times \text{Id}} & A \times A \\
 \text{Id} \downarrow & \swarrow \circ & \downarrow A \\
 A & & A
 \end{array}$$

(3) 元素可逆性:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\text{Id} \times i} & A \times A \\
 \downarrow & & \downarrow \circ \\
 1 & \xrightarrow{e} & A
 \end{array}
 \quad \text{以及} \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i \times \text{Id}} & A \times A \\
 \downarrow & & \downarrow \circ \\
 1 & \xrightarrow{e} & A
 \end{array}$$

(4) 乘法交换律:

$$\begin{array}{ccc}
 A \times A & \xrightarrow{\omega} & A \times A \\
 \searrow \circ & & \swarrow \circ \\
 & A &
 \end{array}$$

我们将上述阿贝尔群结构从 Set 移植到一般范畴 $\mathcal{E}$ 上，获得如下定义。

定义 7.1.1

设 $\mathcal{E}$ 为具有有限积（从而有终对象 1 ）的范畴。我们定义 $\mathcal{E}$ 中**阿贝尔群对象**为带有以上四种运算（四个类似形式的态射），且满足对应的四个态射交换图的对象 $A \in \text{Ob} \mathcal{E}$ 。

所有阿贝尔群对象构成子范畴 $\text{Ab}(\mathcal{E})$ （其中态射须与乘法等运算相匹配）。

我们一般记 $\text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}) = \text{Ab}(\text{Sh}(\mathbf{C}))$ 。

7.2 具有代数结构的层

这一部分内容主要借鉴 Stacks Project 的 Section 7.44。为了给出一般的具有代数结构的层，我们首先明确这里所指的一般性“代数结构”的含义。

定义 7.2.1

设 $\mathcal{A}$ 为范畴，且 $s: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ 为函子。如果它们满足以下条件，则称 $(\mathcal{A}, s)$ 为一类**代数结构**：

1. s 为忠实；
2. $\mathcal{A}$ 中具有极限，且 s 与极限可交换；
3. $\mathcal{A}$ 中有滤过余极限，且 s 与之可交换；
4. s 反映同构。

当我们将代数结构考虑进来，前面讲义很多关于拓扑斯（集合层）的基本构造仍然适用。

注解 7.2.2

设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座。记 $\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 为 $\mathcal{C}$ 上取值在 $\mathcal{A}$ 中的预层所形成的范畴（或称 $\mathbf{C}$ 上具有代数结构 $\mathcal{A}$ 的预层范畴）。则

1. $\mathfrak{F} \in \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 为层 $\Leftrightarrow s \circ \mathfrak{F} \in \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ 为层；
2. $\mathfrak{F} \in \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \Rightarrow \mathfrak{F}^a = (s \circ \mathfrak{F})^a$ ，且有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, \mathcal{A}) & \xleftarrow[\quad (-)^a \quad]{\quad \iota \quad} & \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \\ \text{\scriptsize } s \circ - \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize } s \circ - \\ \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) & \xleftarrow[\quad (-)^a \quad]{\quad \iota \quad} & \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \end{array}$$
3. 若 $\mathfrak{F} \in \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ ，则 $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}^a \Leftrightarrow \mathfrak{F}$ 为层；
4. $\mathbf{Nat}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \cong \mathbf{Nat}(\mathfrak{F}^a, \mathfrak{G})$ ，对任意 $\mathfrak{F} \in \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 和 $\mathfrak{G} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, \mathcal{A})$ 成立。

在合理设定下，拓扑斯态射也自然限制为具有代数结构的层范畴之间的函子。

命题 7.2.3

设 $(\mathcal{A}, s)$ 为一类代数结构，其中 $\mathcal{A}$ 可以是 $\mathbf{Ab}, \mathbf{Rng}, \mathbf{Mod}\text{-}R$ 之一（ R 为环。）

令 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 为座，且 $\Phi = (\Phi^{-1}, \Phi_*) : \mathbf{Sh}(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ 为拓扑斯态射。则 Φ^{-1} 和 Φ_* 限制为子范畴 $\mathbf{Sh}(\mathbf{D}, \mathcal{A})$ 和 $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, \mathcal{A})$ 间的伴随对。

证明. (概述，以 $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ 为例) 根据前面介绍，座 $\mathbf{C}$ 上阿贝尔层是一个四元组 $(\mathfrak{F}, \circ, i, e)$ ，其中

1. $\mathfrak{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$;
2. $\circ: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ 为层态射；
3. $i: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ 为层态射；
4. $e: 1 \rightarrow \mathfrak{F}$ 为层态射，

使得 $\circ$ 满足结合律和交换律， e 为 $\circ$ 的单位元， $\circ(id_{\mathfrak{F}}) = e(\mathfrak{F} \rightarrow 1): \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ 。可定义“拉回”

$$(\Phi^{-1}(\mathfrak{F}), \Phi^{-1}(\circ), \Phi^{-1}(i), \Phi^{-1}(e))$$

为 $\mathbf{Sh}(\mathbf{D}, \mathcal{A})$ 中对象。

反之，对 $\mathfrak{G} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{D}, \mathcal{A})$ ，四元组 $(\mathfrak{G}, \circ, i, e)$ 可产生

$$(\Phi_*(\mathfrak{G}), \Phi_*(\circ), \Phi_*(i), \Phi_*(e)) \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, \mathcal{A}).$$

由于

$$\begin{aligned} & \text{Nat}((\mathfrak{F}_1, \circ_1, i_1, e_1), (\mathfrak{F}_2, \circ_2, i_2, e_2)) \\ &= \{\alpha \in \text{Nat}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \mid \alpha \text{ 与 } \circ_1 \text{ 和 } \circ_2 \text{ 相匹配}\}, \end{aligned}$$

所以 Φ^{-1} 与 Φ_* 可限制到 $\text{Sh}(\mathbf{D}, \mathcal{A})$ 与 $\text{Sh}(\mathbf{C}, \mathcal{A})$ 之间, 且仍为伴随函子。 $\square$

注解 7.2.4

已知 $\text{PSh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$ 是阿贝尔范畴, 其中 $\ker^p(\alpha)$ 和 $\text{cok}^p(\alpha)$ 是“逐点定义”。我们指出 $\text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$ (即阿贝尔层范畴) 是阿贝尔范畴: 任取层态射 $\alpha: \mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2$, 其中 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$ 。由定义易证 $\ker^p(\alpha)$ 为层, 从而可令 $\ker(\alpha) = \ker^p(\alpha)$ 。然而通常 $\text{cok}^p(\alpha)$ 不属于 $\text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$, 我们令 $\text{cok}(\alpha) := (\text{cok}^p(\alpha))^a$ 。

7.3 结构层及其模

以下内容较多借鉴 Stacks Project 和 Kashiwara-Schapira 专著相关章节。

定义 7.3.1

令 $\mathfrak{R}$ 为 $\mathbf{C}$ 上环预层。则

1. 一个 $\mathfrak{R}$ -模预层 $\mathfrak{M}$ 包含一个阿贝尔层 $\mathfrak{M}$ 以及预层态射

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{M},$$

使得对 $\forall c \in \text{Ob} \mathbf{C}$,

$$\mathfrak{M}(c) \times \mathfrak{R}(c) \rightarrow \mathfrak{M}(c)$$

赋予 $\mathfrak{M}(c)$ 一个 $\mathfrak{R}(c)$ -模结构。

2. 一个 $\mathfrak{R}$ -模预层态射 $\alpha: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ 是一个阿贝尔预层态射, 满足交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} \times \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M} \\ \alpha \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathfrak{N} \times \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{N} \end{array}$$

上述态射构成的集合记作 $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, 而相应的 $\mathfrak{R}$ -模预层范畴记作 $\text{PSh}\text{-}\mathfrak{R}$ 。

当 $\mathbf{C}$ 为单点集时, 其上的环预层退化为一般的环, 且模预层退化为一般的模。

若 $\mathfrak{R}_1 \rightarrow \mathfrak{R}_2$ 为 $\mathbf{C}$ 上环预层态射且 $\mathfrak{M} \in \text{PSh}\text{-}\mathfrak{R}_2$, 则

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{R}_1 \rightarrow \mathfrak{M} \times \mathfrak{R}_2 \rightarrow \mathfrak{M}$$

赋予 $\mathfrak{M}$ 一个 $\mathfrak{R}_1$ -模预层结构, 产生限制函子 $\text{PSh}\text{-}\mathfrak{R}_2 \rightarrow \text{PSh}\text{-}\mathfrak{R}_1$ 。

反之, 若 $\mathfrak{N} \in \text{PSh}\text{-}\mathfrak{R}_1$, 可构造 $\mathfrak{N} \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}_1} \mathfrak{R}_2 \in \text{PSh}\text{-}\mathfrak{R}_2$ 使得, $\forall c \in \text{Ob} \mathbf{C}$,

$$(\mathfrak{N} \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}_1} \mathfrak{R}_2)(c) = \mathfrak{N}(c) \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}_1(c)} \mathfrak{R}_2(c),$$

其中 $\hat{\otimes}$ 是预层张量积 (逐点张量)。这产生一个“基底变换”: $\text{PSh}\text{-}\mathfrak{R}_1 \rightarrow \text{PSh}\text{-}\mathfrak{R}_2$ 。后者是前者的左伴随函子。

定义 7.3.2

设 $\mathbf{C}$ 为座且 $\mathfrak{R}$ 为 $\mathbf{C}$ 上环层 (取值在 $\mathbf{Rng}$ 中的层)。称 $(\mathbf{C}, \mathfrak{R})$ 为赋环座 (ringed site), 而 $\mathfrak{R}$ 叫做结构层 (structure sheaf)。

我们进一步定义结构层的模。

定义 7.3.3

设 $\mathbf{C}$ 为座, 且 $\mathfrak{R}$ 为 $\mathbf{C}$ 上环层。则

1. 一个 $\mathfrak{R}$ -模层 $\mathfrak{M}$ 是一个阿贝尔层, 具有 $\mathfrak{R}$ -模预层结构。
2. $\mathfrak{R}$ -模层态射为对应的 $\mathfrak{R}$ -模预层态射。记 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 为两个模层之间的态射集, 而相应的 $\mathfrak{R}$ -模层范畴记为 $\mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}$ 。

我们习惯上简称 $\mathfrak{R}$ -模层为“ $\mathfrak{R}$ -模”。模范畴 $\mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}$ 是阿贝尔范畴, 具有足够多的入射对象, 且遗忘函子 $\mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R} \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$ 为正合。

引理 7.3.4

设 $\mathbf{C}$ 为座, 且 $\mathfrak{R}$ 为 $\mathbf{C}$ 上环预层, $\mathfrak{M} \in \mathrm{PSh}\text{-}\mathfrak{R}$ 。则存在唯一态射 $\mathfrak{M}^a \times \mathfrak{R}^a \rightarrow \mathfrak{M}^a$, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} \times \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M} \\ \eta^{\mathfrak{M}} \times \eta^{\mathfrak{R}} \downarrow & & \downarrow \eta^{\mathfrak{M}} \\ \mathfrak{M}^a \times \mathfrak{R}^a & \longrightarrow & \mathfrak{M}^a \end{array}$$

若 $\mathfrak{N} \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}^a$, 则任意 $\mathfrak{R}$ -模预层态射 $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ 唯一分解为 $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}^a \rightarrow \mathfrak{N}$ 。

注解 7.3.5

1. $\forall \mathfrak{R}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ 如上,

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}^a}(\mathfrak{M}^a, \mathfrak{N}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

2. $\forall \mathfrak{R}$ 如上,

$$(-)^a : \mathrm{PSh}\text{-}\mathfrak{R} \rightarrow \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}^a$$

为正合。

3. 设 $\mathfrak{R}_1 \rightarrow \mathfrak{R}_2$ 为环层态射, 则有**限制**

$$\mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_2 \rightarrow \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_1$$

和**基底变换**

$$\mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_1 \rightarrow \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_2$$

后者由

$$\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{R}_1} \mathfrak{R}_2 := (\mathfrak{N} \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}_1} \mathfrak{R}_2)^a$$

定义，是前者的左伴随。

7.4 赋环拓扑斯及其模

赋环拓扑斯来自赋环座，可以看作赋环空间（ringed space）的推广。

定义 7.4.1

设 $\mathbf{C}$ 为座且 $\mathfrak{A}$ 为其上环层。称 $(\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{A})$ 为一个**赋环拓扑斯** (ringed topos)，而 $\mathfrak{A}$ 叫做其**结构层**。

若 $(\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{A}_{\mathbf{C}})$ 和 $(\mathrm{Sh}(\mathbf{D}), \mathfrak{A}_{\mathbf{D}})$ 为两个赋环拓扑斯，则**赋环拓扑斯态射**

$$(\Phi, \Phi^{\sharp}) : (\mathrm{Sh}(\mathbf{D}), \mathfrak{A}_{\mathbf{D}}) \rightarrow (\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{A}_{\mathbf{C}})$$

由拓扑斯态射

$$\Phi = (\Phi^{-1}, \Phi_*) : \mathrm{Sh}(\mathbf{D}) \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{C})$$

以及环层态射 $\Phi^{\sharp} : \Phi^{-1}(\mathfrak{A}_{\mathbf{C}}) \rightarrow \mathfrak{A}_{\mathbf{D}}$ 共同构成。

需要注意的是，基于伴随关系，上述 $\Phi^{\sharp}$ 相当于一个环层态射 $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}} \rightarrow \Phi_*(\mathfrak{A}_{\mathbf{D}})$ 。为利用赋环拓扑斯的切片拓扑斯探讨模的局部有限性概念，我们逐步引入各种相关概念，并列举相关性质。

引理 7.4.2

设 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 为座，

$$\Phi = (\Phi^{-1}, \Phi_*) : \mathrm{Sh}(\mathbf{D}) \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{C})$$

为拓扑斯态射。令 $\mathfrak{A}_{\mathbf{D}}$ 为 $\mathbf{D}$ 上环层，且 $\mathfrak{N} \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{A}_{\mathbf{D}}$ ，存在自然态射

$$\Phi_*(\mathfrak{N}) \times \Phi_*(\mathfrak{A}_{\mathbf{D}}) \rightarrow \Phi_*(\mathfrak{N}),$$

使得 $\Phi_*(\mathfrak{N}) \in \mathrm{Mod}\text{-}\Phi_*(\mathfrak{A}_{\mathbf{D}})$ 。

令 $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}}$ 为 $\mathbf{C}$ 上环层，且 $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{A}_{\mathbf{C}}$ 。存在自然态射

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{M}) \times \Phi^{-1}(\mathfrak{A}_{\mathbf{C}}) \rightarrow \Phi^{-1}(\mathfrak{M}),$$

使得 $\Phi^{-1}(\mathfrak{M}) \in \mathrm{Mod}\text{-}\Phi^{-1}(\mathfrak{A}_{\mathbf{C}})$ 。

此时，对 $\forall \mathfrak{L} \in \mathrm{Mod}\text{-}\Phi_*(\mathfrak{A}_{\mathbf{D}})$ 有

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_{\mathbf{D}}}(\Phi^{-1}(\mathfrak{L}) \otimes_{\Phi^{-1}\Phi_*(\mathfrak{A}_{\mathbf{D}})} \mathfrak{A}_{\mathbf{D}}, \mathfrak{N}) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\Phi_*(\mathfrak{A}_{\mathbf{D}})}(\mathfrak{L}, \Phi_*(\mathfrak{N})). \end{aligned}$$

另有

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\Phi^{-1}(\mathfrak{A}_{\mathbf{C}})}(\Phi^{-1}(\mathfrak{M}), \mathfrak{L}') \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_{\mathbf{C}}}(\mathfrak{M}, \Phi_*(\mathfrak{L}')), \end{aligned}$$

$\forall \mathfrak{L}' \in \mathrm{Mod}\text{-}\Phi^{-1}(\mathfrak{A}_{\mathbf{C}})$ 。

赋环拓扑斯态射产生模范畴之间的一对伴随函子。

定义 7.4.3

设 $(\Phi, \Phi^\sharp) : (\mathrm{Sh}(\mathbf{D}), \mathfrak{R}_{\mathbf{D}}) \rightarrow (\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{R}_{\mathbf{C}})$ 为赋环拓扑斯态射

1. 设 $\mathfrak{N} \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_{\mathbf{D}}$, 则 $\mathfrak{N}$ 的**前推** (push-forward) 包含阿贝尔层 $\Phi_*(\mathfrak{N})$ 及结构态射

$$\begin{array}{ccc} \Phi_*(\mathfrak{N}) \times \mathfrak{R}_{\mathbf{C}} & \longrightarrow & \Phi_*(\mathfrak{N}) \times \Phi_*(\mathfrak{R}_{\mathbf{D}}) \\ & & \downarrow \\ & & \Phi_*(\mathfrak{N}), \end{array}$$

并由此产生函子

$$\Phi_* : \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_{\mathbf{D}} \rightarrow \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_{\mathbf{C}}.$$

2. 设 $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_{\mathbf{C}}$. 则 $\mathfrak{M}$ 的**拉回** $\Phi^*(\mathfrak{M})$ 定义为

$$\Phi^*(\mathfrak{M}) := \Phi^{-1}(\mathfrak{M}) \otimes_{\Phi^{-1}(\mathfrak{R}_{\mathbf{C}})} \mathfrak{R}_{\mathbf{D}},$$

并由此产生函子

$$\Phi^* : \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_{\mathbf{D}}.$$

注解 7.4.4

1. 存在同构 (伴随关系)

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}_{\mathbf{D}}}(\Phi^*(\mathfrak{M}), \mathfrak{N}) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}_{\mathbf{C}}}(\mathfrak{M}, \Phi_*(\mathfrak{N})). \end{aligned}$$

2. $(\Phi \circ \Psi)_* \cong \Phi_* \circ \Psi_*$ 且 $(\Phi \circ \Psi)^* \cong \Psi^* \circ \Phi^*$.
3. Φ^* 为右正合, 而 Φ_* 为左正合。

我们现在考虑赋环拓扑斯的局部化。

引理 7.4.5

令 $(\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{R})$ 为赋环拓扑斯, 且 $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}(\mathbf{C})$. 对 $\forall \mathfrak{G} \in \mathrm{Sh}(\mathbf{C})$, 构造 $\mathfrak{G}$ 的限制

$$\mathfrak{G}|_{\mathfrak{F}} := (\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}, pr) \in \mathrm{Sh}(\mathbf{C})/\mathfrak{F}$$

则 $(\mathrm{Sh}(\mathbf{C})/\mathfrak{F}, \mathfrak{R}|_{\mathfrak{F}})$ 为赋环拓扑斯, 并有典范赋环拓扑斯态射

$$(j_{\mathfrak{F}}, j_{\mathfrak{F}}^\sharp) : (\mathrm{Sh}(\mathbf{C})/\mathfrak{F}, \mathfrak{R}|_{\mathfrak{F}}) \rightarrow (\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{R}),$$

使得

1. $j_{\mathfrak{F}}^{-1}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}|_{\mathfrak{F}}, \forall \mathfrak{G} \in \mathrm{Sh}(\mathbf{C});$

2. $j_{\mathfrak{F}}^*(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}|_{\mathfrak{F}}, \forall \mathfrak{M} \in \text{Mod-}\mathfrak{A}$;
3. $j_{\mathfrak{F}!}(\mathfrak{G}, \psi) = \mathfrak{G}, \forall (\mathfrak{G}, \psi) \in \text{Sh}(\mathbf{C})/\mathfrak{F}$;
4. $j_{\mathfrak{F}!}(\mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{M}, \forall (\mathfrak{M}, \varphi) \in \text{Mod-}\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$.

证明. 在前几讲中, 已知 $j_{\mathfrak{F}} : \mathcal{C}/\mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 为连续且上连续, 诱导产生拓扑斯态射

$$j_{\mathfrak{F}} = (j_{\mathfrak{F}}^{-1}, j_{\mathfrak{F}*}) : \text{Sh}(\mathbf{C})/\mathfrak{F} \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}),$$

其中 $j_{\mathfrak{F}}^{-1}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}_{\mathfrak{F}}$ 且其左伴随为 $j_{\mathfrak{F}!}$. □

限制 $\mathfrak{M}|_{\mathfrak{F}}$ 有时也简写为 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$.

定义 7.4.6

称以上 $(\text{Sh}(\mathbf{C})/\mathfrak{F}, \mathfrak{A}|_{\mathfrak{F}})$ 为赋环拓扑斯 $(\text{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{A})$ 在 $\mathfrak{F}$ 上的**局部化**, 而 $(j_{\mathfrak{F}}, j_{\mathfrak{F}}^{\#})$ 为**局部化态射**.

注解 7.4.7

当 $\mathfrak{F} = h_c^a, \forall c \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 有 $\text{Sh}(\mathbf{C})/h_c^a \simeq \text{Sh}(\mathbf{C}/c)$. 此时记相应的局部化态射简记为

$$j_c : (\text{Sh}(\mathbf{C}/c), \mathfrak{A}|_c) \rightarrow (\text{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{A}).$$

若 $\mathfrak{M} \in \text{Mod-}\mathfrak{A}$, 则记

$$\mathfrak{M}|_c := \mathfrak{M}|_{h_c^a} = j_c^*(\mathfrak{M}).$$

若 $\mathfrak{N} \in \text{Mod-}\mathfrak{A}|_c$, 则 $j_{c!}(\mathfrak{N})$ 是以下预层的层化:

$$d \mapsto \bigoplus_{\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(d, c)} \mathfrak{N}(d, \alpha), \forall d \in \text{Ob}\mathcal{C}.$$

7.5 张量与内态射

这一节中, 我们假设 $\mathfrak{A}$ 是交换环预层. 对于 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \text{PSh-}\mathfrak{A}$, 我们定义 $\mathfrak{M} \hat{\otimes}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{N} \in \text{PSh-}\mathfrak{A}$ 以及 $\mathfrak{H}\text{om}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \in \text{PSh-}\mathfrak{A}$ 使得, 对 $\forall c \in \text{Ob}\mathcal{C}$,

$$(\mathfrak{M} \hat{\otimes}_{\mathfrak{A}} \mathfrak{N})(c) := \mathfrak{M}(c) \hat{\otimes}_{\mathfrak{A}(c)} \mathfrak{N}(c),$$

且

$$\mathfrak{H}\text{om}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})(c) := \text{Hom}_{\mathfrak{A}|_c}(\mathfrak{M}|_c, \mathfrak{N}|_c),$$

$\forall c \in \text{Ob}\mathcal{C}$, 且对 $\forall \alpha : c \rightarrow d$ 产生 $\mathcal{C}/c \rightarrow \mathcal{C}/d$ 以及

$$\text{Hom}_{\mathfrak{A}|_d}(\mathfrak{M}|_d, \mathfrak{N}|_d) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{A}|_c}(\mathfrak{M}|_c, \mathfrak{N}|_c).$$

以上构造分别叫做**张量**和**内态射** (internal hom). 它们是经典模论中对应构造的推广。

引理 7.5.1

设 $\mathfrak{R}$ 是交换环预层, 且 $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ 为 $\mathfrak{R}$ -模预层。则存在以下模预层同构

$$\begin{aligned} & \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L} \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \\ & \cong \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L}, \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})). \end{aligned}$$

特别地, 有

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L} \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L}, \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})). \end{aligned}$$

证明. 我们直接构造自然同构。对 $\forall c \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$, 存在如下同构:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L} \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M}, \mathfrak{N})(c) \\ & = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}|_c}((\mathfrak{L} \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M})|_c, \mathfrak{N}|_c) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}|_c}(\mathfrak{L}|_c \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}|_c} \mathfrak{M}|_c, \mathfrak{N}|_c) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}|_c}(\mathfrak{L}|_c, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}|_c}(\mathfrak{M}|_c, \mathfrak{N}|_c)) \\ & = \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L}, \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}))(c). \end{aligned}$$

其中, 倒数第二个同构可以逐点验证成立。在态射上的验证留给读者。

倒数第二个同构在 $(c, 1_c) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}/c)$ 上取分量, $\forall c \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$, 就得到第二个结论。 $\square$

上述构造和结论能够进一步提升到模层上。此时, 张量如前方定义, 是预层张量的层化。

引理 7.5.2

假设 $\mathfrak{R}$ 是交换环层, 且 $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}$ 。则

1. $\mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}$,
2. 存在模层同构

$$\begin{aligned} & \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L} \otimes_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \\ & \cong \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L}, \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})). \end{aligned}$$

特别地, 有

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L} \otimes_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L}, \mathfrak{H}om_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})). \end{aligned}$$

证明. 我们利用局部化技术来验证第一个结论。在第四讲中我们已经指出, 层范畴是预层范畴相对于局部同构的局部化。任给 $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ 为局部同构。则层化后有同构 $\mathfrak{F}^a \rightarrow \mathfrak{G}^a$, 以及相应的范畴等价

$\mathrm{Sh}(\mathbf{C})/\mathfrak{F}^a \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{C})/\mathfrak{G}^a$ 和 $\mathrm{Sh}(\mathbf{C}/\mathfrak{F}) \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{C}/\mathfrak{G})$ 。于是从

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}\mathrm{om}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})(\mathfrak{G}) &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}|_{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{M}|_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{N}|_{\mathfrak{G}}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}|_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{M}|_{\mathfrak{F}}, \mathfrak{N}|_{\mathfrak{F}}) \\ &= \mathfrak{H}\mathrm{om}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})(\mathfrak{F})\end{aligned}$$

可知它把局部同构映到同构，即 $\mathfrak{H}\mathrm{om}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 为层。

至于第二个结论，它来自层化的性质和预层范畴中的伴随关系

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}\mathrm{om}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L} \otimes_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) &\cong \mathfrak{H}\mathrm{om}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L} \hat{\otimes}_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \\ &\cong \mathfrak{H}\mathrm{om}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{L}, \mathfrak{H}\mathrm{om}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})).\end{aligned}$$

□

7.6 模的整体与局部性质

参照环与模理论中的经典构造，我们给出以下定义。

定义 7.6.1

设 $(\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{R})$ 为赋环拓扑斯，且 $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}$ 。

1. 如果 $\mathfrak{M}$ 同构于 $\bigoplus_I \mathfrak{R}$ ，则称 $\mathfrak{M}$ 为自由 $\mathfrak{R}$ -模。如果 $|I| < \infty$ ，则称 $\mathfrak{M}$ 为有限自由模。
2. 如果存在满态射 $\bigoplus_I \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{M}$ ，则称 $\mathfrak{M}$ 由整体截面生成。 $|I| = r \geq 0$ ，则称 $\mathfrak{M}$ 由 r 个整体截面生成。
3. 如果存在正合列

$$\bigoplus_J \mathfrak{R} \rightarrow \bigoplus_I \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow 0,$$

则称 $\mathfrak{M}$ 具有整体表现。如果 $|I| < \infty$ 且 $|J| < \infty$ ，则称 $\mathfrak{M}$ 具有有限整体表现。

引理 7.6.2

令 $(\Phi, \Phi^\sharp) : (\mathrm{Sh}(\mathbf{D}), \mathfrak{R}_\mathbf{D}) \rightarrow (\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{R}_\mathbf{C})$ 为赋环拓扑斯态射，且 $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}_\mathbf{DC}$ ，若 $\mathfrak{M}$ 为自由（或以上列表中其他性质），则 $\Phi^*(\mathfrak{M})$ 也是。

证明。已知 Φ^* 与余积可交换。又由定义可知 $\Phi^*(\mathfrak{R}_\mathbf{C}) = \mathfrak{R}_\mathbf{D}$ ，因此结论成立。 □

利用局部化态射，我们进一步引入模的局部性质。

定义 7.6.3

设 $(\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{R})$ 为赋环拓扑斯，且 $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{R}$ 。

1. 如果对 $\forall c \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ 都存在一个 $S \in \mathcal{J}(c)$ ，使得对 $\forall f \in S$ ， $\mathfrak{M}|_{\mathrm{dom}f}$ 为 (有限) 自由 $\mathfrak{R}|_{\mathrm{dom}f}$ -模，则称 $\mathfrak{M}$ 为局部 (有限) 自由模。
2. 如果对 $\forall c \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ 都存在一个 $S \in \mathcal{J}(c)$ ，使得对 $\forall f \in S$ ， $\mathfrak{M}|_{\mathrm{dom}f}$ 为由 (r) 个整体截面生成的 $\mathfrak{R}|_{\mathrm{dom}f}$ -模，则称 $\mathfrak{M}$ 局部上由 (r) 个整体截面生成。
3. 如果对 $\forall c \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ 都存在一个 $S \in \mathcal{J}(c)$ ，使得对 $\forall f \in S$ ， $\mathfrak{M}|_{\mathrm{dom}f}$ 为由有限多截面生成的 $\mathfrak{R}|_{\mathrm{dom}f}$ -模，则称 $\mathfrak{M}$ 为有限型。

4. 如果对 $\forall c \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 都存在一个 $S \in \mathcal{J}(c)$, 使得对 $\forall f \in S$, $\mathfrak{M}|_{\text{dom}f}$ 为 (有限) 整体表现 $\mathfrak{A}|_{\text{dom}f}$ -模, 则称 $\mathfrak{M}$ 为**拟凝聚 (或有限表现)**。
5. 如果 $\mathfrak{M}$ 是有限型, 且对 $\forall c \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 和 $\forall n$, 以及任意态射 $\mathfrak{A}|_c^{\oplus n} \rightarrow \mathfrak{M}|_c$, 其核为有限型 $\mathfrak{A}|_c$ -模, 则称果 $\mathfrak{M}$ 为**凝聚**。

注解 7.6.4

1. 上述模的性质内蕴于赋环拓扑斯, 不依赖于座的选取。
2. 类似于整体性质, 若有赋环拓扑斯态射, 则拉回保持上述类型的模。

8 第八讲

拓扑斯作为一种广义空间，上同调理论是一种基本的研究工具。这一讲介绍拓扑斯上同调，它的各种特殊形式，如层上同调、范畴上同调（含群上同调），以及其计算工具 Čech 上同调和谱序列。

我们假定读者熟悉导出函子基本理论，包括谱序列常见性质。

8.1 拓扑斯上同调

赋环拓扑斯 $(\mathcal{E}, \mathfrak{A})$ 的模范畴 $\text{Mod-}\mathfrak{A}$ 是 Grothendieck 范畴，即具有足够多入射对象的阿贝尔范畴，能够讨论同调代数。

我们将从 $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}$ 开始介绍，其中 $\mathbb{Z}$ 是常数 $\mathbb{Z}$ 预层的层化。此时， $\text{Mod-}\mathbb{Z} = \text{Ab}(\mathcal{E})$ 。

定义 8.1.1

设 Grothendieck 拓扑斯 $\mathcal{E}$ 中的终对象为 $\mathbf{e}$ 以及其中阿贝尔群对象构成的范畴为 $\text{Ab}(\mathcal{E})$ 。考虑（整体截面）函子

$$\Gamma = \text{Nat}(\mathbf{e}, -) : \text{Ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Ab}.$$

对于 $\mathfrak{A} \in \text{Ab}(\mathcal{E})$ ，称 $H^i(\mathcal{E}; \mathfrak{A}) := R^i\Gamma(\mathfrak{A})$ 为 $\mathcal{E}$ 的系数在 $\mathfrak{A}$ 中的第 i 个上同调群。

更一般地如果 $f \in \mathcal{E}$ ，记 $H^i(\mathcal{E}, f; -)$ (或 $H^i(f; -)$) 为 $\Gamma_f = \text{Nat}(f, -)$ 的第 i 个右导出函子。特别地，

$$H^i(\mathcal{E}, f; \mathfrak{A}) = H^i(f; \mathfrak{A}) = R^i\Gamma_f(\mathfrak{A}).$$

判断 Γ_f 的左正合性，可以使用左正合的判别方法（利用滤过范畴或与极限的交换性），也可以使用 8.2.4 中办法。

在同构意义下，拓扑斯上同调不依赖于座的选取。当我们为拓扑斯选定了具体的座之后，上同调群的记法会略有不同。为了便于今后的应用，我们将不追求一般形式，而采用以下定义作为讨论的基础。需要强调的是：每个拓扑斯都有终对象，但是座 $\mathbf{C}$ 的承载范畴通常没有终对象。如果 $\mathcal{C}$ 中有终对象 e ，则可表函子 $h_e \in \text{Sh}(\mathbf{C})$ 是拓扑斯的终对象。

定义 8.1.2

令 $\mathbf{C}$ 为座。设 $\mathfrak{F}_\bullet$ 为 $\text{Sh}(\mathbf{C})$ 中终对象。考虑函子

$$\Gamma = \text{Nat}(\mathfrak{F}_\bullet, -) : \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}.$$

对于 $\mathfrak{A} \in \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$ ，称 $H^i(\mathbf{C}; \mathfrak{A}) := R^i\Gamma(\mathfrak{A})$ 为 $\text{Sh}(\mathbf{C})$ 的系数为 $\mathfrak{A}$ 的第 i 个上同调群。

更一般地如果 $\mathfrak{F} \in \text{Sh}(\mathbf{C})$ ，记 $H^i(\mathbf{C}, \mathfrak{F}; -)$ (或 $H^i(\mathfrak{F}; -)$) 为 $\Gamma_{\mathfrak{F}} = \text{Nat}(\mathfrak{F}, -)$ 的第 i 个右导出函子。特别地，

$$H^i(\mathbf{C}, \mathfrak{F}; \mathfrak{A}) = H^i(\mathfrak{F}; \mathfrak{A}) = R^i\Gamma_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}).$$

当 $\mathfrak{F} = h_c^a$ ， $c \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ，习惯上记

$$H^i(c; \mathfrak{A}) := H^i(\mathbf{C}, h_c^a; \mathfrak{A}) = H^i(h_c^a; \mathfrak{A}),$$

称之为 c 上系数为 $\mathfrak{A}$ 的第 i 个上同调群。

在这种情况下, 验证 $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ 的左正合性可以通过直接计算。

如果我们有赋环拓扑斯 $(\mathrm{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{A})$ 或赋环座 $(\mathbf{C}, \mathfrak{A})$, 则相应修改上述定义, 我们能引入系数在 $\mathfrak{A}$ -模 $\mathfrak{M}$ 中的上同调。此时, $H^i(c; \mathfrak{M}) \in \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{A}(c)$ 。我们后面会回到这类上同调。

前面引入的上同调理论包含了几种经典的情况。

例 8.1.3

1. 若 X 为拓扑空间, $\mathcal{P}_X$ 为开集偏序集赋予典范拓扑, 则 $\mathcal{P}_X$ 的终对象是 X 。对 X 上的阿贝尔层 $\mathfrak{A}$, 有 $\Gamma(\mathfrak{A}) = \mathrm{Nat}(h_X, \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}(X)$ 。此时我们得到经典的层上同调理论。
2. 由于 $\mathrm{Sh}(\mathbf{C}, \mathrm{Ab}) = \mathrm{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$ 且

$$\Gamma(\mathfrak{A}) = \mathrm{Nat}(\mathfrak{F}_\bullet, \mathfrak{A}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathfrak{A}),$$

所以

$$H^i(\mathbf{C}; \mathfrak{A}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}, \mathfrak{A}).$$

后者是阿贝尔范畴 $\mathrm{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$ 中的 Ext 群。

下一个例子在代数拓扑中非常重要。

例 8.1.4

如果在预层拓扑斯 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ 上考虑, 则对任意阿贝尔预层 $\mathfrak{A}$ 有同构

$$H^i(\mathrm{PSh}(\mathcal{C}); \mathfrak{A}) \cong H^i(\mathcal{C}; \mathfrak{A}) \cong \varprojlim_{\mathcal{C}}^i \mathfrak{A},$$

其中后者是所谓的**范畴上同调**, 即 $\mathcal{C}$ 的**神经** (nerve, 即单纯集 NC_*) 的系数在 $\mathfrak{A}$ 中单纯上同调。特别地, 当 $\mathcal{C} = G$ 为 (离散) 群, 这就是群 G 的上同调。

若 $\mathfrak{A} = \underline{k}$ 是常数 k 预层, 则 $H^i(\mathcal{C}; \underline{k})$ 同构于**分类空间** BC (classifying space) 的上同调 $H^i(BC, k)$ 。实际上 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ 也叫**分类拓扑斯** (classifying topos)。

为解释对象上的上同调群含义, 我们需要介绍上同调理论的各类性质和常用工具。首先, 讨论上同调离不开对入射对象性质的研究。

引理 8.1.5

1. 设 $\Phi = (\Phi^{-1}, \Phi_*) : \mathrm{Sh}(\mathbf{D}) \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{C})$ 为拓扑斯态射。则前推

$$\Phi_* : \mathrm{Sh}(\mathbf{D}, \mathrm{Ab}) \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{C}, \mathrm{Ab})$$

保持入射对象。

2. 设 $\iota : \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{A} \rightarrow \mathrm{PSh}\text{-}\mathfrak{A}$ 为遗忘函子。则它保持入射对象。

证明. 对于第一条性质, 设 $\mathcal{I}$ 为 $\mathrm{Sh}(\mathbf{D}, \mathrm{Ab})$ 中入射对象, 并有下图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\text{mono}} & \mathfrak{G} \\ \downarrow & & \\ \Phi_*(\mathcal{I}) & & \end{array}$$

根据伴随函子的性质，上图对应下图，并能填补斜向态射使得图交换

$$\begin{array}{ccc} \Phi^{-1}(\mathfrak{F}) & \xrightarrow{\text{mono}} & \Phi^{-1}(\mathfrak{G}) \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathfrak{J} & & \end{array}$$

再次应用伴随性质，可产生所需要的态射 $\mathfrak{G} \rightarrow \Phi_*(\mathfrak{J})$ ，使上方图交换。

对于第二条，需要用到层化函子的正合性以及伴随函子性质。

□

更一般地，对于赋环拓扑斯态射

$$(\Phi, \Phi^\sharp) : (\text{Sh}(\mathbf{D}), \mathfrak{A}_{\mathbf{D}}) \rightarrow (\text{Sh}(\mathbf{C}), \mathfrak{A}_{\mathbf{C}}),$$

根据第七讲可定义函子 ($\forall i \geq 0$)

$$R^i \Phi_* : \text{Mod-}\mathfrak{A}_{\mathbf{D}} \rightarrow \text{Mod-}\mathfrak{A}_{\mathbf{C}}.$$

对于 $\forall \mathfrak{M} \in \text{Mod-}\mathfrak{A}_{\mathbf{D}}$ ，取其入射分解 $\mathfrak{J}_*$ ，则 $R^i \Phi_*(\mathfrak{M}) := H^i(\Phi_*(\mathfrak{J}_*))$ 。我们通常须要求态射**平坦** (flat)，以保持入射对象。因此，通常会使用比入射模更一般的**零调对象** (acyclic object) 讨论上同调。

推论 8.1.6

考虑局部化态射

$$j_{\mathfrak{F}} = (j_{\mathfrak{F}}^{-1}, j_{\mathfrak{F}*}) : \text{Sh}(\mathbf{C}/\mathfrak{F}) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}).$$

有

1. $j_{\mathfrak{F}}^{-1} : \text{Sh}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}/\mathfrak{F})$ 保持入射对象。
2. 存在同构

$$\begin{aligned} H^i(\mathbf{C}, \mathfrak{F}; \mathfrak{A}) &= H^i(\mathfrak{F}; \mathfrak{A}) \\ &\cong H^i(\mathbf{C}/\mathfrak{F}; j_{\mathfrak{F}*}(\mathfrak{A})). \end{aligned}$$

特别地对任意 $c \in \text{Ob } \mathbf{C}$,

$$H^i(c; \mathfrak{A}) \cong H^i(\mathbf{C}/c; j_{\mathfrak{F}*}(\mathfrak{A})),$$

且 $H^i(\mathbf{C}, \mathfrak{c}; \mathfrak{A}) \cong H^i(\mathbf{C}; \mathfrak{A})$.

证明. 由于 $j_{\mathfrak{F}}^{-1} : \text{Sh}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}/\mathfrak{F})$ 是 $j_{\mathfrak{F}!}$ 的右伴随，且后者为正合，所以我们从入射对象定义出发可以验证第一条性质。第二个结论由此自然获得。 □

前述结论说明，对象上的上同调实际上就是切片拓扑斯（或切片范畴）的上同调。

例 8.1.7

对于前面提到的拓扑空间例子， $\mathcal{P}_X$ 的对象是空间 X 中的开集 U 。根据上述结论，有

$$\begin{aligned} H^i(\mathbf{P}_X, U; \mathfrak{A}) &= H^i(U; \mathfrak{A}) \\ &\cong H^i(\mathbf{P}_X/U; j_{\mathfrak{F}*}(\mathfrak{A})) \\ &\cong H^i((\mathbf{P}_X)_{\leq U}; \mathfrak{A}|_{(\mathcal{P}_X)_{\leq U}}). \end{aligned}$$

这里局部化的几何意义就很清晰。

例 8.1.8

对于前面提到的预层拓扑斯例子，给定 $\mathfrak{S} \in \text{PSh}(\mathcal{C})$ ，有

$$\begin{aligned} H^i(\mathcal{C}, \mathfrak{S}; \mathfrak{A}) &= H^i(\mathfrak{S}; \mathfrak{A}) \\ &\cong H^i(\mathcal{C}/\mathfrak{S}; j_{\mathfrak{S}*}(\mathfrak{A})) \\ &\cong \varprojlim_{\mathcal{C}/\mathfrak{S}}^i j_{\mathfrak{S}*}(\mathfrak{A}). \end{aligned}$$

当 $\mathcal{C}$ 上赋予了拓扑且 $\mathfrak{S}$ 为一个覆盖筛时，这就是我们即将定义的 Čech 上调群。

我们回顾 **Grothendieck 谱序列**：设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ 为阿贝尔范畴， $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有足够多入射对象，且 $\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 和 $\beta: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 为两个左正合函子，假设 α 将 $\mathcal{C}$ 中入射对象映到 $\mathcal{D}$ 中 β -零调对象。则存在 Grothendieck 谱序列

$$(R^i\beta)(R^j\alpha) \Rightarrow R^{i+j}(\beta \circ \alpha).$$

它产生一个五项正合列，将在例子中出现。

前面的铺垫使得我们能将它应用在拓扑斯态射蕴含的推出函子上

$$\text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}) \xrightarrow{\Phi_*} \text{Sh}(\mathbf{D}, \text{Ab}) \xrightarrow{\Gamma} \text{Ab}.$$

我们注意到对 $\mathfrak{A} \in \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$,

$$\Gamma_{\mathbf{D}}\Phi_*(\mathfrak{A}) = \text{Nat}(\mathfrak{e}, \Phi_*(\mathfrak{A})) \cong \text{Nat}(\mathfrak{e}, \mathfrak{A}) = \Gamma_{\mathbf{C}}(\mathfrak{A}).$$

命题 8.1.9

设 $\Phi = (\Phi^{-1}, \Phi_*) : \text{Sh}(\mathbf{D}) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C})$ 为拓扑斯态射。则对 $\mathfrak{A} \in \text{Sh}(\mathbf{D}, \text{Ab})$ ，有 Leray 谱序列

$$H^i(\mathbf{C}; R^j\Phi_*(\mathfrak{A})) \Rightarrow H^{i+j}(\mathbf{D}; \mathfrak{A}).$$

对 $\forall j$ ， $R^j\Phi_*(\mathfrak{A})$ 作为 $\mathbf{C}$ 上的层，是以下预层的层化

$$c \mapsto H^j(\Phi^{-1}(h_c^a); \mathfrak{A}), \forall c \in \text{Ob}\mathcal{C}.$$

证明. 谱序列的存在性我们前面已经解释。对于 $\mathfrak{A}$ 的任意入射分解 $\mathfrak{I}_*$,

$$R^j\Phi_*(\mathfrak{A}) = H^j(\Phi_*(\mathfrak{I}_*)).$$

根据定义, 上述上同调层 $H^j(\Phi_*(\mathcal{I}_*))$ 是以下预层的层化

$$c \mapsto \frac{\text{Ker}(\Phi_*(\mathcal{I}_j)(c) \rightarrow \Phi_*(\mathcal{I}_{j+1})(c))}{\text{Im}(\Phi_*(\mathcal{I}_{j-1})(c) \rightarrow \Phi_*(\mathcal{I}_j)(c))}, \forall c.$$

但根据伴随关系

$$\text{Nat}(\Phi^{-1}(h_c^a), \mathcal{I}_j) \cong \text{Nat}(h_c^a, \Phi_*(\mathcal{I}_j)),$$

上述商群同构于

$$\frac{\text{Ker}(\mathcal{I}_j(\Phi^{-1}(h_c^a)) \rightarrow \mathcal{I}_{j+1}(\Phi^{-1}(h_c^a)))}{\text{Im}(\mathcal{I}_{j-1}(\Phi^{-1}(h_c^a)) \rightarrow \mathcal{I}_j(\Phi^{-1}(h_c^a)))}.$$

□

如果上述拓扑斯态射来自一个连续函子 $u: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, 则 $\Phi^{-1}(h_c^a) = u(c)$ 。

8.2 Čech 上同调

Čech 上同调定义在预层范畴上, 是计算层上同调的重要工具。

定义 8.2.1

设 $\mathbf{C}$ 为座, $c \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 且 $\mathfrak{A} \in \text{PSh}(\mathcal{C}, \text{Ab})$ 。

1. 对于 $\mathfrak{S} \in \text{PSh}(\mathcal{C})$, $H^i(\mathfrak{S}; \mathfrak{A})$ 为 $\Gamma_{\mathfrak{S}} := \text{Nat}(\mathfrak{S}, -)$ 的第 i 个导出函子。当 $S \in \mathcal{J}(c)$, $H^i(S; \mathfrak{A})$ 也叫做 c 相对于覆盖 S 的、系数在 $\mathfrak{A}$ 中的第 i 个 Čech 上同调群。
2. 称 $\check{H}^i(c; \mathfrak{A}) = \varinjlim_{\mathcal{J}(c)} \check{H}^i(-; \mathfrak{A})$ 为 c 的系数在 $\mathfrak{A}$ 中的第 i 个 Čech 上同调群。

以上是最简洁、最一般, 但最抽象的 Čech 上同调群定义。当 $\mathcal{C}$ 中有纤维积时 (如 $\mathcal{C} = \mathcal{P}_X$), 它表现为更常见的形式。

注解 8.2.2

1. $\check{H}^0(c; \mathfrak{A}) = \varinjlim_{\mathcal{J}(c)} \text{Nat}(-, \mathfrak{A})$ 恰为 $\mathfrak{A}^\dagger(c)$ 。
2. 常常需要关注 $\mathfrak{A} \in \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$ 的情况。此时, 我们简记 $H^i(S; \mathfrak{A}) := H^i(S; \iota(\mathfrak{A}))$ (其中 ι 是遗忘函子)。易证

$$H^i(S; \mathfrak{A}) \cong H^i(S^a; \mathfrak{A}).$$

从极限性质可知, 存在自然映射

$$\check{H}^i(c; \mathfrak{A}) \rightarrow H^i(c; \mathfrak{A}).$$

这初步揭示了两种上同调理论之间的联系。

定义 8.2.3

给定赋环拓扑斯 $(\text{Sh}(\mathbf{C}), \text{Mod-}\mathfrak{A})$, 遗忘函子 $\iota: \text{Mod-}\mathfrak{A} \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C})$ 存在左伴随函子 $\text{Lib}: \text{Sh}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Mod-}\mathfrak{A}$ 。对任意 $\mathfrak{F}$, 记 $\mathfrak{A}[\mathfrak{F}] := \text{Lib}(\mathfrak{F})$, 称之为 $\mathfrak{F}$ 生成的自由对象。

这是一个经典范畴论构造在当前情形下的应用。例如，当 $\mathcal{C}$ 为平凡，上述定义退化为以下形式：对环 R 考虑遗忘函子 $\iota: \text{Mod-}R \rightarrow \text{Set}$ 。易见对任意集合 X ， $R[X]$ 为 X 生成的自由 R -模。

一般而言， $\mathfrak{A}[\mathfrak{F}]$ 是以下预层的层化

$$c \mapsto \mathfrak{A}(c)[\mathfrak{F}(c)].$$

例如，终对象 $\mathfrak{F}_\bullet$ 生成的自由对象就是 $\mathfrak{A}$ 。

注解 8.2.4

我们可以考虑对于 $\mathfrak{M} \in \text{PSh-}\mathfrak{A}$ 的 Čech 上同调群。令 $\mathfrak{M}_{ab}$ 为承载它的阿贝尔预层。

对于 $S \in \mathcal{J}(c)$ ，考虑 $(n+1)$ -重纤维积 ($n \geq 0$)

$$S^{n+1} := S \times_{h_c} \cdots \times_{h_c} S.$$

从 $S^{m+1} \rightarrow S^m$ 存在 $m+1$ 个自然投影，产生自由对象之间的态射。将这些态射做交错和，则

$$\mathbb{Z}[S^{n+1}] = \mathbb{Z}[S \times_{h_c} \cdots \times_{h_c} S]$$

构成 $\mathbb{Z}[S]$ 的投射分解 (Čech 复形)。若 $\mathfrak{M} \in \text{PSh-}\mathfrak{A}$ ，从

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[S \times_{h_c} \cdots \times_{h_c} S], \mathfrak{M}_{ab}) \\ & \cong \text{Nat}(S \times_{h_c} \cdots \times_{h_c} S, \mathfrak{M}) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}[S \times_{h_c} \cdots \times_{h_c} S], \mathfrak{M}) \end{aligned}$$

可知，上述复形可计算 $H^i(S; \mathfrak{M}) \cong H^i(S; \mathfrak{M}_{ab})$ 。相应地，有 $\check{H}^i(c; \mathfrak{M}) \cong \check{H}^i(c; \mathfrak{M}_{ab})$ ， $\forall \mathfrak{M} \in \text{PSh-}\mathfrak{A}$ 。

从以上描述可知，对于入射阿贝尔预层 $\mathfrak{I}$ ， $H^i(S; \mathfrak{I}) = 0, \forall i > 0$ 。

我们继续用谱序列探讨上同调。当谱序列坍塌到轴上，则能产生关于上同调的重要信息。

引理 8.2.5

设 $\mathfrak{A} \in \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$ 。对 $\forall j > 0$ ，阿贝尔预层 $R^j \iota(\mathfrak{A})$ 满足条件

$$[R^j \iota(\mathfrak{A})]^\dagger = 0,$$

其中 ι 是遗忘函子。

证明. 考虑

$$\text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}) \xrightarrow{\iota} \text{PSh}(\mathbf{C}, \text{Ab}) \xrightarrow{(-)^a} \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}),$$

及其谱序列。由于 $(-)^a$ 正合，所以 $E_2^{i,j} = 0, i > 0$ 且

$$E_2^{0,j} = (-)^a R^j \iota : \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}).$$

又由 $(-)^a \circ \iota$ 的正合性，可知 $E_\infty^{i,j} = 0, i+j > 0$ ，同时，由于所有微分均为零，所以 $E_2^{0,j} = 0, j > 0$ ，于是 $[R^j \iota(\mathfrak{A})]^a = 0, \forall j > 0$ 。从 $[R^j \iota(\mathfrak{A})]^\dagger$ 可分且

$$[R^j \iota(\mathfrak{A})]^\dagger \rightarrow [R^j \iota(\mathfrak{A})]^a$$

为单，可推出结论成立。 □

定理 8.2.6

设 $\mathbf{C}$ 为座, $c \in \text{Ob}\mathbf{C}$ 且 $\mathfrak{A} \in \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$ 。考虑自然同态 $\check{H}^i(c; \mathfrak{A}) \rightarrow H^i(c; \mathfrak{A})$ 。当 $i = 0, 1, 2$ 时, 此同态为单射; 当 $i = 0, 1$ 时, 它为同构。

如果 $R^j\iota(\mathfrak{A}) = 0$, $0 \leq j \leq n$, 则上述同态当 $i = 0, 1, \dots, n$ 时为同构; $j = n+1$ 时为单射。

证明. 考虑

$$\text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}) \xrightarrow{\iota} \text{PSh}(\mathbf{C}, \text{Ab}) \xrightarrow{(-)^\dagger} \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}),$$

及其谱序列 $R^i(-)^\dagger(R^j\iota(\mathfrak{A})) \Rightarrow H^{i+j}(\mathbf{C}; \mathfrak{A})$ 。在对象 $c \in \text{Ob}\mathbf{C}$ 上取值

$$\check{H}^i(c; R^j\iota(\mathfrak{A})) \Rightarrow H^{i+j}(c; \mathfrak{A}).$$

其边缘态射为

$$\check{H}^i(c; \mathfrak{A}) = E_2^{i,0} \rightarrow E_\infty^{i,0} \hookrightarrow H^i(c; \mathfrak{A}).$$

然而 $\forall j > 0$

$$E_0^{0,j} = \check{H}^0(c; R^j\iota(\mathfrak{A})) = [R^j\iota(\mathfrak{A})]^\dagger(c) = 0.$$

于是当 $i = 0, 1, 2$ 时, $E_2^{i,0} \rightarrow E_\infty^{i,0}$ 为同构。当 $i = 0, 1$ 时, $E_\infty^{i,0} = H^i(c; \mathfrak{A})$ 。

如果 $R^j\iota(\mathfrak{A}) = 0$, $0 \leq j \leq n$, 则类似讨论能够推导出相应结论。 $\square$

注解 8.2.7

我们也能用另一种方式获得定理中的谱序列。假设 $(\mathbf{C}, \mathfrak{R})$ 为赋环座, $\mathfrak{F}$ 为集合层且 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{R}$ -模。则从伴随关系

$$\text{Nat}(\mathfrak{F}, \mathfrak{M}) \cong \text{Nat}(\mathfrak{F}, \iota(\mathfrak{M})),$$

可得 $\text{Nat}(\mathfrak{F}, -) \cong \text{Nat}(\mathfrak{F}, -)\iota$ 。又因 ι 保持入射对象, 我们有谱序列

$$H^i(\mathfrak{F}; R^j\iota(\mathfrak{M})) \Rightarrow H^{i+j}(\mathfrak{F}; \mathfrak{M}).$$

现设 S 为 c 的覆盖筛。从 $\text{Nat}(S, \mathfrak{M}) \cong \text{Nat}(h_c, \mathfrak{M})$ 可得 $H^n(S; \mathfrak{M}) \cong H^n(c; \mathfrak{M})$ 。对以下谱序列两边取极限 $\varinjlim_{\mathcal{J}(c)}$ 就能获得定理中的谱序列

$$H^i(S; R^j\iota(\mathfrak{M})) \Rightarrow H^{i+j}(c; \mathfrak{M})$$

前面提到, 我们可以定义赋环座的模的上同调。

命题 8.2.8

令 $(\mathbf{C}, \mathfrak{R})$ 为赋环座且 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{R}$ -模。记 $\mathfrak{M}_{ab}$ 为承载它的阿贝尔层。则

$$H^i(\mathbf{C}; \mathfrak{M}_{ab}) \cong H^i(\mathbf{C}; \mathfrak{M}).$$

更一般地, 对任意 $c \in \text{Ob}\mathbf{C}$, 有

$$H^i(c; \mathfrak{M}_{ab}) \cong H^i(c; \mathfrak{M}).$$

证明. 已知

$$\{H^i(c; -) : \text{Mod-}\mathfrak{R} \rightarrow \text{Ab}\}_i$$

为泛 δ -函子。从 ι 的正合性可知

$$\{H^i(c; (-)_{ab}) : \text{Mod-}\mathfrak{R} \xrightarrow{\iota} \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}\}_i$$

为 δ -函子。我们需要证明其泛性质(从而两组 δ -函子同构)。为此, 对于任意入射模 $\mathcal{I} \in \text{Mod-}\mathfrak{R}$, 我们需要证明 $H^j(c; \mathcal{I}_{ab}) = 0, \forall j \neq 0$. 由于 $R^j \iota(\mathcal{I}) = 0, \forall j \neq 0$, 所以上述定理 8.2.6 给出 $H^j(c; \mathcal{I}_{ab}) \cong \check{H}^j(c; \mathcal{I}_{ab}), \forall j$. 然而我们前面已经指出 $\check{H}^j(c; \mathcal{I}_{ab}) \cong \check{H}^j(c; \mathcal{I}) = 0, \forall j \neq 0$. $\square$

作为结束前的注记, 对于赋环拓扑斯态射 $\Phi = (\Phi^{-1}, \Phi_*)$, Φ_* 把入射对象映到所谓的完全零调对象 (totally acyclic object), 定义见下方。因此, 为在此情形下建立 Leray 谱序列, 就必须讨论完全零调对象这一概念。这类似于在经典层论中, 除入射分解外, 还能使用[松弛分解](#)(flasque 或 flabby resolution) 去计算层上调群。

定义 8.2.9

设 $\text{Sh}(\mathbf{C})$ 为拓扑斯。若 $\mathfrak{A} \in \text{Sh}(\mathbf{C}, \text{Ab})$ 对任意 $\mathfrak{F} \in \text{Sh}(\mathbf{C})$ 总是 $\text{Nat}(\mathfrak{F}, -)$ -零调, 即总有 $H^i(\mathfrak{F}; \mathfrak{A}) = 0, \forall i \neq 0$, 则 $\mathfrak{A}$ 称为[完全零调层](#)。

从定义易见入射层总是完全零调。需要说明的是, 在 SGA 里这一概念被叫做“松弛层”(因为 SGA 中的叫法与经典情形有差异, 似乎并非最佳术语)。

8.3 模表示应用举例

最后一节, 我们利用一个实例展现层论方法在模表示中的具体应用。

定义 8.3.1

设 G 为有限群, p 为素数且 $p \mid |G|$. 设 k 为特征 p 域且 M 为 kG -模。记 M^* 为其对偶模。如果 $M \otimes_k M^* \cong k \oplus N$, 其中 N 为投射模, 则称 M 是[自同态平凡模](#) (endotrivial module)。

如果我们在稳定模范畴 $\text{stmod-}kG$ 中看待以上定义, 则上述同构表达为 $\text{End}_k(M) \cong M \otimes_k M^* \cong k$ 。这一方面提供了名称的来源; 另一方面说明 $M \otimes_k - : \text{stmod-}kG \rightarrow \text{stmod-}kG$ 是三角范畴自等价, 部分说明了自同态平凡模的重要性。为刻画自同态平凡模 (的同构类), 我们通常考虑一种 K -群, 即自同态平凡模同构类构成的集合

$$T_k(G) = \{\text{同构类}[M] \mid M \text{ 自同态平凡}\}.$$

由于从定义可以验证自同态平凡模的张量积仍为自同态平凡, 所以

$$[M_1] \cdot [M_2] := [M_1 \otimes_k M_2]$$

提供了 $T_k(G)$ 上一个交换的乘法, 且 $[k]$ 是单位元。加上 $[M]$ 有逆元 $[M^*]$, 我们获得一个阿贝尔群 $T_k(G)$, 称作 G 的[自同态平凡模群](#)。

在研究过程中, Puig 证明了自同态平凡模群是有限生成。这使得该群的刻画变得可行。随后经过大量艰巨工作, 人们对于 p -群 P 的特殊情况得到理想结果。为探讨一般情形, 人们寄希望于使用限制函子

$$\downarrow_H^G: \text{stmod-}kG \rightarrow \text{stmod-}kP$$

诱导产生的群同态

$$\text{Res} : T_k(G) \rightarrow T_k(P),$$

其中 $P \subset G$ 是一个 Sylow p -子群。从理论角度, 像 $I_k(G, P) := \text{Im}(\text{Res})$ 已被刻画, 所以问题集中在计算核 $T_k(G, P) := \text{Ker}(\text{Res})$, 后者称为**西罗平凡模群**。在十多年里, Carlson 和 Thévenaz 及其团队使用支撑簇理论, 分门别类计算了大量情况。到 2015 年, Balmer 使用上同调给出一个统一公式 ($T_k(G, P)$ 本质上是一个 Picard 群)。很快在 2016 年, Grodal 采用范畴上同调给出不同的公式。我们现在具体描述这些公式。

我们在第五讲中介绍了轨道范畴 $\mathcal{O}(G)$ 。其满子范畴, p -轨道范畴 $\mathcal{O}_p(G)$, 赋予 $\mathcal{O}(G)$ 一个拓扑 $\mathcal{J}_p$, 称为 **p -拓扑**。称 $\mathbf{O}_p G = (\mathcal{O}(G), \mathcal{J}_p)$ 为 G 的 **p -座**。从 p -轨道范畴 $\mathcal{O}_p(G)$ 中去除对象 $G/1$, 我们得到非平凡 p -轨道范畴 $\mathcal{O}_p^\circ(G)$:

$$\mathcal{O}_p^\circ(G) \subset \mathcal{O}_p(G) \subset \mathcal{O}(G).$$

设 $k^\times$ 为域中非零元构成的阿贝尔群。Paul Balmer 采用叠形理论推导出以下计算公式 (他使用的术语是 sipp-拓扑):

定理 8.3.2: (Balmer)

令 $\mathbf{O}G = (\mathcal{O}(G), \mathcal{J}_p)$ 。则

$$T_k(G, P) \cong H^1(S_{G/G}^{\min}; \mathbb{G}_m),$$

其中 $S_{G/G}^{\min}$ 是终对象 G/G 的最小覆盖筛, 而 $\mathbb{G}_m$ 是一个阿贝尔层。当 $p \mid |H|$ 时, 后者在 G/H 上取值为 $k^\times$, 否则为零。

Jesper Grodal 利用同伦论方法和范畴上同调给出另一个公式:

定理 8.3.3: (Grodal)

考虑非平凡 p -轨道范畴 $\mathcal{O}_p^\circ(G)$ 。则

$$T_k(G, P) \cong H^1(\mathcal{O}_p^\circ(G); \underline{k}^\times),$$

其中 $\underline{k}^\times$ 是阿贝尔预层。注意

$$H^1(\mathcal{O}_p^\circ(G); \underline{k}^\times) \cong H^1(B\mathcal{O}_p^\circ(G); k^\times).$$

两组公式的推导分别需要叠形理论和分类空间同伦论的大量前置知识, 我们在此无法展开。这里我们将使用前方提供的工具建立两个公式之间的内蕴联系。究其原因, 是因为他们都是特定形式的拓扑斯上同调。

首先, Balmer 的公式是一种拓扑斯上同调。由 G/G 为终对象以及前方结论可知,

$$\begin{aligned}
H^1(\mathbf{OG}; \mathbb{G}_m) &\cong \check{H}^1(G/G; \mathbb{G}_m) \\
&= \varinjlim_{\mathcal{J}_p(G/G)} H^1(-; \mathbb{G}_m) \\
&\cong H^1(S_{G/G}^{\min}; \mathbb{G}_m).
\end{aligned}$$

最后一个同构存在, 是因为 $S_{G/G}^{\min}$ 为 $\mathcal{J}_p(G/G)$ 的始对象 (最小元)。

其次, 上述两个拓扑斯上同调群自然关联。由于包含函子 ι 是连续且上连续

$$\iota : (\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathcal{J}_{\min}) \rightarrow (\mathcal{O}(G), \mathcal{J}_p),$$

所以它产生拓扑斯态射

$$\mathbb{I} : \mathrm{PSh}(\mathcal{O}_p^\circ(G)) \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{OG}).$$

根据前面的讨论, 对任意 $\mathfrak{M} \in \mathrm{PSh}(\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathrm{Ab})$, 都存在 Leray 谱序列

$$H^i(\mathbf{OG}, (R^j\mathbb{I}_*)(\mathfrak{M})) \Rightarrow H^{i+j}(\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathfrak{M}),$$

其中 $\mathbb{I}_* = RK_\iota$ 而 $R^j\mathbb{I}_*$ 是第 j 个导出函子。通过计算可得

$$RK_\iota(k^\times) \cong \mathbb{G}_m.$$

在 Leray 谱序列中, 水平边缘映射为

$$H^i(\mathbf{OG}, \mathbb{I}_*(\mathfrak{M})) \xrightarrow{e} H^i(\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathfrak{M}).$$

为更好地理解该映射, 我们应用比较引理进行化简。已知 $(\mathcal{O}_p(G), \mathcal{J}_{\min})$ 在 $\mathbf{OG} = (\mathcal{O}(G), \mathcal{J}_{\mathrm{sipp}})$ 中稠密, 从而 $\mathrm{Sh}(\mathbf{OG}) \simeq \mathrm{PSh}(\mathcal{O}_p(G))$ 。因此, 上述谱序列等同于以下函子 (仍记为 ι)

$$\iota : (\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathcal{J}_{\min}) \rightarrow (\mathcal{O}_p(G), \mathcal{J}_{\min}).$$

及其相应的拓扑斯态射

$$\mathbb{I} : \mathrm{PSh}(\mathcal{O}_p^\circ(G)) \rightarrow \mathrm{PSh}(\mathcal{O}_p(G)).$$

产生的谱序列。对任意 $\mathfrak{M} \in \mathrm{PSh}(\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathrm{Ab})$, 有

$$H^i(\mathcal{O}_p(G), (R^j\mathbb{I}_*)(\mathfrak{M})) \Rightarrow H^{i+j}(\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathfrak{M}),$$

其中 $\mathbb{I}_* = RK_\iota$ 且 $R^j\mathbb{I}_*$ 是第 j 个导出函子。在这个谱序列中, 水平边缘映射为

$$H^i(\mathcal{O}_p(G), \mathbb{I}_*(\mathfrak{M})) \xrightarrow{e} H^i(\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathfrak{M}),$$

是以下态射的合成

$$\begin{array}{ccc}
H^i(\mathcal{O}_p(G), \mathbb{I}_*(\mathfrak{M})) & & \\
\downarrow & & \\
H^i(\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathrm{Res}_\iota \mathbb{I}_*(\mathfrak{M})) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathfrak{M}),
\end{array}$$

类似群扩张的 Lydon-Hochschild-Serre 谱序列。垂直的映射由限制 Res_ι 诱导产生, 而水平的映射由自然同构 $\mathrm{Res}_\iota \mathbb{I}_*(\mathfrak{M}) \cong \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ 诱导产生。因此恰好由 Res_ι 给出

$$H^i(\mathcal{O}_p(G), \mathbb{I}_*(\mathfrak{M})) \xrightarrow{e} H^i(\mathcal{O}_p^\circ(G), \mathfrak{M}).$$

命题 8.3.4

上述水平边缘映射为同构。

证明. (概要) 本质上, 我们使用一点范畴表示理论: 通过特定的投射分解直接计算即可获得结果。这是一种 Eckmann-Schapiro 类型的同构。它可以表现为

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}\mathcal{O}_p(G)}^i(\mathbb{Z}, \mathbb{I}_*(\mathfrak{M})) \xrightarrow{e} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}\mathcal{O}_p^\circ(G)}^i(\mathbb{Z}, \mathfrak{M}),$$

其中 $\mathbb{Z}\mathcal{O}_p(G)$ 等是所谓的范畴代数。

我们也可以使用标准分解来验证这一结论。 □

最后, 基于前述铺垫, 对于 $\mathfrak{M} = \underline{k}^\times$

$$e : H^1(\mathbf{OG}; \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\cong} H^1(\mathcal{O}_p^\circ(G); \underline{k}^\times)$$

将 Balmer 和 Grodal 关于 $T_k(G, P)$ 的计算公式自然等同起来。

8.4 阶段性结语

大约从 2001 年, 作者开始从事群相关有限范畴的表示和上同调理论研究。当时的着眼点来自模表示和群上同调中出现的各类 (有限) 范畴, 它们的表示、分类空间与上同调, 相关的工作可以参考 Aschbacher-Kessar-Oliver 的专著《Fusion Systems in Algebra and Topology》。这些范畴被当作广义的群, 研究涉及到的主要拓扑方法之一是分类空间的同伦余极限, 探索如何将复杂空间分解为相对简单空间的黏合, 如何使用相应的谱序列去计算复杂空间的上同调 (术语叫**同调分解**), 确定复杂空间的同伦型等等。这些研究里面往往依赖 Thomason 在其 1977 年的博士论文里面的一个结果, 即将 (常见的) 同伦余极限表达为一个函子的**Grothendieck 构造**。

相当一段时间后, 本人才意识到这个方法出现在 SGA 里面 (但是其特殊情形, 即 category of elements, 更早地被 Yoneda、MacLane 等人引入和发展), 用于构造纤维范畴 (fibred category, 即“范畴的覆盖”)。2007-2009 年在 Laboratoire de Mathématiques Jean Leray 工作期间, 深入学习 Leray 和 Grothendieck 的著作似乎是一件自然的事情。然而当年缺乏导向, 研究不得要领, 个人难以深入理解如 SGA 这样美妙而深奥的著作 (当前也只是触摸到这颗大树上的几片枝叶)。直到 2015 年 Balmer 关于群表示叠形的研究出现后, 作者产生新的动力, 抓住具体的方向, 尝试系统探索层论方法在模表示中的应用。在一定程度上, 这些讲义就是摸索过程中的副产品。这样的特点是内容的组织基于一条长期研究主线, 可能适合有限群和有限维代数表示背景读者; 但缺点也很明显, 材料取舍不尽合理、结构编排不够完善 (甚至存在人为谬误), 现有的八次讲义基本就完成了对 Grothendieck 层论的初步介绍。

由于一个座上的所有叠形构成**2-范畴**, 所以高阶层论成为高阶范畴理论的起点之一。作为后续, 作者将简要介绍纤维范畴、叠形理论和 2-范畴理论。同时, 由于前期还有现成的**经典层论**讲义, 本人也计划同步将相关内容逐步整理和上线。一旦完成, 这些内容有望抓住“黏合”这一要义呈现层论方法部分精髓, 通过若干具体例子, 期望为读者入门和进阶阅读提供一块垫脚石。

9 第九讲

在代数拓扑中，有各种纤维化 (fibration)，具有重要的理论和计算意义。本讲借鉴这个思路，引入范畴的 Grothendieck 纤维化，即纤维范畴 (fibered category)。在经典层论中，空间 X 上的平展空间对应着 X 上的集合层。我们将说明，范畴 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴对应着其上的 (反变) 伪函子 $\mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ 。因此，纤维范畴也能理解为“范畴预层” (presheaf of categories)。

9.1 覆盖空间基本定理

为便于导入纤维范畴概念，我们简要回顾代数拓扑中的覆盖空间基本定理。设 B 为拓扑空间 (底空间)， E 为其覆盖空间，即有连续的覆盖映射 $p: E \rightarrow B$ ，使得任意 $b \in B$ 都存在开邻域 V 而 $p^{-1}(V)$ 为 E 中开子集的不交并，且 p 限制在每个开子集上都是到 V 的同胚。

考虑基本群胚 (fundamental groupoid，一种小范畴) $\Pi_1(B)$ ：其对象为 B 中的点，态射 $[\gamma]: x \rightarrow y$ 为从点 x 到 y 的道路 γ 的同伦类。记 $p^{-1}(x) \subset E$ 为 x 的纤维。

根据覆盖空间性质，固定 $e \in p^{-1}(y)$ ，则 $[\gamma]$ 可以唯一地提升到 E 中，使其终点为 e 且起点属于 $p^{-1}(x)$ ，由此引入映射 $p^{-1}(y) \rightarrow p^{-1}(x)$ 。于是给定 E ，我们定义了一个集合预层 $\text{Fib}_E: \Pi_1(B) \rightarrow \text{Set}$ ，使得 $\text{Fib}_E(x) = p^{-1}(x)$ 。这实际上诱导产生函子

$$\text{Fib}_-: \text{Cov}(B) \rightarrow \text{Set}^{\Pi_1(B)^{op}}, E \mapsto \text{Fib}_E$$

其中 $\text{Cov}(B)$ 为 B 的所有覆盖空间形成的范畴，态射由以下交换图给定

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\phi} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}.$$

反之，若有集合预层 $\mathfrak{F}: \Pi_1(B) \rightarrow \text{Set}$ ，则可定义 $E_{\mathfrak{F}} = \bigsqcup_{x \in B} \mathfrak{F}(x)$ ，并引入自然的拓扑将其变为一个 B 上的覆盖空间 $p: E_{\mathfrak{F}} \rightarrow B$ 。这给出了一个函子 (重构)

$$\text{Rec}: \text{Set}^{\Pi_1(B)^{op}} \rightarrow \text{Cov}(B)$$

以上讨论引出代数拓扑中的基本定理之一。

定理 9.1.1: 覆盖空间基本定理

设底空间 B 为局部道路连通且半局部单连通。则 Fib 和 Rec 给出范畴等价 $\text{Cov}(B) \simeq \text{Set}^{\Pi_1(B)^{op}} = \text{PSh}(\Pi_1(B))$ 。

在经典层论中，覆盖映射被放宽为局部同胚 (local homeomorphism)，更一般地将空间上的平展空间 (étale space，在讲义的经典层论部分阐述) 对应其上的集合层，即 $\text{Et}(X) \simeq \text{Sh}(X) = \text{Sh}(\mathcal{P}_X, \mathcal{I}_{can})$ 。基于纤维化这一思想在拓扑中的重要地位，受此类定理的启发，我们希望将其移植到 Grothendieck 层论。因为此时没有通常意义下的拓扑空间，所以需要专门构思，以回答下方自然问题。

问题 9.1.2

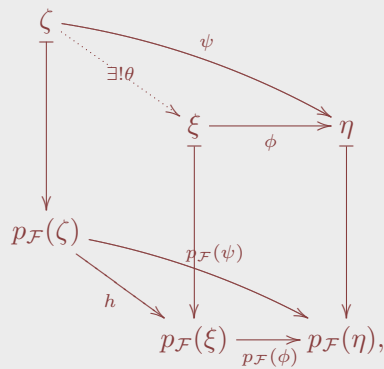
给定底范畴 $\mathcal{C}$ ，能否定义其上的覆盖范畴 $\mathcal{F}$ ，并从 $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 构造合理的“预层”，使这类“预层”的范畴等价于“ $\mathcal{C}$ 的所有覆盖范畴的范畴”？

9.2 笛卡尔态射与纤维范畴

从覆盖到预层，依赖道路的提升。为回答上述问题，我们需要模拟拓扑空间中的道路提升。

定义 9.2.1

设 $p_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子。令 $\phi: \xi \rightarrow \eta$ 为 $\mathcal{F}$ 中态射。若对 $\mathcal{F}$ 中 $\psi: \zeta \rightarrow \eta$ 及 $\mathcal{C}$ 中 $h: p_{\mathcal{F}}(\zeta) \rightarrow p_{\mathcal{F}}(\xi)$ 使得 $p_{\mathcal{F}}(\phi)h = p_{\mathcal{F}}(\psi)$ ，存在唯一 $\theta: \zeta \rightarrow \xi$ 满足 $p_{\mathcal{F}}(\theta) = h$ 且 $\phi\theta = \psi$ ，如下图



则称 $\mathcal{F}$ 中态射 $\phi: \xi \rightarrow \eta$ 为**笛卡尔**。

根据定义， $\mathcal{C}$ 中态射（相当于“道路”） h 可利用笛卡尔态射提升到 $\mathcal{F}$ 中。注意， $1_{\eta}: \eta \rightarrow \eta$ 总是笛卡尔。

令 $x = p_{\mathcal{F}}(\xi)$ 及 $y = p_{\mathcal{F}}(\eta)$ 。在此情形下，称 ξ 为 η 沿着 $p_{\mathcal{F}}(\phi)$ 到 $x = p_{\mathcal{F}}(\xi)$ 上的**拉回**。

注解 9.2.2

如果 $\xi \rightarrow \eta$ 及 $\tilde{\xi} \rightarrow \eta$ 均为 η 到 x 上的拉回，则由定义可知存在唯一 $\tilde{\theta}: \tilde{\xi} \rightarrow \xi$ 及 $\theta: \xi \rightarrow \tilde{\xi}$ ，而它们为互逆。于是拉回在同构意义下唯一。

从定义出发，我们很容易建立以下常用性质。

命题 9.2.3

1. 笛卡尔态射的合成仍为笛卡尔。
2. 设 $\phi \in \mathcal{F}$ ，且 $p_{\mathcal{F}}(\phi)$ 为同构，则 ϕ 为笛卡尔当且仅当 ϕ 为同构。
3. 若 $\xi \rightarrow \eta$ 及 $\eta \rightarrow \zeta$ 为态射，且 $\eta \rightarrow \zeta$ 为笛卡尔，则 $\xi \rightarrow \eta$ 为笛卡尔当且仅当 $\xi \rightarrow \zeta$ 为笛卡尔。
4. 设有 $p_{\mathcal{F}'}: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{C}$ 及 $\Theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ ，且 $\phi: \xi \rightarrow \eta$ 是 $\mathcal{F}$ 中态射。如果 ϕ 为 $\Theta(\xi) \rightarrow \Theta(\eta)$ 上笛卡尔，而 $\Theta(\phi)$ 为 $p_{\mathcal{F}'}(\Theta(\phi))$ 上笛卡尔，则 ϕ 为 $p_{\mathcal{F}}(\phi)$ 上笛卡尔。

利用笛卡尔态射，我们可以设计范畴的覆盖。

定义 9.2.4

设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上范畴，即存在 $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 。若对 $\mathcal{C}$ 中任意 $f : x \rightarrow y$ 以及 $\eta \in \mathcal{F}$ 使得 $p_{\mathcal{F}}(\eta) = y$ ，总存在笛卡尔态射 $\phi : \xi \rightarrow \eta$ 满足 $p_{\mathcal{F}}(\phi) = f$ ，则称 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上**纤维范畴** (fibered category)。

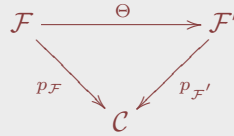
对任意范畴 $\mathcal{F}$ ，自然函子 $\mathcal{F} \rightarrow \bullet$ 构成一个纤维范畴。

在纤维范畴 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 框架下， $\mathcal{F}$ 中任意对象可以沿着 $\mathcal{C}$ 中态射拉回。比对覆盖空间情形，我们定义纤维范畴态射。

定义 9.2.5

设 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}'$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。**纤维范畴态射** $\Theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ 为函子，使得

1. $p_{\mathcal{F}} = p_{\mathcal{F}'} \circ \Theta$;



2. Θ 保持笛卡尔态射。

我们记 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴的范畴为 $\text{Fib}(\mathcal{C})$ ，并记 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ 为相应的态射集。

上述态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ 实际上具有一个范畴结构，我们很快就会介绍。以下结论可以通过定义直接验证。

命题 9.2.6

若 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴，而 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{G}$ 上纤维范畴，则 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。

我们在层论中已经见过纤维范畴的例子。

例 9.2.7

任取 $x \in \mathcal{C}$ ，切片范畴与配套的自然投影函子 $\mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}$ 构成一个纤维范畴，而 $\mathcal{C}/x$ 中每个态射都是笛卡尔。

若 $f : x \rightarrow y$ 为 $\mathcal{C}$ 中态射，则它诱导产生 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴态射 $\Theta_f : \mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}/y$ 。

我们还需要比较纤维范畴间的不同态射。

定义 9.2.8

如果 $\Theta, \Lambda : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ 为两个态射，则一个**保底自然变换** (base-preserving natural transformation) 是一个自然变换

$$F : \Theta \rightarrow \Lambda,$$

满足条件：对任意 $\xi \in \mathcal{F}$ ，

$$F_{\xi} : \Theta(\xi) \rightarrow \Lambda(\xi)$$

在纤维 $\mathcal{F}'(x)$ 中，其中 $x = p_{\mathcal{F}}(\xi) = p_{\mathcal{F}'}(\xi)$ 。

如果上述 F 还是自然同构，则称之为**保底自然同构**。

如有 $\Theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ 和 $\Theta' : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ 满足 $\Theta\Theta' \cong \text{Id}_{\mathcal{F}'}$ 且 $\Theta'\Theta \cong \text{Id}_{\mathcal{F}}$, 那么称 $\mathcal{C}$ 上这两个纤维范畴**等价**。

等价于 $\mathcal{C}/x$ (某个 x) 的纤维范畴叫做**可表** (representable)。

由于 $\text{Fib}(\bullet) = \text{Cat}$, 所以上述概念拓展了 Cat 的内蕴结构, 即 $\text{Fib}(\mathcal{C})$ 具有一个 2-范畴结构: 其对象是 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴, 1-态射是纤维范畴态射, 2-态射是保底自然变换。

9.3 纤维范畴产生伪函子

我们现在说明纤维范畴设计合理, 满足期望。上一节我们通过模拟道路提升, 引入了范畴覆盖的概念。对照经典情形, 我们希望还能将其描述为对应的“预层”。我们注意到在经典情形, 覆盖空间是由连续映射的纤维黏合而成。这些纤维恰好是对应预层的取值。

定义 9.3.1

设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。对 $x \in \mathcal{C}$, x 的**纤维**是 $\mathcal{F}$ 的子范畴 $\mathcal{F}(x)$, 其对象 ξ 满足 $p_{\mathcal{F}}(\xi) = x$ 而态射 ϕ 满足 $p_{\mathcal{F}}(\phi) = 1_x$ 。

由定义, 若 $\Theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴态射, 则 Θ 将 $\mathcal{F}(x)$ 映到 $\mathcal{F}'(x)$ 。记作 $\Theta|_x : \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}'(x)$, 叫作 Θ (在 x 上) 的**限制**。如果 $\Theta|_x, \forall x \in \mathcal{C}$, 总是等价, 则称 Θ 为**自然等价**。

注解 9.3.2

若 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴且 $f : x \rightarrow y$ 为 $\mathcal{C}$ 中态射。对 $\eta \in \mathcal{F}(y)$, 选择 η 沿着 f 到 x 上的一个拉回 $f^*(\eta) \in \mathcal{F}(x)$ (也记 $f^*(\eta) \xrightarrow{\phi_\eta} \eta$)。由此可引入函子

$$f^* : \mathcal{F}(y) \rightarrow \mathcal{F}(x).$$

若存在态射 $\beta : \eta' \rightarrow \eta \in \mathcal{F}(y)$, 从

$$\begin{array}{ccccc}
 f^*(\eta') & \xrightarrow{\phi_{\eta'}} & \eta' & & \\
 \downarrow & \searrow \exists! & \downarrow & \searrow \beta & \\
 & & f^*(\eta) & \xrightarrow{\phi_\eta} & \eta \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 x & \xrightarrow{f} & y & & \\
 & \searrow 1_x & \downarrow & \searrow 1_y & \\
 & & x & \xrightarrow{f} & y
 \end{array}$$

可知存在唯一态射

$$f^*(\beta) : f^*(\eta') \rightarrow f^*(\eta).$$

根据注解, 拉回依赖笛卡尔态射。为了帮助选取, 我们往往需要固定一个笛卡尔态射族。

定义 9.3.3

纤维范畴 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 的一个**解理** (cleavage) 是 $\mathcal{F}$ 中一个笛卡尔态射族 $\mathcal{K}$, 使得对每个 $\mathcal{C}$ 中态射 $f: x \rightarrow y$ 以及每个 $\eta \in \mathcal{F}(y)$, 存在 $\mathcal{K}$ 中唯一终点在 η 的态射 ϕ_η , 满足 $p_{\mathcal{F}}(\phi_\eta) = f$ 。

解理 (cleavage) 是一个力学术语, 解理性是指晶体在外力作用下沿特定结晶方向裂开形成光滑断面的性质, 主要取决于晶体的内部结构和结合力。我们借鉴此术语作为译文。

由选择公理, 每个纤维范畴都能取定一组解理。对选定了解理的纤维范畴 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$, 我们有以下信息:

1. 能对 $\mathcal{C}$ 中每一对象 y 指定范畴 $\mathcal{F}(y)$, 每一态射指定函子

$$f^*: \mathcal{F}(y) \rightarrow \mathcal{F}(x).$$

这非常像一个函子 $\mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ 。

2. 然而, $1_x^*: \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(x)$ 不必为恒等! 由定义, 对 $\forall x \in \mathcal{C}$, 及 $\xi \in \mathcal{F}(x)$, 拉回 $\varepsilon_x(\xi): 1_x^*(\xi) \rightarrow \xi$ 是同构。随着 ξ 变动, 产生函子 $\varepsilon_x: 1_x^* \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{F}(x)}$ 。
3. 若 $f: x \rightarrow y$ 及 $g: y \rightarrow z$ 中态射且 $p_{\mathcal{F}}(\xi) = z$ 。则有同构 $\alpha_{f,g}(\xi): f^*g^*(\xi) \rightarrow (gf)^*(\xi)$ 。随着 ξ 变动, 产生自然同构

$$\alpha_{f,g}: f^*g^* \rightarrow (gf)^*.$$

基于以上分析, 我们获得一个比函子更弱的构造。

定义 9.3.4

范畴 $\mathcal{C}$ 上一个**伪函子** Φ 由以下构成:

1. 对 $\forall x \in \mathcal{C}$, 存在范畴 $\Phi(x)$;
2. 对 $\forall f: x \rightarrow y$, 存在函子

$$f^*: \Phi(y) \rightarrow \Phi(x);$$

3. 对 $\forall x \in \mathcal{C}$, 存在自然同构

$$\varepsilon_x^*: 1_x^* \rightarrow \text{Id}_{\Phi(x)};$$

4. 对 $\forall x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$, 存在自然同构

$$\alpha_{f,g}: f^*g^* \rightarrow (gf)^*.$$

它们需要满足以下条件:

- (i) 对 $\forall f: x \rightarrow y$ 及 $\eta \in \Phi(y)$, 有 $\alpha_{1_x, f}(\eta) = \varepsilon_x(f^*(\eta))$:

$$1_x^*(f^*(\eta)) \rightarrow f^*(\eta)$$

且 $\alpha_{f, 1_y}(\eta) = f^*\varepsilon_y(\eta)$:

$$f^*1_y^*(\eta) \rightarrow f^*(\eta).$$

(ii) 对 $\forall x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} w$ 及 $\theta \in \mathcal{F}(w)$, 下图交换

$$\begin{array}{ccc} f^* g^* h^*(\theta) & \xrightarrow{\alpha_{f,g}(h^*(\theta))} & (gf)^* h^*(\theta) \\ f^* \alpha_{gh}(\theta) \downarrow & & \downarrow \alpha_{gh,f}(\theta) \\ f^*(hg)^*(\theta) & \xrightarrow{\alpha_{f,hg}(\theta)} & (hgf)^*(\theta). \end{array}$$

任意 (真) 函子 $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ 均为伪函子。

命题 9.3.5

给定解理的 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴 $\mathcal{F}$ 定义了 $\mathcal{C}$ 上一个伪函子。

证明. 只需要验证两个条件 (i), (ii) 成立。关于第一条:

$$\begin{array}{ccccc} 1_x^* & & & & \\ \downarrow & \searrow f^*(\eta) & & \searrow & \\ & f^*(\eta) & \longrightarrow & \eta & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ x & & f & & y \\ & \searrow 1_x & & \searrow & \\ & x & \xrightarrow{f} & y & \end{array}$$

由于 $\alpha_{1_x, f}(\eta)$ 与 $\varepsilon_x(f^*(\eta))$ 在 $p_{\mathcal{F}}$ 下的像均为 1_x 且满足交换图, 所以它们相等。第二个等式类似。

关于第二条, 对于 $\xi \mapsto w$, 存在两个拉回及唯一态射

$$\begin{array}{ccc} f^* g^* h^*(\xi) & \xrightarrow{\exists!} & (hgf)^*(\xi) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \xi & \end{array}$$

然而 $\alpha_{gh, f}(\xi)\alpha_{f, g}(h^*(\xi))$ 与 $\alpha_{f, hg}(\xi)f^*(\alpha_{g, h}(\xi))$ 均能填入水平位置, 因此它们相等。□

定义 9.3.6

如果一个纤维范畴的解理包含所有恒等态射且关于合成封闭, 那么称之为一个**裂解** (splitting)。此时也称该纤维范畴**分裂** (split)。

命题 9.3.7

由一个解理给出的伪函子是函子当且仅当它是一个裂解。

证明. 从定义可直接验证。□

然而, 并非每个纤维范畴都分裂。

例 9.3.8

将群同态 $\phi: G \rightarrow H$ 看作函子。则 G 中所有态射均为笛卡尔，而 G 是 H 上纤维范畴当且仅当 ϕ 是满。此时 G 中一个解理与 H 的元素 1-1 对应。这样的解理为一个裂解当且仅当它同构于 H 。在此情况下，

$$H \hookrightarrow G \rightarrow H,$$

即 G 通过 H 分裂。

我们需要比较伪函子。

定义 9.3.9

令 $\Phi, \Psi: \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ 为两个伪函子。一个**宽松变换** (lax transformation) $\Theta: \Phi \rightarrow \Psi$ 包含以下数据

1. 对任意 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ，一个 (真) 函子 $\Theta(x): \Phi(x) \rightarrow \Psi(x)$ ，
2. 对任意 $f: x \rightarrow y$ ，一个自然同构 $\Theta(f): \Psi(f) \circ \Theta(x) \Rightarrow \Theta(y) \circ \Phi(f)$ ，即有

$$\begin{array}{ccc} \Phi(x) & \xrightarrow{\Phi(f)} & \Phi(y) \\ \Theta(x) \downarrow & \nearrow & \downarrow \Theta(y) \\ \Psi(x) & \xrightarrow{\Psi(f)} & \Psi(y) \end{array}$$

满足以下交换图

1.

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\Psi(x)} \circ \Theta(x) & \xRightarrow{=} & \Psi(1_x) \circ \Theta(x) \\ \downarrow & & \downarrow \Theta(1_x) \\ \Theta(x) & & \\ \downarrow & & \\ \Theta(x) \circ \text{Id}_{\Phi(x)} & \xRightarrow{=} & \Theta(x) \circ \Phi(1_x), \end{array}$$

2. 对任意 $f: x \rightarrow y$ 和 $g: y \rightarrow z$ ，有

$$\begin{array}{ccccc} \Psi(g) \circ (\Theta(y) \circ \Phi(f)) & \longrightarrow & (\Psi(g) \circ \Theta(y)) \circ \Phi(f) & \longrightarrow & (\Theta(z) \circ \Phi(g)) \circ \Phi(f) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \Psi(g) \circ (\Psi(f) \circ \Theta(x)) & & & & \Theta(z) \circ (\Phi(g) \circ \Phi(f)) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ (\Psi(g) \circ \Psi(f)) \circ \Theta(x) & \longrightarrow & \Psi(gf) \circ \Theta(x) & \longrightarrow & \Theta(z) \circ \Phi(gf). \end{array}$$

我们还需要比较不同的宽松变换。

定义 9.3.10

设 Φ 和 Ψ 是 $\mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ 的两个伪函子，且 $\Theta, \Lambda : \Phi \rightarrow \Psi$ 为两个宽松变换。一个修正 (modification) $T : \Theta \rightarrow \Lambda$ 给每个 $x \in \text{Ob } \mathcal{C}$ 指定一个自然变换 $T_x : \Theta(x) \Rightarrow \Lambda(x)$ ，使得对任意 $\mathcal{C}$ 中态射 $\alpha : x \rightarrow y$ ，以下为交换图

$$\begin{array}{ccc} \Psi(\alpha) \circ \Theta(x) & \xRightarrow{\text{Id}_{\Psi(\alpha)} \star T_x} & \Psi(\alpha) \circ \Lambda(x) \\ \Theta(\alpha) \Downarrow & & \Downarrow \Lambda(\alpha) \\ \Theta(y) \circ \Phi(\alpha) & \xRightarrow{T_y \star \text{Id}_{\Phi(\alpha)}} & \Lambda(y) \circ \Phi(\alpha). \end{array}$$

有了上述概念，我们就可以引入伪函子的等价等定义。我们已经看到纤维范畴能产生伪函子，因此术语有对应关系。不幸的是，在两种语境下各层次态射的名称差异较大，我们列举如下。

术语对比	对象	纤维范畴	伪函子
	1-态射	态射	宽松变换
	2-态射	保底自然变换	修正

我们记 $\mathcal{C}$ 上所有伪函子构成的范畴为 $\text{Pf}(\mathcal{C})$ ，它实际上也是一个 2-范畴。

如果将伪函子的取值范围从 Cat 扩展为一般 2-范畴，那么我们就得到 2-函子 (2-functor)，真正步入 2-范畴理论。

9.4 伪函子产生纤维范畴

假设 Φ 为 $\mathcal{C}$ 上一个伪函子。我们构造一个纤维范畴 $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 。范畴 $\mathcal{F} = \int_{\mathcal{C}} \Phi$ ，叫做 Φ 的 Grothendieck 构造，定义如下：

1. 对象: (x, ξ) , $x \in \mathcal{F}$, $\xi \in \Phi(x)$;
2. 态射: $(x, \xi) \rightarrow (y, \eta)$ 是一个对 (f, α) ，其中 $f : x \rightarrow y$ 是 $\mathcal{C}$ 中态射，而 $\alpha : \xi \rightarrow f^*(\eta)$ 是 $\Phi(x)$ 中态射。若

$$(f, \alpha) : (x, \xi) \rightarrow (y, \eta)$$

及

$$(g, \beta) : (y, \eta) \rightarrow (z, \xi)$$

为两个态射，则

$$(g, \beta) \circ (f, \alpha) = (gf, \beta * \alpha),$$

其中 $\beta * \alpha$ 为以下态射合成

$$\xi \rightarrow f^*(\eta) \xrightarrow{f^*(\beta)} f^*g^*(\xi) \xrightarrow{\alpha_{f,g}(\xi)} (gf)^*(\xi).$$

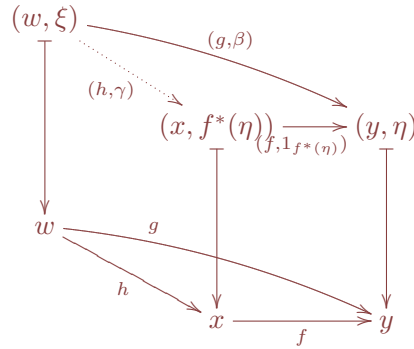
我们能够立即验证 $\mathcal{F}$ 确实是 $\mathcal{C}$ 上范畴：

1. 合成满足结合律；
2. $1_{x, \xi} = (1_x, \varepsilon_x(\xi)^{-1})$ ；
3. $p_{\mathcal{F}}(x, \xi) = x$, $p_{\mathcal{F}}(f, \alpha) = f$ 。

下一步我们验证 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴：对于 $f: x \rightarrow y$ 及 $(y, \eta) \in p_{\mathcal{F}}^{-1}(y)$ ，我们说明

$$(f, 1_{f^*(\eta)}) : (x, f^*(\eta)) \rightarrow (y, \eta)$$

为笛卡尔。设有



假设有 $(h, \gamma) : (w, \xi) \rightarrow (x, f^*(\eta))$ 满足以上交换图，则直接计算可得 $\gamma = \alpha_{h, f}(\eta)^{-1} \circ \beta$ 。这不仅说明 $(f, 1_{f^*(\eta)})$, $\forall f: x \rightarrow y$ ，为笛卡尔，还提供一个解理。最后，易见 $\mathcal{F}(x) \simeq \Phi(x)$ 。

定理 9.4.1

从纤维范畴构造伪函子，与从伪函子产生纤维范畴，这两个过程互逆。于是“ $\mathcal{C}$ 上纤维范畴”相当于“ $\mathcal{C}$ 上伪函子”。类比覆盖空间基本定理，我们有范畴等价

$$\mathbf{Fib}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Pf}(\mathcal{C}).$$

证明. 因为我们在前面已经构造了双向的函子，所以此处只需验证它们互为拟逆。这是一个非常形式化，但是非常繁琐的过程。我们在此暂时略过。感兴趣的读者可以自行尝试证明，或阅读 Stacks Project 等标准参考文献。 $\square$

例 9.4.2

考虑真函子 $h_x: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 。则它通过 Grothendieck 构造产生的纤维范畴恰为切片范畴及其自然投影函子 $\mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}$

如果一个纤维范畴的纤维都是集合，那么称之为**集合纤维范畴** (category fibered in sets)。

引理 9.4.3

底范畴 $\mathcal{C}$ 上的集合纤维范畴等价于 $\mathcal{C}$ 上的集合预层范畴。

证明. 这本质上与前面建立纤维范畴与伪函子的对应关系类似，我们只需注意到 $\mathbf{Set}$ (作为一个 2-范畴) 只有平凡的 1-态射 1_x 和平凡的 2-态射 $\mathrm{Id}_{1_x}, \forall x \in \mathcal{C}$ 。 $\square$

由于 h_x 对应 $\mathcal{C}/x$ ，所以我们能够给出 Yoneda 引理的 2-阶版本。

引理 9.4.4: 2-Yoneda 引理

设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。任取 $x \in \mathcal{C}$ ，我们有范畴等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(x).$$

证明. 首先，我们构造一个函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}(x).$$

对于 $\Theta : \mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{F}$ ，考虑限制 $\Theta|_x : (\mathcal{C}/x)(x) \rightarrow \mathcal{F}(x)$ ，并取 $\Theta|_x(x, 1_x) \in \mathcal{F}(x)$ 。如果 $F : \Theta \rightarrow \Lambda$ 是保底自然变换，那么它产生 $\mathcal{F}(x)$ 一个中态射

$$\Theta|_x(x, 1_x) \rightarrow \Lambda|_x(x, 1_x).$$

其次，若有 $\mathcal{F}(x)$ 中对象 ξ 以及态射 $\phi : \xi \rightarrow \eta$ ，则 $p_{\mathcal{F}}(\xi) = x$ 且 $p_{\mathcal{F}}(\phi) = 1_x$ 。由于 $(x, 1_x)$ 是 $\mathcal{C}/x$ 的终对象，所以可以定义态射 $\Theta_{\xi} : \mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{F}$ 使得 $\forall (w, f) \in \mathcal{C}/x$

$$\Theta_{\xi}(w, f) = f^*(\xi) \in \mathcal{F}(w).$$

对于 $\phi : \xi \rightarrow \eta$ ，我们可定义保底自然变换 $F : \Theta_{\xi} \rightarrow \Theta_{\eta}$ 使得

$$F_{(w, f)} = f^* \phi : \Theta_{\xi}(w, f) \rightarrow \Theta_{\eta}(w, f).$$

最后，可以验证上述两个函子互为拟逆。得证。 $\square$

9.5 三个例子

例 9.5.1

假设 $\mathcal{C}$ 是有纤维积的范畴。令 $\mathcal{F} = \mathrm{Arr}\mathcal{C}$ 为**箭头范畴**：其对象为 $\mathcal{C}$ 中所有箭头，而 $f : x \rightarrow u$ 到 $g : y \rightarrow v$ 的态射是一个对 (α, β) ，满足交换图

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha} & y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ u & \xrightarrow{\beta} & v \end{array}$$

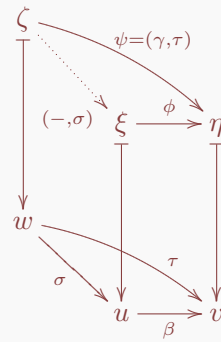
令 $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 $p_{\mathcal{F}}(f) = u$ 且 $p_{\mathcal{F}}(\alpha, \beta) = \beta$ 。我们说明这构成一个纤维范畴。

验证：设 $\beta : u \rightarrow v$ 为 $\mathcal{C}$ 中态射，且 $\eta = (y \xrightarrow{g} v)$ 为 $\mathrm{Arr}\mathcal{C}$ 中对象。我们需要找到笛卡尔态射 $\phi : \xi \rightarrow \eta$ ，使得 $p_{\mathcal{F}}(\phi) = \beta$ 。

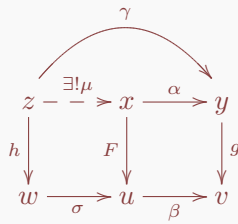
我们取拉回 $x = u \times_v y$ ，即有交换图

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha} & y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ u & \xrightarrow{\beta} & v \end{array}$$

设 $\xi = (x \xrightarrow{f} u)$ 。若有 $\zeta = (z \xrightarrow{h} w)$ 以及 (实线) 交换图



我们希望填补虚线部分, 使全图交换。首先, 虚线态射形如 $(-, \sigma)$, 我们需要确定第一个分量。其次, 由纤维积的泛性质可得



将 μ 填入上图即得 $\zeta \xrightarrow{(\mu, \sigma)} \xi$ 的存在和唯一性。这说明 $\text{Arr} \mathcal{C}$ 确为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。

读者可以尝试写出上例纤维范畴对应的伪函子。

例 9.5.2

在模表示中, 我们前面考虑过 $\mathcal{C} = \mathcal{O}(G)$ 以及它上面的拓扑和层。从叠形理论角度, Paul Balmer 定义了函子

$$\mathfrak{Mod} : \mathcal{O}(G) \rightarrow k\text{-Cat},$$

其中 $k\text{-Cat}$ 是 k -线性范畴的范畴, 使得

$$\mathfrak{Mod}(G/H) = \text{Mod-}kH, \forall H.$$

因为任意态射 $G/H \rightarrow G/L$ 均由 $H \mapsto Hg$ 给定, 且满足 $gHg^{-1} \subset L$, 所以此态射诱导自然的限制函子

$$\text{Mod-}kL \rightarrow \text{Mod-}kH.$$

从这个真函子出发, 利用 Grothendieck 构造我们得到 $\mathcal{O}(G)$ 上的纤维范畴。如果将模范畴替换为到处模范畴或者稳定模范畴, 我们得到两个不同的函子和相应的纤维范畴。读者可以根据定义把这些纤维范畴具体描述出来。

最后, 我们给出一个经典的构造。

例 9.5.3

回顾我们关于切片范畴和切片拓扑斯的讨论: 设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为一个座, 对 $x \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}/x$ 具有自

然的拓扑（诱导拓扑）。简称 $\mathbf{C}/x$ 上的层为 x 上的层，相应的层范畴记作 $\mathrm{Sh}(\mathbf{C}/x)$ 。

若 $f : x \rightarrow y$ 为 $\mathcal{C}$ 中态射，则存在限制函子 $f_* : \mathrm{Sh}(\mathbf{C}/y) \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{C}/x)$ 。特别地 $(1_x)_* : \mathrm{Sh}(\mathbf{C}/x) \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbf{C}/x)$ 为恒等，且 $(gf)_* = f_*g_*$ 。此时，我们构造了一个函子 $\mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Cat}$, $x \mapsto \mathrm{Sh}(\mathbf{C}/x)$ 。这给出纤维范畴 $\mathcal{F} := \mathrm{Sh}/\mathbf{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ，且纤维 $(\mathrm{Sh}/\mathbf{C})(x) \simeq \mathrm{Sh}(\mathbf{C}/x)$ 。

下一讲我们将充分利用拓扑，将纤维范畴，即“范畴预层”（presheaves of categories），一般化为“范畴层”（sheaves of categories），即**叠形**（stack）。

10 第十讲

如第二讲所陈述, stack 最早是在 1952 年左右被用作法语中“层”的英语翻译, 后来被 sheaf 一词所取代。基于 Giraud 在 1965 年左右定义的 champ 这一概念 (相关专著 1971 年由 Springer 出版), 1969 年 Deligne-Mumford 引入了 algebraic stack 这一术语, 正式确立 stack 为 champ 的英语译名。

前面我们构造了以下嵌入或扩充

$$\mathcal{C} \hookrightarrow \text{PSh}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \text{Fib}(\mathcal{C})$$

在 $\mathcal{C}$ 上赋予拓扑后, 我们已经引入了集合层。我们也能定义范畴层 (“sheaf of categories”), 即 **叠形** (stack)。类比层的定义: 集合预层 $\mathfrak{F}$ 为层, 当且仅当对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}, \forall S \in \mathcal{J}(x)$, 以下自然映射总是同构

$$\text{Nat}(h_x, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\cong} \text{Nat}(S, \mathfrak{F}).$$

我们将定义纤维范畴 (“范畴预层”) $\mathcal{F}$ 为叠形 (“范畴层”), 当且仅当对 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}, \forall S \in \mathcal{J}(x)$, 以下 (由 $\mathcal{C}/S \rightarrow \mathcal{C}/x$ 诱导的、介于 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴的态射范畴之间的) 自然函子总是等价

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F}).$$

注意 $\mathcal{C}/S$ 是筛 S 对应的纤维范畴, 而 $\mathcal{C}/x = \mathcal{C}/h_x$ 称为可表。上式右边的范畴 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F})$, 叫做 “ $\mathcal{F}$ 对于 S 的下降数据范畴” (category of descent data)。如果用伪函子的语言来描述, 上式写成

$$\text{Lax}_{\mathcal{C}}(h_x, \Phi_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\cong} \text{Lax}_{\mathcal{C}}(S, \Phi_{\mathcal{F}}).$$

10.1 下降数据范畴

在几何应用中, 我们看到的下降数据范畴的定义往往相对特殊、直观和具体。我们将从常见形式出发, 然后说明它能转化为引言中定义的形式。我们的讨论类似于在第一讲中, 将经典层论用范畴论的语言不断分析和改写 (浓缩并形式简化), 最终引出 Grothendieck 层的定义之过程。

设 $\mathcal{C}$ 上**存在纤维积** (如空间 X 的开集偏序集 $\mathcal{P}_X$), 且存在 Grothendieck 拓扑 (基), 使得 $\mathcal{C}$ 为座。设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴, 取定一个解理。

设 $\mathcal{U}_x = \{\sigma_i : x_i \rightarrow x\}$ 为 $x \in \mathcal{C}$ 的覆盖 (即 $\mathcal{U}_x$ 生成的筛为覆盖筛)。记 $x_{ij} = x_i \times_x x_j$ 且 $x_{ijk} = x_i \times_x x_j \times_x x_k, \forall i, j, k$, 且 pr_a 和 pr_{ab} 为到相应分量的投影, 其中 $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ 。

定义 10.1.1

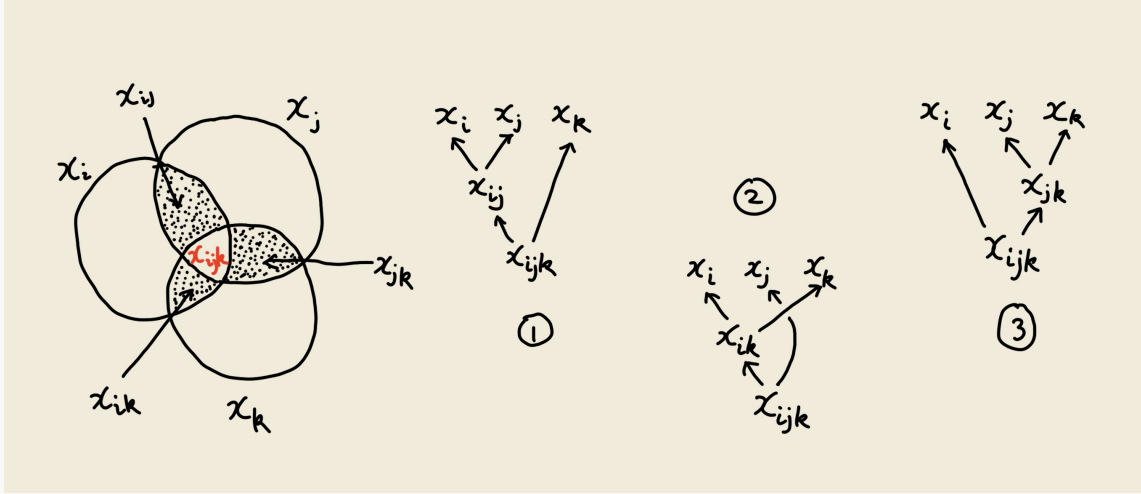
给定座 $\mathbf{C}$ 以及 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 。设 $\mathcal{U}_x$ 为 x 的覆盖。则 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴 $\mathcal{F}$ 对于 $\mathcal{U}_x$ 的**一组下降数据** (an object with descent data) 记为 $(\{\xi_i\}_i, \{\phi_{ij}\}_{i,j})$, 其中 $\xi_i \in \mathcal{F}(x_i), \forall i$, 以及同构 $\phi_{ij} : pr_2^*(\xi_j) \cong pr_1^*(\xi_i) \in \mathcal{F}(x_{ij})$, 满足上圈 (cocycle) 条件

$$pr_{13}^*(\phi_{ik}) = pr_{12}^*(\phi_{ij})pr_{23}^*(\phi_{jk}) : pr_{13}^*(\xi_j) \rightarrow pr_{13}^*(\xi_i).$$

此处 $\{\phi_{ij}\}_{i,j}$ 叫作**过渡同构** (transition isomorphisms) 族。

注解 10.1.2

因为 $\xi_i \in \mathcal{F}(x_i)$ 由三种方式限制（或拉回）到 $\mathcal{F}(x_{ijk})$ ，所以我们希望三个过程给出“相同”结果。



然而在范畴中，严格相等是不自然的，因此我们只能追求同构： $\phi_{ik} : pr_2^*(\xi_k) \xrightarrow{\cong} pr_1^*(\xi_i)$ 是 $\mathcal{F}(x_{ik})$ 中同构， $p_{13}^*(\phi_{ik}) : p_{13}^*pr_2^*(\xi_k) \xrightarrow{\cong} p_{13}^*pr_1^*(\xi_i)$ 是 $\mathcal{F}(x_{ijk})$ 中同构。

定义 10.1.3

给定座 $\mathbf{C}$ 以及 $x \in \text{Ob} \mathbf{C}$ 。若 $(\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\})$ 及 $(\{\eta_i\}, \{\psi_{ij}\})$ 为 $\mathcal{U}_x$ 上两组下降数据，则态射

$$\{\alpha_i\}_i : (\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\}) \rightarrow (\{\eta_i\}, \{\psi_{ij}\})$$

包含 $\mathcal{F}(x_i)$ 中态射 $\alpha_i : \xi_i \rightarrow \eta_i$ ，使得对 $\forall i, j$ 下图交换：

$$\begin{array}{ccc} pr_2^*(\xi_j) & \xrightarrow{pr_2^*(\alpha_j)} & pr_2^*(\eta_j) \\ \phi_{ij} \downarrow & & \downarrow \psi_{ij} \\ pr_1^*(\xi_i) & \xrightarrow{pr_1^*(\alpha_i)} & pr_1^*(\eta_i). \end{array}$$

容易验证 $\mathcal{U}_x$ 上所有下降数据构成一个范畴，记作 $\mathcal{F}(\mathcal{U}_x)$ （或 $\mathcal{F}(\{x_i \xrightarrow{\sigma_i} x\}_i)$ ）。

注解 10.1.4

范畴 $\mathcal{F}(\mathcal{U}_x)$ 不依赖于纤维积的选取，不同的选择给出同构的范畴。

例 10.1.5

对 $\forall \xi \in \mathcal{F}(x)$ ，我们可以构造 $\mathcal{F}(\mathcal{U}_x)$ 中对象：令 $\xi_i = \sigma_i^*(\xi)$ 。由于 $pr_2^*\sigma_j^*(\xi)$ 和 $pr_1^*\sigma_i^*(\xi)$ 均 ξ 为到 U_{ij} 的拉回，所以存在自然同构 ϕ_{ij} 。可以验证 $(\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\})$ 为一组下降数据。

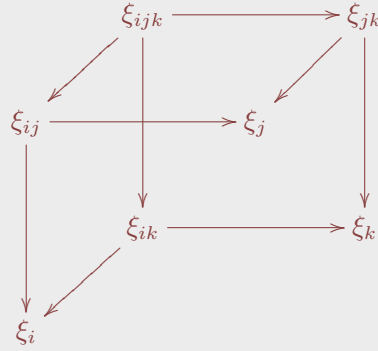
此外, 对于 $\mathcal{F}(x)$ 中 $\alpha: \xi \rightarrow \eta$, 可产生态射 $\alpha_i: \sigma_i^*(\xi) \rightarrow \sigma_i^*(\eta)$, 并与 $\{\phi_{ij}\}$ 和 $\{\psi_{ij}\}$ 相匹配。

于是, 存在函子 $\mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}_x)$ 。

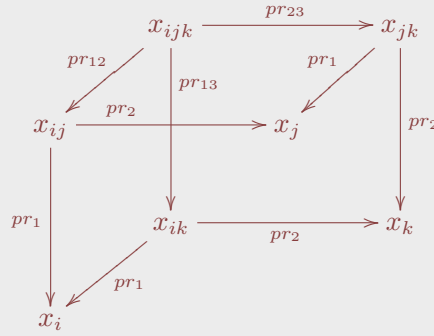
上述定义依赖解理 (因而不理想), 我们下面给出一个不依赖于解理的下降数据范畴的定义。

定义 10.1.6

给定座 $\mathbf{C}$ 以及 $x \in \text{Ob} \mathbf{C}$ 。设 $\mathcal{U}_x$ 是 x 的一个覆盖, 其上一个下降数据为三元组 $(\{\xi_i\}, \{\xi_{ij}\}, \{\xi_{ijk}\})$, $i, j, k \in I$, 使得, $\xi_\alpha \in \mathcal{F}(x_I)$ (I 为 i 或 ij 或 ijk 形式之一)。对每组 ijk , 构造交换图



且所有态射均为笛卡尔, 而上图在 $p_{\mathcal{F}}$ 下的像为



态射

$$\{\phi_i\}_i: (\{\xi_i\}, \{\xi_{ij}\}, \{\xi_{ijk}\}) \rightarrow (\{\eta_i\}, \{\eta_{ij}\}, \{\eta_{ijk}\})$$

由 $\phi_i: \xi_i \rightarrow \eta_i$ 组成, 满足 $pr_1^*(\phi_i) = pr_2^*(\phi_j): \xi_{ij} \rightarrow \eta_{ij}$ ($\mathcal{F}(x_i)$ 中态射)。

以上信息组成范畴 $\mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x)$ 。

注解 10.1.7

如果选定一个解理, 则可构造函数

$$\mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}_x).$$

具体来说, 若 $(\{\xi_i\}, \{\xi_{ij}\}, \{\xi_{ijk}\}) \in \mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U})$, 则 $\xi_{ij} \rightarrow \xi_i$ 及 $\xi_{ij} \rightarrow \xi_j$ 诱导同构 $\xi_{ij} \xrightarrow{\sim} pr_1^*(\xi_i)$ 及 $\xi_{ij} \xrightarrow{\sim} pr_2^*(\xi_j)$ 。由此产生了 $\phi_{ij}: pr_2^*(\xi_j) \rightarrow pr_1^*(\xi_i)$, 并且可验证它们满足上圈条件, 因而给出 $\mathcal{F}(\mathcal{U}_x)$ 中一个对象。同时, $\mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x)$ 中态射自动产生 $\mathcal{F}(\mathcal{U}_x)$ 中态射。

通过直接计算可验证以上函子为范畴等价，因此我们统称上述两个定义中的范畴为 $\mathcal{F}$ 对于 $\mathcal{U}_x$ 的下降数据范畴，并有 $\mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x)$ 。

10.2 广义下降数据范畴

现在我们进一步说明，若 S 为 $\mathcal{U}_x$ 生成的覆盖筛，则下降数据范畴等价于 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F})$ 。取纤维范畴态射 $\Theta: \mathcal{C}/S \rightarrow \mathcal{F}$ ，有

$$\Theta p_{\mathcal{F}} = pr: \mathcal{C}/S \rightarrow \mathcal{C}.$$

对于 i, j, k ，有 $\mathcal{C}/S$ 中对象 (x_i, σ_i) ， (x_{ij}, σ_{ij}) 及 (x_{ijk}, σ_{ijk}) ，而

$$\begin{array}{ccc} x_{ijk} & \xrightarrow{pr_{12}} & x_{ij} \\ & \searrow & \swarrow \\ & x & \end{array}$$

等等是 $\mathcal{C}/S$ 中态射。应用 Θ 可得 $\mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x)$ 中对象

$$\begin{array}{ccccc} & & \Theta(x_{ijk}, \sigma_{ijk}) & \longrightarrow & \Theta(x_{jk}, \sigma_{jk}) \\ & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \Theta(x_{ij}, \sigma_{ij}) & \longrightarrow & \Theta(x_j, \sigma_j) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \Theta(x_{ik}, \sigma_{ik}) & \longrightarrow & \Theta(x_k, \sigma_k) \\ & \swarrow & & & \\ & \Theta(x_i, \sigma_i) & & & \end{array}$$

由此可构造函数 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U})$ 以及 $\mathcal{F}(x) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F})$ 。

命题 10.2.1

函子 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x)$ 为等价。

证明. 我们构造一个拟逆。由于 S 是 $\mathcal{U}_x$ 生成，所以对于 $\forall y$ 以及 $S(y)$ 中态射 $y \xrightarrow{\sigma} x$ （即 $(y, \sigma) \in \text{Ob}(\mathcal{C}/S)$ ），总能选择 x_i 使其分解为 $y \rightarrow x_i \rightarrow x$ 。

首先，假设 $(\{\xi_i\}, \{\xi_{ij}\}, \{\xi_{ijk}\}) \in \mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x)$ 。则 $\xi_i \in \mathcal{F}(x_i)$ 可沿 $y \rightarrow x_i$ 拉回到 $\xi_y \in \mathcal{F}(y)$ 。我们可以看出 ξ_y 不依赖 σ 分解的选取。这给出 $\mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x)$ 的对象到 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F})$ 的对象上的一个映射

$$(\{\xi_i\}, \{\xi_{ij}\}, \{\xi_{ijk}\}) \mapsto \theta$$

使得 $\theta(y, \sigma) = \xi_y$ 。

其次，已知 $\mathcal{C}/S$ 中所有态射都是笛卡尔。现任取态射 $\mathcal{C}/S$ 中 $f: (y', \sigma') \rightarrow (y, \sigma)$

$$\begin{array}{ccc} y' & \xrightarrow{f} & y \\ & \searrow \sigma' & \swarrow \sigma \\ & x & \end{array}$$

由给定的分解 $y' \rightarrow x_j \rightarrow x$ 及 $y \rightarrow x_i \rightarrow x$ 产生

$$\begin{array}{ccccc} y' & \cdots \rightarrow & x_{ij} & \rightarrow & x_j \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \\ y & \rightarrow & x_i & \rightarrow & x \end{array}$$

由于 $\xi_{ij} \rightarrow \xi_j$ 为笛卡尔, $\xi_{y'} \rightarrow \xi_j$ 通过 ξ_{ij} 唯一分解为 $\xi_{y'} \rightarrow \xi_{ij} \rightarrow \xi_j$ (且 $\xi_{y'} \rightarrow \xi_{ij}$ 映到 $y' \rightarrow x_{ij}$)。合成 $\xi_{y'} \rightarrow \xi_{ij} \rightarrow \xi_i$ 唯一分解为 $\xi_{y'} \xrightarrow{\theta(f)} \xi_y \rightarrow \xi_i$ (且 $\xi_{y'} \rightarrow \xi_y$ 映到 $y' \rightarrow y$)。于是 $\mathcal{F}$ 中态射 $\xi_{y'} \xrightarrow{\theta(f)} \xi_y$ 为笛卡尔。我们得到从 $\mathcal{C}/S$ 的态射到 $\mathcal{F}$ 的态射的一个映射 $f \mapsto \theta(f)$, 保持笛卡尔态射。

以上构造产生一个纤维范畴态射 $\theta: \mathcal{C}/S \rightarrow \mathcal{F}$ 。

最后可验证两个合成

$$\mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x)$$

及

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_{desc}(\mathcal{U}_x) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F})$$

均自然同构于恒等函子。 □

基于以上讨论, 我们给出下降数据范畴一般性定义, 不依赖纤维积的存在性。

定义 10.2.2

给定座 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$, $x \in \mathcal{C}$ 以及 $S \in \mathcal{J}(x)$ 。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴, 则称 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F})$ 为 $\mathcal{F}$ 对于 S 的下降数据范畴。

有些文献为了简便, 会将下降数据范畴简记为 $\text{Hom}(S, \mathcal{F})$ 。实际上更准确的记法应该是宽松变换范畴 $\text{Lax}_{\mathcal{C}}(S, \Phi_{\mathcal{F}})$, 其中 $\Phi_{\mathcal{F}}$ 是 $\mathcal{F}$ 对应的伪函子。我们为了后面表述方便, 记

1. $\mathcal{F}(S) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F})$;
2. $\mathcal{F}(x) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F})$.

为了便于进一步讨论, 我们需要考虑最一般的下降数据范畴。若 $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^{\wedge}$, 那么可以定义

$$\mathcal{F}(\mathfrak{F}) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/\mathfrak{F}, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}}(\mathcal{C}/\mathfrak{F}, \mathcal{F}|_{\mathfrak{F}}),$$

其中 $\mathcal{F}|_{\mathfrak{F}}$ 是 Cat 中拉回 (是 $\mathcal{C}/\mathfrak{F}$ 上纤维范畴, 术语叫 pushforward of $\mathcal{F}$ along pr)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}|_{\mathfrak{F}} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}/\mathfrak{F} & \xrightarrow{pr} & \mathcal{C} \end{array}$$

若 $\mathcal{F}$ 对应着伪函子 $\Phi_{\mathcal{F}}$, 则上述拉回对应伪函子 $\Phi_{\mathcal{F}}|_{\mathfrak{F}}: \mathcal{C}/\mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C} \rightsquigarrow \text{Cat}$ 且

$$\mathcal{F}(\mathfrak{F}) \simeq \text{Lax}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{F}, \Phi_{\mathcal{F}}) \simeq \text{Lax}_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}_{\bullet}, \Phi_{\mathcal{F}}|_{\mathfrak{F}}).$$

换一个角度考虑, 对于 $\mathcal{C}$ 上伪函子 $\Phi_{\mathcal{F}}$, 我们定义了 $\Phi_{\mathcal{F}}$ 到 $\mathcal{C}^{\wedge}$ 上的延拓 (保留同样记号): 我们令 $\Phi_{\mathcal{F}}(h_x) := \Phi_{\mathcal{F}}(x)$, 且对任意 $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^{\wedge}$, 进一步要求

$$\Phi_{\mathcal{F}}(\mathfrak{F}) := \varprojlim_{(x, \alpha) \in \mathcal{C}/\mathfrak{F}} \Phi_{\mathcal{F}}(x).$$

这实际上等同于

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\mathcal{F}}(\mathfrak{F}) &= \varprojlim_{(x,\alpha) \in \mathcal{C}/\mathfrak{F}} \Phi_{\mathcal{F}}(x) \\
 &\simeq \text{Lax}_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}_{\bullet}, \Phi_{\mathcal{F}}|_{\mathfrak{F}}) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathfrak{F}}(\mathcal{C}/\mathfrak{F}, \mathcal{F}|_{\mathfrak{F}}) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/\mathfrak{F}, \mathcal{F}) \\
 &= \mathcal{F}(\mathfrak{F}).
 \end{aligned}$$

因此将 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴 $\mathcal{F}$ 延拓到 $\mathcal{C}^{\wedge}$ (pullback of a fibered category), 与将对应的伪函子延拓, 结果相当。

对于 $\xi, \eta \in \Phi_{\mathcal{F}}(\mathfrak{F})$, 有

$$\text{Hom}_{\Phi_{\mathcal{F}}(\mathfrak{F})}(\xi, \eta) = \varprojlim_{(x,\alpha) \in \mathcal{C}/\mathfrak{F}} \text{Hom}_{\Phi_{\mathcal{F}}(x)}(\xi|_x, \eta|_x),$$

其中 $\xi|_x$ 是 $\xi \in \Phi_{\mathcal{F}}(\mathfrak{F})$ 在 $h_x \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{F}$ 下的限制, 即 $\xi|_x = \alpha^*(\xi)$ 而 $\alpha^* : \Phi_{\mathcal{F}}(\mathfrak{F}) \rightarrow \Phi_{\mathcal{F}}(x)$ 由上述极限泛性质提供。我们也常常把它表述为

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathfrak{F})}(\xi, \eta) = \varprojlim_{(x,\alpha) \in \mathcal{C}/\mathfrak{F}} \text{Hom}_{\mathcal{F}(x)}(\xi|_x, \eta|_x).$$

10.3 叠形

简而言之, $\mathcal{J}$ -叠形是与 $\mathcal{C}$ 上拓扑 $\mathcal{J}$ 相匹配的 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。

定义 10.3.1

设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座而 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴。

1. 若对 $\forall x \in \mathcal{C}$ 及 $S \in \mathcal{J}(x)$, 自然函子 $\mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(S)$ 为忠实、满, 则称 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上**分离纤维范畴** (separated fibered category)。
2. 若在以上条件下, 若 $\mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(S)$ 总是范畴等价, 称 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上**叠形**。

不幸的是, 上述分离纤维范畴的称呼并不统一, 有的地方直接叫“预叠形” (prestack), 有的作者称之为“分离预叠形”。我们选择参照第三讲中“分离预层”概念进行命名 (按这个思路, 纤维范畴可能更应该叫预叠形)。

定义 10.3.2

若 $\mathcal{F}(S)$ 中一个对象同构于 $\mathcal{F}(x)$ 中某个对象的在自然函子下的像, 则称之为**有效**。

由此可知 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上叠形当且仅当, $\mathcal{F}$ 为分离纤维范畴, 而且对 $\forall x, \forall S \in \mathcal{J}(x)$, $\mathcal{F}(S)$ 中对象均为有效。

命题 10.3.3

设 $\mathbf{C}$ 为座, $\Phi : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ 为函子, 对应的 $\mathcal{C}$ 上集合纤维范畴记作 $\mathcal{F}_{\Phi}$ 。则

1. $\mathcal{F}_{\Phi}$ 为分离纤维范畴当且仅当 Φ 作为集合预层是分离的。

2. $\mathcal{F}_\Phi$ 为叠形当且仅当 Φ 为层。

证明. 考虑 $x \in \mathcal{C}$ 及覆盖筛 $S \in \mathcal{J}(x)$ 。因为范畴 $\mathcal{F}_\Phi$ 在 x 上的纤维是集合 $\Phi(x)$ ，所以

$$\mathcal{F}_\Phi(S) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F}_\Phi) \cong \text{Nat}(S, \Phi).$$

特别地, $\mathcal{F}(x) \cong \text{Nat}(h_x, \Phi)$, 且 $\mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(S)$ 等同于 $\Phi(x) \rightarrow \text{Nat}(S, \Phi)$ 。由此得证。 $\square$

此结论进一步明晰了嵌入 $\text{PSh}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \text{Fib}(\mathcal{C})$ 的性质。

对纤维范畴 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$, $x \in \mathcal{C}$, 自然函子 $\mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}$ 给出 $\mathcal{C}/x$ 上的纤维范畴 $\mathcal{F}|_x$ (对应伪函子 $\mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C} \rightsquigarrow \text{Cat}$)。由定义对任意 $(w, \sigma) \in \text{Ob} \mathcal{C}/x$ 有

$$\mathcal{F}|_x(w, \sigma) = \mathcal{F}(w).$$

由于 $(x, 1_x)$ 是终对象, 所以唯一态射 $\sigma : (w, \sigma) \rightarrow (x, 1_x)$ 产生 (限制) 函子

$$?|_w : \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}|_x(x, 1_x) \rightarrow \mathcal{F}|_x(w, \sigma) = \mathcal{F}(w)$$

定义 10.3.4

对纤维范畴 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$, $x \in \mathcal{C}$, 取定 $\xi, \eta \in \mathcal{F}(x)$, 可定义一个 **态射预层** (presheaf of morphisms)

$$\underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta) : (\mathcal{C}/x)^{op} \rightarrow \text{Set},$$

将 $\forall (w, \sigma) \in \text{Ob}(\mathcal{C}/x)$ (即 $w \xrightarrow{\sigma} x$) 映到

$$(w, \sigma) \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{F}(w)}(\xi|_w, \eta|_w).$$

若有 $\mathcal{C}/x$ 中态射 $f : (w, \sigma) \rightarrow (w', \sigma')$, 即

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{f} & w' \\ & \searrow \sigma & \swarrow \sigma' \\ & x & \end{array}$$

则存在自然映射

$$f^* : \text{Hom}_{\mathcal{F}(w')}(\xi|_{w'}, \eta|_{w'}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}(w)}(\xi|_w, \eta|_w).$$

态射预层可以延拓到 $(\mathcal{C}/x)^\wedge$ 上, 对于 $\mathfrak{F} \in (\mathcal{C}/x)^\wedge$ (如 $R \in \mathcal{J}(w, \sigma)$), 存在唯一态射 $\mathfrak{F} \rightarrow h_{(x, 1_x)}$ 以及

$$\underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta)(\mathfrak{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{F}|_x(\mathfrak{F})}(\xi|_{\mathfrak{F}}, \eta|_{\mathfrak{F}}).$$

其中限制沿着 $(\mathcal{C}/x)/\mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}$ 。按照上一节讨论, 此时有

$$\mathcal{F}|_x(\mathfrak{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{C}/x}((\mathcal{C}/x)/\mathfrak{F}, \mathcal{F}|_x),$$

并且

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathcal{F}|_x(\mathfrak{F})}(\xi|_{\mathfrak{F}}, \eta|_{\mathfrak{F}}) \\ &= \varprojlim_{((v, \tau), f) \in (\mathcal{C}/x)/\mathfrak{F}} \text{Hom}_{\mathcal{F}|_x(v, \tau)}(\xi|_{(v, \tau)}, \eta|_{(v, \tau)}). \end{aligned}$$

其中限制沿着 $(\mathcal{C}/x)/(v, \tau) \rightarrow (\mathcal{C}/x)/\mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}$ 。

我们在第五讲中提到同构意义下的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}/x & \xrightarrow{j_x} & \mathcal{C} \\ h_- \downarrow & & \downarrow h_- \\ (\mathcal{C}/x)^\wedge & \xrightarrow{LK_{j_x}} & \mathcal{C}^\wedge \end{array}$$

由此可得 $\mathcal{F}|_x(\mathfrak{F}) \simeq \mathcal{F}(LK_{j_x}(\mathfrak{F}))$ 。特别的当 $\mathfrak{F} = h_{(w, \sigma)}$ ，我们有 $LK_{j_x}(h_{(w, \sigma)}) \cong h_w$ ，从而 $\mathcal{F}|_x(h_{(w, \sigma)}) \simeq \mathcal{F}(h_w)$ 。我们还将考虑 $\mathfrak{F}$ 为任意筛的情形。第五讲里证明了筛 $R \in \mathcal{J}(w, \sigma)$ 当且仅当 $LK_{j_x}(R) \in \mathcal{J}(w)$ 。

命题 10.3.5

设 $\mathbf{C}$ 为座而 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。则 $\mathcal{F}$ 为分离纤维范畴当且仅当，对 $\forall x \in \mathcal{C}$ 以及 $\xi, \eta \in \mathcal{F}(x)$ ，函子 $\underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta) : (\mathcal{C}/x)^{op} \rightarrow \text{Set}$ （在 $\mathcal{C}/x$ 上的诱导拓扑下）为层。

证明。“ $\Rightarrow$ ” 设 $\mathcal{F}$ 为分离纤维范畴。对任意 $w \in \text{Ob}\mathcal{C}, S \in \mathcal{J}(w)$ ，自然函子 $\mathcal{F}(w) \rightarrow \mathcal{F}(S)$ 为忠实、满。

对于 $\xi, \eta \in \mathcal{F}(x)$ ， (w, σ) 和 $R \in \mathcal{J}(w, \sigma)$ ，考虑

$$\underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta)(w, \sigma) = \text{Hom}_{\mathcal{F}(w)}(\xi|_w, \eta|_w)$$

和自然映射

$$\underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta)(w, \sigma) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta)(R).$$

该函子可改写为

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}(w)}(\xi|_w, \eta|_w) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}|_x(R)}(\xi|_R, \eta|_R).$$

借助 $\mathcal{F}|_x(R) \simeq \mathcal{F}(LK_{j_x}(R))$ ，上式进一步转化为

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}(w)}(\xi|_w, \eta|_w) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}(LK_{j_x}(R))}(\xi|_{LK_{j_x}(R)}, \eta|_{LK_{j_x}(R)}).$$

从 $LK_{j_x}(R) \in \mathcal{J}(w)$ 可知 $\mathcal{F}(w) \rightarrow \mathcal{F}(LK_{j_x}(R))$ 为忠实、满，从而上方映射为同构。这相当于说

$$\underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta)(h_{(w, \sigma)}) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta)(R)$$

也即

$$\text{Nat}(h_{(w, \sigma)}, \underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta)) \rightarrow \text{Nat}(R, \underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta)),$$

是同构。于是我们获知 $\underline{\text{Hom}}_x(\xi, \eta)$ 是层。

“ $\Leftarrow$ ” 反推即可。 □

最后我们给出一个经典例子。

例 10.3.6

设 $\mathbf{C}$ 为座。则 $\mathcal{S}h/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为叠形。

证明. 首先, 从上一讲可知 $\mathcal{S}h/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为纤维范畴. 若 $x \in \mathcal{C}$, 则纤维是 $\mathcal{S}h(x) = \text{Sh}(\mathbf{C}/x)$, 即 $\mathbf{C}/x$ 上的层范畴. 此处 $\mathcal{C}/x$ 上通过函子 $\mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}$ 获得诱导拓扑. 若有 $f: x \rightarrow y$, 则存在自然函子 $f^*: \text{Sh}(\mathbf{C}/y) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}/x)$.

其次, 设 $S \in \mathcal{J}(x)$ 为 $x \in \mathcal{C}$ 上的覆盖筛. 我们证明 $(\mathcal{S}h/\mathcal{C})(S) \simeq \text{Sh}(\mathbf{C}/S)$. 由于 $(\mathcal{S}h/\mathcal{C})(S) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{S}h/\mathcal{C})$, 所以 $\theta \in (\mathcal{S}h/\mathcal{C})(S)$ 对应纤维范畴态射

$$\tilde{\theta}: \mathcal{C}/S \rightarrow \mathcal{S}h/\mathcal{C},$$

并将任意 $(w, \sigma) \in \text{Ob}(\mathcal{C}/S)$ 映到 $(\mathcal{S}h/\mathcal{C})(w) = \text{Sh}(\mathbf{C}/w)$ 中对象 $\mathfrak{F}_{(w, \sigma)}$, 以及集合 $\mathfrak{F}_{\theta}(w, \sigma) := \mathfrak{F}_{(w, \sigma)}(w, 1_w)$. 若 $f: (w, \sigma) \rightarrow (w', \sigma')$ 为态射, 则层同构 $f^* \mathfrak{F}_{(w', \sigma')} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{F}_{(w, \sigma)}$ 可用于构造

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}_{(w', \sigma')}(w', 1_{w'}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}_{\theta}(f)} & \mathfrak{F}_{(w, \sigma)}(w, 1_w) \\ \downarrow & & \uparrow \cong \\ \mathfrak{F}_{(w', \sigma')}(w, f) & \xlongequal{\quad} & f^* \mathfrak{F}_{(w', \sigma')}(w, 1_{w'}) \end{array}$$

易见由此产生预层 $\mathfrak{F}_{\theta} \in \text{PSh}(\mathcal{C}/S)$. 对于任意 $(w, \sigma) \in \mathcal{C}/S$, $\sigma \in S(w) = \text{Nat}(h_w, S)$ 诱导产生函子 $\mathcal{C}/w = \mathcal{C}/h_w \rightarrow \mathcal{C}/S$, 从而有限制 $\text{Sh}(\mathbf{C}/S) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}/w)$. 对任意 $(v, \tau) \in \mathcal{C}/w$, 总有

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\theta}|_w(v, \tau) &= \mathfrak{F}_{\theta}(v, \sigma\tau) \\ &= \mathfrak{F}_{(v, \sigma\tau)}(v, 1_v) \\ &= \tau^* \mathfrak{F}_{(w, \sigma)}(v, 1_v) \\ &= \mathfrak{F}_{(w, \sigma)}(v, \tau), \end{aligned}$$

从而 $\mathfrak{F}_{\theta}|_w = \mathfrak{F}_{(w, \sigma)}$. 这说明 $\mathfrak{F}_{\theta}$ 为层。(注: 这一点涉及到“层的黏合”, glueing of sheaves, 需要在前面某讲中补充, 读者可参见 Stacks Project Lemma 7.26.6.)

反之, 设 $\mathfrak{F} \in \text{Sh}(\mathcal{C}/S)$. 对 $\forall (w, \sigma) \in \mathcal{C}/S$, 有限制 $\text{Sh}(\mathbf{C}/S) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}/w)$. 由此我们构造 $\tilde{\theta}: \mathcal{C}/S \rightarrow \mathcal{S}h/\mathcal{C}$ 使得 $\tilde{\theta}(w, \sigma) = \mathfrak{F}|_w$. 在态射上的构造也是类似. 可以验证 $\tilde{\theta}$ 是一个纤维范畴态射.

直接计算说明前面两个构造提供了范畴等价 $(\mathcal{S}h/\mathcal{C})(S) \simeq \text{Sh}(\mathbf{C}/S)$.

最后, 对于 $S \in \mathcal{J}(x)$, 考虑自然函子 $(\mathcal{S}h/\mathcal{C})(x) \rightarrow (\mathcal{S}h/\mathcal{C})(S)$. 由上可知, 该函子可改写为 $\text{Sh}(\mathbf{C}/x) \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}/S)$. 但它恰由 $\text{Sh}(\mathbf{C}/x) \simeq \text{Sh}(\mathbf{C}/h_x^a) \cong \text{Sh}(\mathbf{C}/S^a) \simeq \text{Sh}(\mathbf{C}/S)$ 给出, 是范畴等价. $\square$

上述讨论可以一般化为讨论赋环座 $(\mathbf{C}, \mathfrak{A})$ 上的模叠形 $\mathfrak{Mod}\text{-}\mathfrak{A}$ 构造.

11 第十一讲

设 $\mathbf{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ 为座且 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。我们已指出纤维范畴是广义的预层，而叠形是广义的层。对比层化构造，我们期望从纤维范畴自然产生一个叠形，且具有良好性质。记 $\text{St}(\mathbf{C})$ 为 $\mathbf{C}$ 上叠形的 2-范畴，它是 $\text{Fib}(\mathcal{C})$ 的 2-子范畴。若 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathbf{C}$ 上叠形，我们用

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$$

表示态射范畴。我们根据角标来判断相关态射属于何种范畴。

11.1 2-纤维积

为了进一步介绍叠形理论，2-范畴相关构造似乎无法避免。这部分内容可能需要提前到纤维范畴部分引入。

定义 11.1.1

设 $\mathcal{C}$ 为范畴。记 $\text{Cat}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 上范畴构成的 2-范畴，其构造如下

1. 对象是 $\mathcal{C}$ 上范畴，即三元组 $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ ，
2. 1-态射由满足以下交换图的函子 $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 提供

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G} \\ & \searrow p_{\mathcal{F}} & \swarrow p_{\mathcal{G}} \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

3. 对于 $\phi, \psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ，2-态射 $\Theta : \phi \rightarrow \psi$ 为满足 $p_{\mathcal{G}}(\Theta_{\xi}) = \text{Id}_{p_{\mathcal{F}}(\xi)}$ 的自然变换， $\forall \xi \in \mathcal{F}$ 。

以上 2-范畴包含了我们前面引入的 $\text{Fib}(\mathcal{C})$ ， $\text{St}(\mathbf{C})$ 和即将定义的 $\text{Fib}^s(\mathcal{C})$ 等。当 $\mathcal{C} = \bullet$ 时， $\text{Cat}(\bullet) = \text{Cat}$ 。对于 $\mathcal{C}$ 上范畴 $\mathcal{F}$ ，我们已经能够定义其纤维 $\mathcal{F}(x)$ ， $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ 。

为便于陈述，我们给出一个技术构造，叫做 2-纤维积 (2-fibre product)。

引理 11.1.2: 构造

设 $\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 都是 $\mathcal{C}$ 上范畴，且有 $\mathcal{C}$ 上范畴态射 $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ 和 $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ 。则 2-纤维积 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ 存在。

对于 $\forall x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ，

$$(\mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G})(x) = \mathcal{F}(x) \times_{\mathcal{H}(x)} \mathcal{G}(x).$$

证明. 我们构造范畴 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ 如下：它的对象形如 $\{(x, \xi, \eta, f)\}$ ，其中 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ， $\xi \in \mathcal{F}(x)$ ， $\eta \in \mathcal{G}(x)$ 且有同构

$$f : \phi(\xi) \rightarrow \psi(\eta) \in \text{Mor}\mathcal{H}(x).$$

两个对象间的态射

$$(\alpha, \beta) : (x_1, \xi_1, \eta_1, f_1) \rightarrow (x_2, \xi_2, \eta_2, f_2)$$

由两个态射 $\alpha : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ 和 $\beta : \eta_1 \rightarrow \eta_2$ 组成，满足

1. $p_{\mathcal{F}}(\alpha) = p_{\mathcal{G}}(\beta) : x_1 \rightarrow x_2$, 及
2. 以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \phi(\xi_1) & \xrightarrow{f_1} & \psi(\eta_1) \\ \phi(\alpha) \downarrow & & \downarrow \psi(\beta) \\ \phi(\xi_2) & \xrightarrow{f_2} & \psi(\eta_2). \end{array}$$

易见有自然投影函子 $p_1 : \mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ 和 $p_2 : \mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, 使得 $\Theta : p_{\mathcal{F}} p_1 \rightarrow p_{\mathcal{G}} p_2$ 由 $\Theta_{(x, \xi, \eta, f)} = f$ 给出。这说明 Θ 可逆 (即下图满足 2-交换性)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H}. \end{array}$$

我们容易进一步验证, 如有 $\mathcal{L}$ 满足同类 2-交换图, 则存在唯一态射 $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ 使下图 2-交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & & \\ \searrow & \swarrow & \\ \mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H}, \end{array}$$

即 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ 具有泛性质, 是 2-纤维积。 □

当 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 上范畴 (即存在函子 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$), 而 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴时, 我们可以构造 2-纤维积 $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ 。由于 $\mathcal{F}$ 等同于伪函子 $\Phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \text{Cat}$, 所以 $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ 对应伪函子 $\Phi_{\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \rightsquigarrow \text{Cat}$, 可以看作 $\Phi_{\mathcal{F}}$ 沿着 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 的“限制”。

注解 11.1.3

当 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上分裂纤维范畴时, $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ 是 $\mathcal{D}$ 上分裂纤维范畴。

类似于层把局部同构映到同构, 叠形将局部同构映成等价。

命题 11.1.4

设 $\mathbf{C}$ 为座, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。仍用 $\mathcal{F}$ 记为它到 $\mathcal{C}^{\wedge}$ 上的延拓。以下等价

1. $\mathcal{F}$ 为 $\mathbf{C}$ 上叠形;
2. $\mathcal{F}$ 的延拓为 $\mathbf{C}^{\wedge}$ 上叠形 ($\mathbf{C}^{\wedge}$ 上拓扑由 $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ 延拓而来, 参见第四讲);
3. 对 $\mathcal{C}^{\wedge}$ 中任意局部同构 $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{F}$, 自然函子

$$\mathcal{F}(\mathfrak{F}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{G})$$

为等价。

证明. 由上一讲的定义, 对任意 $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^{\wedge}$,

$$\mathcal{F}(\mathfrak{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/\mathfrak{F}, \mathcal{F}).$$

根据定义以及拓扑之间的关系, 我们得证。 □

在术语上, 读者要注意区分“分离 (separated) 纤维范畴”与“分裂 (split) 纤维范畴”。

11.2 叠形化

从纤维范畴产生叠形的具体构造方法分为两个基本步骤: 首先, 将态射预层层化, 得到分离纤维范畴; 其次, 增加对象使得下降条件均被满足。

由于纤维范畴对应的伪函子一般不能直接层化, 所以我们将纤维范畴转化为分裂纤维范畴 (对应真函子 = 范畴预层): 从任意纤维范畴 $\mathcal{F}$ 可构造与之等价的分裂纤维范畴 $R(\mathcal{F})$ 。

引理 11.2.1

设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。则存在分裂纤维范畴 $R(\mathcal{F})$, 并有纤维范畴等价 $R(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ 。

证明. 我们定义一个预层 $\Phi_{R(\mathcal{F})}$, 并说明它对应的 (分裂) 纤维范畴等价于 $\mathcal{F}$ 。令

$$\Phi_{R(\mathcal{F})}(x) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F}).$$

对于任意 $\mathcal{C}$ 中态射 $x \rightarrow y$, 我们有自然函子 $\mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}/y$ 以及

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/y, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F}).$$

这产生一个范畴预层, 其 Grothendieck 构造 $R(\mathcal{F}) := \int_{\mathcal{C}} \Phi_{R(\mathcal{F})}$ 是 $\mathcal{C}$ 上分裂纤维范畴。该范畴中对象为

$$\{(x, \phi) \mid x \in \text{Ob}\mathcal{C}, \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F})\},$$

而态射 $(\alpha, \Theta) : (x, \phi) \rightarrow (y, \psi)$ 包含一个 $\mathcal{C}$ 中态射 $\alpha : x \rightarrow y$, 以及两个态射 $\mathcal{C}/x \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}$ 和 $\mathcal{C}/x \xrightarrow{\alpha \circ -} \mathcal{C}/y \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}$ 之间的自然变换 Θ 。从 $R(\mathcal{F})$ 到 $\mathcal{C}$ 的投影函子 $p_{R(\mathcal{F})}$ 由到第一个分量的投影给出。

易见存在纤维范畴态射 $R(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$, 满足 $(x, \phi) \mapsto \phi(x, 1_x)$ 且

$$(\alpha, \Theta) \mapsto \phi(x, 1_x) \xrightarrow{\Theta_{(x, 1_x)}} \psi(x, \alpha) \xrightarrow{\psi(\alpha)} \psi(y, 1_y).$$

根据 2-Yoneda 引理, $R(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$ 在纤维上总是诱导等价, 因而是纤维范畴等价。□

从纤维范畴到可裂纤维范畴, 相当于从伪函子到函子的变更, 使得我们能够应用 Kan 扩张和层化等工具。

注解 11.2.2

利用

$$\text{Cat} \rightarrow \text{Set} \times \text{Set}, \mathcal{C} \mapsto \text{Mor}\mathcal{C} \times \text{Ob}\mathcal{C},$$

将范畴预层看作有代数结构的预层 (参见第七讲), 进行层化后得到范畴层 (包含对象层和态射层)。虽然范畴层还不是叠形, 却因其态射预层均为层, 对应一个分离纤维范畴。

为避免混淆, 本讲用记号 $K(\Phi_{\mathcal{F}})$ (或 $K(\mathcal{F})$, 而非 $(\Phi_{\mathcal{F}})^a$ 或 $\mathcal{F}^a$) 表示层化。

令 $\text{Fib}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴构成的 2-范畴, $\text{Fib}^s(\mathcal{C})$ 为分裂纤维范畴构成的 2-子范畴 (其中态射保持裂解)。更进一步, 上述构造实际上产生一个 2-函子

$$R : \text{Fib}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fib}^s(\mathcal{C}).$$

该 2-函子是遗忘函子 $\iota : \text{Fib}^s(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fib}(\mathcal{C})$ 的右伴随，即对任意分裂纤维范畴 $\mathcal{G}$, $\text{R}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$ 诱导等价

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\iota(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}^s(\mathcal{G}, \text{R}(\mathcal{F})).$$

遗忘函子还有一个左伴随，记作

$$\text{L} : \text{Fib}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fib}^s(\mathcal{C}).$$

我们描述它的具体构造。给定纤维范畴 $\mathcal{F}$ ，我们记 $\text{Cart}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$ 为其中的笛卡尔态射集。这是一个乘法系，可以用于将 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴 $\mathcal{F}$ 局部化，记为 $\text{loc}(\mathcal{F}) := \mathcal{F}[\text{Cart}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})^{-1}]$ 。如果 $\mathcal{C}$ 有初始对象 i ，则包含 $\mathcal{F}(i) \hookrightarrow \mathcal{F}$ 诱导范畴等价 $\mathcal{F}(i) \xrightarrow{\sim} \text{loc}(\mathcal{F})$ 。

引理 11.2.3

上述遗忘函子存在左伴随，即对任意纤维范畴 $\mathcal{F}$ 和分裂纤维范畴 $\mathcal{G}$ 总有

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}^s(\text{L}(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \iota(\mathcal{G})).$$

存在自然纤维范畴态射 $\mathcal{F} \rightarrow \text{L}(\mathcal{F})$ ，且总为纤维范畴等价。

证明. 我们构造 $\text{L}(\mathcal{F})$ 对应的范畴预层 $\Phi_{\text{L}(\mathcal{F})}$ 。对于 $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ，考虑下范畴 $x \backslash \mathcal{C}$ 以及拉回

$$\begin{array}{ccc} x \backslash \mathcal{C} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x \backslash \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \end{array}$$

令

$$\Phi_{\text{L}(\mathcal{F})}(x) = \text{loc}(x \backslash \mathcal{C} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F}).$$

若有 $f : x \rightarrow y$ ，则由 $y \backslash \mathcal{C} \rightarrow x \backslash \mathcal{C}$ 可产生

$$y \backslash \mathcal{C} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \rightarrow x \backslash \mathcal{C} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$$

从而从泛性质获取局部化范畴之间的函子

$$\Phi_{\text{L}(\mathcal{F})}(y) \rightarrow \Phi_{\text{L}(\mathcal{F})}(x)$$

令 $\text{L}(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{C}} \Phi_{\text{L}(\mathcal{F})}$ ，是一个分裂纤维范畴，其对象为

$$\{(x, u) \mid x \in \text{Ob}\mathcal{C}, u \in \text{loc}(x \backslash \mathcal{C} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F})\}.$$

存在自然函子 $\mathcal{F} \rightarrow \text{L}(\mathcal{F})$ ，将 $\xi \in \mathcal{F}$ 映到

$$(p_{\mathcal{F}}(\xi), u), u = ((p_{\mathcal{F}}(\xi), 1_{p_{\mathcal{F}}(\xi)}), \xi)$$

由于 $x \backslash \mathcal{C}$ 有初始对象 $(1_x, x)$ ，所以

$$(x \backslash \mathcal{C} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F})(1_x, x) \simeq \text{loc}(x \backslash \mathcal{C} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F}).$$

对应地在纤维上 $\mathcal{F}(x) \rightarrow \text{L}(\mathcal{F})(x), \forall x$ ，函子表现为

$$\xi \mapsto ((1_x, x), \xi)$$

总是诱导等价，所以纤维范畴态射 $\mathcal{F} \rightarrow L(\mathcal{F})$ 为等价。

对任意分裂纤维范畴 $\mathcal{G}$ ， $\mathcal{F} \rightarrow L(\mathcal{F})$ 诱导等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^s(L(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \iota(\mathcal{G})).$$

□

对任意纤维范畴 $\mathcal{F}$ ，将 $L(\mathcal{F})$ 看作具有代数结构的预层，并将其层化得到 $KL(\mathcal{F})$ 。将其用等价的分裂纤维范畴 $RKL(\mathcal{F})$ 代替，再将 $RKL(\mathcal{F})$ 看作具有代数结构的预层，并将其层化得到 $KRKL(\mathcal{F})$ 。

需要注意的是，对于分裂纤维范畴 $\mathcal{F}$ ，由于 $\kappa = \eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow K(\mathcal{F})$ 层化为同构，所以 κ 为局部同构。

命题 11.2.4

设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 上分裂纤维范畴。若对任意 $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\wedge$ ，以下包含函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^s(\mathcal{C}/\mathfrak{F}, \mathcal{F}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/\mathfrak{F}, \mathcal{F}),$$

总是范畴等价，则 $K(\mathcal{F})$ 为叠形。

证明. 只需证明对 $\mathcal{C}^\wedge$ 中任意局部满单态射 $\phi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{F}$,

$$K(\mathcal{F})(\phi) : K(\mathcal{F})(\mathfrak{F}) \rightarrow K(\mathcal{F})(\mathfrak{G})$$

为等价。由于它总是完全忠实，所以只需验证 $K(\mathcal{F})(\phi)$ 为本质满。

从 $\kappa : \mathcal{F} \rightarrow K(\mathcal{F})$ 为层化的自然函子，可知对任意 $\xi \in K(\mathcal{F})(\mathfrak{G})$ 存在局部满单态射 $S \rightarrow \mathfrak{G}$ 以及 $\zeta \in \mathcal{F}(S)$ ，使得

$$\xi|_{K(\mathcal{F})(S)} \cong \kappa_S(\zeta).$$

由定义, $\zeta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F})$ 。根据条件, 可以假设 $\zeta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^s(\mathcal{C}/S, \mathcal{F})$ 。因此, $\kappa_S(\zeta) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^s(\mathcal{C}/S, K(\mathcal{F}))$ 。又因 $K(\mathcal{F})$ 是层, 所以 ξ 同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^s(\mathcal{C}/\mathfrak{G}, K(\mathcal{F}))$ 中某个对象。再由同样原因, 后者同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^s(\mathcal{C}/\mathfrak{F}, K(\mathcal{F}))$ 中某个对象的像。综上, 我们验证了 $K(\mathcal{F})(\phi)$ 为本质满。□

对任意纤维范畴 $\mathcal{F}$ ，我们记

$$\mathcal{F}^a := KRKL(\mathcal{F}).$$

首先, 从 $L(\mathcal{F})$ 分裂, 产生范畴层 $KL(\mathcal{F})$ 。再利用 R 获得新的分裂纤维范畴 $RKL(\mathcal{F})$ 。因为从 R 的构造, $RKL(\mathcal{F})$ 满足上述结论中的条件, 所以 $\mathcal{F}^a := KRKL(\mathcal{F})$ 是叠形。

注意, 在 $RKL(\mathcal{F})$ 中的对象为 $\phi \in \mathcal{F}(x)$ (前面记成 (x, ϕ))。最后一步通过层化补充了对象, 使得 $\mathcal{F}^a(x)$ 包含所有下降数据 $\xi \in \mathcal{F}(S)$, 其中 $S \in \mathcal{J}(x)$ 取遍所有覆盖筛, 以及这些对象之间的态射。

根据构造以及函子 R, L 和层化的性质, 我们得知存在 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^a$ 为以下态射的合成,

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} L(\mathcal{F}) \rightarrow KL(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} RKL(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}^a,$$

且对任意 $\mathbf{C}$ 上叠形 $\mathcal{G}$ ，上述态射诱导范畴等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}^a, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

这说明 $\mathcal{F}^a$ 在等价意义下唯一。

定义 11.2.5

我们称 $\mathcal{F}^a$ 为 $\mathcal{F}$ 的**叠形化** (stackification of $\mathcal{F}$), 或 $\mathcal{F}$ 的**相伴叠形** (stack associated to $\mathcal{F}$)。

以上讨论基于 Giraud 的《Cohomologie non abélienne》。当底范畴存在纤维积的情形下, 以上构造在《Stacks Project》中被更详细地展开描述。正如西班牙加泰罗尼亚地区的传统民俗叠罗汉活动 (Els castells), 叠形化依序推进便大功告成。



总而言之, 叠形 $\mathcal{F}^a$ 的纤维为

$$\mathrm{Ob}\mathcal{F}^a(x) = \{\xi_S \mid S \in \mathcal{J}(x), \xi_S \in \mathcal{F}(S)\}$$

而 $\xi \in \mathcal{F}(x)$ 对应 ξ_{h_x} 。对于 $\forall \xi_S, \eta_R \in \mathcal{F}^a(x)$,

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^a(x)}(\xi_S, \eta_R) \\ &= [\underline{\mathrm{Hom}}_x(\xi|_{S \cap R}, \eta|_{S \cap R})]^a(S \cap R). \end{aligned}$$

易见

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^a(x)}(\xi_{h_x}, \eta_{h_x}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_x(\xi, \eta)^a(h_x).$$

11.3 叠形的函子性

我们在上一讲引入了纤维范畴的拉回和推出。结合叠形化, 我们能够进一步定义叠形的拉回和推出。

命题 11.3.1

设 $\mathbf{C}$ 为座, 且 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 作为 $\mathcal{C}$ 上范畴等价。则 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbf{C}$ 上叠形, 当且仅当 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathbf{C}$ 上叠形。

证明. 设 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ 和 $\psi: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ 给出 $\mathcal{C}$ 上范畴等价。若 α 为 $\mathcal{F}$ 中笛卡尔态射, 则 $\phi(\alpha)$ 必为 $\mathcal{F}'$ 中笛卡尔态射。由此可见 $\mathcal{F}$ 为纤维范畴, 当且仅当 $\mathcal{F}'$ 为纤维范畴。

任取 $x \in \mathcal{C}$ 和任意 $S \in \mathcal{J}(x)$ 。考虑

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F}) \\ \phi \circ - \downarrow & & \downarrow \phi \circ - \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/x, \mathcal{F}') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/S, \mathcal{F}'). \end{array}$$

则由于垂直函子为等价, 所以上方水平函子是等价, 当且仅当下方水平函子为等价。 $\square$

命题 11.3.2

设 $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为承载座态射 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 的函子。若 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbf{C}$ 上叠形, 则 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ 是 $\mathbf{D}$ 上叠形, 叫作 $\mathcal{F}$ 的**推出**, 记作 $\alpha_*(\mathcal{F})$ 。

证明. 首先, $\mathcal{F} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ 是 $\mathbf{D}$ 上纤维范畴, 其笛卡尔态射为

$$\{(\phi, \alpha) \mid \phi \in \mathrm{Mor} \mathcal{F} \text{ 是笛卡尔}, \alpha \in \mathrm{Mor} \mathcal{D}\}.$$

注意, 如果 $\Phi_{\mathcal{F}}: \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathrm{Cat}$ 是对应的伪函子, 那么 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ 对应 $\Phi_{\mathcal{F} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathrm{Cat}$, 即 $\Phi_{\mathcal{F}}$ 的限制。不妨设 $\mathcal{F}$ 为分裂, 则 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ 也分裂。

其次, 对于任意 $d \in \mathrm{Ob} \mathcal{D}$ 和任意 $S \in \mathcal{J}(d)$, 自然函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/d, \mathcal{F} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/S, \mathcal{F} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D})$$

根据 2-伴随函子性质可以改写为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/\alpha(d), \mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/LK_{\alpha}(S), \mathcal{F})$$

而后者总是等价 (由前可知 $LK_{\alpha}(S) \in \mathcal{J}(\alpha(d))$)。得证! $\square$

推出保持叠形化 $\alpha_*(\mathcal{F}^a) \simeq [\alpha_*(\mathcal{F})]^a$ 。

命题 11.3.3

设 $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为承载座态射 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 的函子。若 $\mathcal{G}$ 为 $\mathbf{D}$ 上叠形, 则 $\{LK_{\alpha}[L(\mathcal{G})]\}^a$ 是 $\mathbf{C}$ 上叠形, 叫作 $\mathcal{G}$ 的**拉回**, 记作 $\alpha^*(\mathcal{G})$ 。

推出与拉回形成一对 2-伴随函子。

定理 11.3.4

设 $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为承载座态射 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 的函子。若 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbf{C}$ 上叠形, 且 $\mathcal{G}$ 为 $\mathbf{D}$ 上叠形, 则有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathcal{G}, \alpha_*(\mathcal{F})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\alpha^*(\mathcal{G}), \mathcal{F}).$$

证明. 不妨设 $\mathcal{F}$ 分裂。从伪函子角度看, 这就是叠形化和遗忘函子的伴随关系, 再加上限制与左 Kan 扩张的伴随关系

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\alpha^*(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \\ & \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(LK_{\alpha}L(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \\ & \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(L(\mathcal{G}), \alpha_*(\mathcal{F})) \\ & = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathcal{G}, \alpha_*(\mathcal{F})) \end{aligned}$$

□

注意, 上述结论给出纤维范畴上的特殊版本。我们不再赘述。

定理 11.3.5

设 $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为承载座态射 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ 的函子。若 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 为 $\mathbf{D}$ 上叠形, 则

1. $\mathcal{G} \rightarrow \alpha_*\alpha^*(\mathcal{G})$ 为等价;
2. α^* 诱导等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\alpha^*(\mathcal{G}), \alpha^*(\mathcal{H})).$$

证明. 第一点本质上来自 Kan 扩张的性质, 而第二点从第一点推出。□

同样, 它也提供一个纤维范畴的特殊版本。

11.4 叠形的局部化

我们将上一节结论应用到切片范畴上 $j_x: \mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}$ 。

引理 11.4.1

$j_x: \mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}$ 是一个叠形当且仅当 h_x 为层。

证明. 由定义可得。□

我们给出两个基本构造。

引理 11.4.2

设 $\mathbf{C}$ 为座, $x \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ 且 $\mathbf{C}/x$ 赋予诱导拓扑。若 h_x 是层且 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}/x$ 为叠形, 则合成 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 也是叠形。

证明. 从第九讲可知, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 是纤维范畴。不妨设 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}/x$ 分裂, 对应函子 $\Phi_{\mathcal{F}}^x$ 。则其拉回 $j_x^*(\mathcal{F})$ 是 $\mathbf{C}$ 上叠形。根据第六讲中关于 LK_{j_x} 的计算, 对任意 $y \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, 我们得到

$$LK_{j_x}(\Phi_{\mathcal{F}}^x)(y) = \coprod_{f: y \rightarrow x} \Phi_{\mathcal{F}}^x(y, f),$$

恰好是 $\mathcal{F}(y)$ 。□

引理 11.4.3

若 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}/x \rightarrow \mathcal{C}$ 均为 $\mathbf{C}$ 上叠形, 且存在叠形态射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}/x$, 则 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}/x$ 是 $\mathbf{C}/x$ 上叠形。

证明. 考虑推出 $(j_x)_*(\mathcal{F}) = \mathcal{C}/x \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ 。根据条件有下图

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & & \\
 \swarrow & \searrow & \\
 & \mathcal{C}/x \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F} & \longrightarrow \mathcal{F} \\
 \searrow & \downarrow & \downarrow \\
 & \mathcal{C}/x & \longrightarrow \mathcal{C}
 \end{array}$$

从 2-纤维积的泛性质可知 $\mathcal{F} \simeq \mathcal{C}/x \times_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ 是 $\mathbf{C}/x$ 上叠形。 □

综合上述两个结论, 我们得到以下刻画。

命题 11.4.4

设 $\mathbf{C}$ 为座, $x \in \text{Ob} \mathbf{C}$ 且 h_x 是层。则 $\text{St}(\mathbf{C}/x)$ 等价于以下 2-范畴

$$\{(\mathcal{F}, \phi) \mid \mathcal{F} \in \text{St}(\mathbf{C}), \phi \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}/x)\}.$$

11.5 比较引理

最后我们陈述 Giraud 比较引理的叠形版本。

定理 11.5.1

假设座态射 $\alpha: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ 诱导拓扑斯等价 $\mathbf{D}^{\sim} \rightarrow \mathbf{C}^{\sim}$, 则

1. 对于 $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \text{St}(\mathbf{C})$, 总有范畴等价

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\alpha^*(\mathcal{F}), \alpha^*(\mathcal{F}')),$$

2. 对于 $\mathcal{G}, \mathcal{G}' \in \text{St}(\mathbf{D})$, 总有范畴等价

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \simeq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\alpha_*(\mathcal{G}), \alpha_*(\mathcal{G}')),$$

3. 对于 $\mathcal{F} \in \text{St}(\mathbf{C})$, 总有叠形等价 $\mathcal{F} \simeq \alpha_* \alpha^*(\mathcal{F})$,
4. 对于 $\mathcal{G} \in \text{St}(\mathbf{D})$, 总有叠形等价 $\mathcal{G} \simeq \alpha^* \alpha_*(\mathcal{G})$.

本质上, 它说明在 $\mathbf{C}$ 上定义一个叠形, 相当于在 $\mathbf{C}^{\sim}$ 上定义一个叠形。