

汕头大学数学系讲义

经典层论

徐 斐



2026 年 6 月 27 日

经典层论

徐斐

2026/06/27

目录

1 第一讲	4
1.1 层论起源	4
1.2 拓扑空间上的层	4
1.3 筛与层	8
2 第二讲	12
2.1 丛与截面层	12
2.2 层与平展丛	16
3 第三讲	19
3.1 茎与层	19
3.2 逆像层	20
3.3 函子 Λ 和 Γ 的抽象刻画	21
4 第四讲	24
4.1 阿贝尔层	24
4.2 核、余核与像	24
4.3 阿贝尔层的性质	26
5 第五讲	32
5.1 限制与延拓	32
5.2 局部闭子空间与零延拓	33
6 第六讲	37
6.1 赋环空间	37
6.2 赋环空间上的模	39
6.3 张量积与内蕴态射	40
6.4 局部自由模与皮卡群	42
6.5 正像与逆像	43

7 第七讲	46
7.1 层上同调	46
7.2 松弛层	48
7.3 高阶正像函子	49
7.4 经典层上同调的局限性	51
8 第八讲	53
8.1 Čech 上同调	53
8.2 Čech 上同调与半层化	56
8.3 Čech 上同调与皮卡群	59
8.4 一般情况	60

引言

作者在 2019-2020 年春季学期开设的《同伦与同调》课程中，首次讲授经典层论，主要参考 Tennison 的讲义《Sheaf Theory》以及 Mac Lane 和 Moerdijk 的专著《Sheaves in Geometry and Logic》。在后续课程中，内容陆续扩展到 Grothendieck 层论、高阶范畴论初步。本系列课程聚焦同伦与同调方法在群表示中的应用，因此在适当展现几何与拓扑背景的基础上，尽量突出范畴论与同调代数方法。

授课期间，感谢李杰、熊腾飞、吴马威、郑晨佑等同学积极参与，提供建议并协助制作 LaTeX 代码。由于作者原因，这部分内容虽然最先成稿，但是最晚呈现在 WeMath 上。尽管它与 Grothendieck 层论部分讲义相对独立，不影响后者阅读，但是了解经典情形有助于理解一般理论。

课程以经典的范畴论和同调代数知识为基础，如 Mac Lane 的《Categories for the Working Mathematician》(第二版, 第 1-10 章) 和 Rotman 的《An Introduction to Homological Algebra》(第二版) 的主体内容。讲义所有内容均包含在经典著作中。

国内出版的层论相关中文教材有高等教育出版社现代数学基础丛书第 82 卷《代数基础：模、范畴、同调代数与层》(陈志杰著) 和第 97 卷《Topos 理论》(黎景辉著)，以及同济大学出版社的《层论及其上调理论》(陈志杰著)。后者成书最早，涵盖经典层论入门知识，不假设范畴论基础，可读性强但已难以购买。《代数基础》面向数学专业高年级学生和研究生，分为四章，最后一章介绍经典层论基本概念，可以作为同济版图书的前置知识并提供部分术语的现代表述。陈先生这两本书专注阿贝尔层与模层，而黎先生的书面向更一般的集合层，即拓扑斯 (topos, 其中的阿贝尔对象即阿贝尔层)。正如其标题所示，《Topos 理论》从范畴论角度将拓扑斯作为广义空间进行介绍。粗略而言，其内容大体平行于同济教材，将拓扑空间替换升级为拓扑斯。为突出当前进展，并衔接理论和应用，此书叙事相对宏观。

本讲义含经典层论、Grothendieck 层论、高阶范畴初步三个模块，以中间模块为主。经典层论内容相对直观，讲义在回顾过程中，一方面着眼于为后续内容做铺垫，另一方面期望适当弥补上述著作较少涉及的拓扑板块内容（后者有助于对高阶范畴理论的接受和理解）。Grothendieck 层论部分尽量展示其主体框架，通过提供若干计算实例帮助读者理解。以此为基础，内容自然过渡到 2-范畴乃至高阶范畴理论基础。作者希望这样的编排有助于了解高阶范畴的产生必然性和问题导向性。从这一角度看，本讲义有望填补陈先生和黎先生教材未涉及的部分中文资料空白。

感谢北京师范大学胡维教授允许作者使用其 WeMath 平台，并尽心排版，使得讲义能够电子化。受限于个人知识水平、写作能力和理解角度，所以文中不可避免含有不少错漏和谬误之处，敬请读者批评指正！

邮箱: fxu@stu.edu.cn。

1 第一讲

1.1 层论起源

Leray 和 Schauder (1934 年) 在水动力方程研究中使用了拓扑方法。二战中被俘后, Leray (1940-1944 年) 在纳粹集中营开办了一所大学, 讲授代数拓扑并涉及到上同调群的计算。在此过程中, 他发明了层和谱序列的概念, 战后陆续发表一系列工作。随后在 Cartan 的讨论班中 (1950 年代), Lazard 给出层的一个等价定义, 利用平展空间来描述层。很快, Serre (1955 年) 成功地将层和谱序列应用于代数几何、代数拓扑; Grothendieck (1957 年) 为研究 Weil 猜想, 将经典层论从拓扑空间推广到范畴上的 Grothendieck 层论 (以及更加一般的叠形理论)。

1.2 拓扑空间上的层

设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间。则 X 的开集通过包含关系构成偏序集 $\mathcal{P}_X$ 。它作为一个范畴, 对象 (或元素) 为开集 $U \in \mathcal{T}$; 同时, 从 V 到 U 存在态射当且仅当 $V \subseteq U$ 。

定义 1.1

给定拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$, 其上的一个**集合预层** (presheaf of sets) 是一个反变函子 $\mathfrak{F} : \mathcal{P}_X \rightarrow \text{Set}$ 。

若将目标范畴 Set 换成 $\text{Ab}, \text{Rng}, \text{Mod-}R$, 则相应的反变函子也称作**阿贝尔预层**、**环预层**、 **R -模预层**等。

今后在不易产生误解的情况下, 我们统一简称这类函子为预层。空间上有很多有意思的代数结构都形成预层。

例 1.2

1. 令 $X = S^1$, 带有 $\mathbb{R}^2$ 中欧氏拓扑。设 $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 并在每个开集 $U \subset S^1$ 上获得 f 的限制 $f|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$ 。由此可定义预层 $\mathfrak{F}$, 使得 $\mathfrak{F}(U) = \{f|_U\}$ 。
2. 若对任意开子集 $U \subset S^1$, 令 $\mathfrak{G}(U) = \{U \text{ 上所有连续函数}\}$, 那么 $\mathfrak{G}$ 也是 S^1 上的一个预层。

在一定程度上, 预层是以 $\mathcal{C}$ 为指标范畴, 将特定集合有机组织在一起的工具。

注解 1.3

1. 常记 $\mathfrak{F}(V \rightarrow U)$ 为 $r_{U,V} : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathfrak{F}(V)$, 叫做**限制**。若 $s \in \mathfrak{F}(U)$, 常记 $s|_V = r_{U,V}(s) = \mathfrak{F}(V \rightarrow U)(s)$ 。
2. 空间 X 上所有预层以及它们之间的自然变换, 构成**函子范畴**或**预层范畴** $\text{PSh}(X) = \text{PSh}(\mathcal{P}_X) := \text{Set}^{\mathcal{P}_X^{\text{op}}}$ 。

在预层定义中, 空间的拓扑与预层的结构关联不够紧密。能够更好反映拓扑结构的预层叫做层。换言之, 层是满足“ $\mathcal{T}$ -黏合条件”的预层。

定义 1.4

设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间, $\mathfrak{F}$ 为其上一个预层。假设它满足

1. (黏合存在性) 对任意开集 U , 任意开覆盖 $U = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$, 若有 $\{s_{\alpha} \in \mathfrak{F}(V_{\alpha})\}_{\alpha}$ 使得

$$s_{\alpha}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}} = s_{\beta}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}}$$

则存在 $s \in \mathfrak{F}(U)$, 满足 $s|_{V_{\alpha}} = s_{\alpha}$; 以及

2. (黏合唯一性) 对任意 $s, t \in \mathfrak{F}(U)$ 满足条件 $s|_{V_{\alpha}} = t|_{V_{\alpha}}, \forall \alpha$, 那么必有 $s = t$, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 X 上的一个 ($\mathcal{T}$ -) 层 (sheaf)。

利用范畴论语言, 我们能够简化层的定义并在今后予以推广。为此我们首先回顾一个范畴论构造。

定义 1.5

设范畴 $\mathcal{C}$ 中有两个态射 $X \xrightarrow{f} Y$ 及 $X \xrightarrow{g} Y$ 。若存在态射 $W \xrightarrow{h} X$ 使得

$$W \xrightarrow{h} X \xrightleftharpoons[g]{f} Y \dots\dots (*)$$

正合, 即 $fh = gh$, 且满足以下泛性质 (universal property)

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{h} & X \xrightleftharpoons[g]{f} Y \\ \exists! \downarrow & \nearrow h' & \\ W' & & \end{array}$$

其中 $fh' = gh'$, 则称 h 为 f, g 的等化子 (equalizer)。此时也称 $(*)$ 为一个等化子序列。

等化子的概念可用来改写层的定义 (实际上, 等化子是范畴 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 上取值在 $\mathcal{C}$ 中的函子的极限)。

定义 1.6

设 $\mathfrak{F}$ 为 X 上预层。则 $\mathfrak{F}$ 为层当且仅当对任意开集 U 以及它的任意开覆盖 $U = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$, 以下

$$\mathfrak{F}(U) \longrightarrow \prod_{\alpha} \mathfrak{F}(V_{\alpha}) \xrightleftharpoons[\rho_2]{\rho_1} \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(V_{\alpha} \cap V_{\beta}).$$

其中态射均由自然限制提供。

从定义我们容易推出预层范畴中的终对象总是层, 记作 $\mathfrak{F}_{\bullet}$ 。预层范畴 $\text{PSh}(X)$ 中的所有层构成的满子范畴叫做 $X = (X, \mathcal{T})$ 上的层范畴, 记为 $\text{Sh}(X) = \text{Sh}(X, \mathcal{T})$ 或 $\text{Sh}(\mathcal{P}_X)$ 。由上可知, 它至少包含一个对象 $\mathfrak{F}_{\bullet}$ 。

我们还可以从定义推出层的另一个基本性质。

注解 1.7

设 $\mathfrak{F}$ 为层。由上述序列的正合性, 应用在 $\emptyset$ 的覆盖上可得 $\mathfrak{F}(\emptyset) = 1$ (1 为单点集)。

常数预层和常数层是常用的概念。

例 1.8: 常数预层与常数层

若 A 为给定集合。可定义 X 上预层 $\mathfrak{F}_A$ 满足 $\mathfrak{F}_A(U) \equiv A$ ，而限制为恒等映射。我们称 $\mathfrak{F}_A$ 为**常数预层** (constant presheaf)。

若预层 $\mathfrak{G}$ 使得 $\mathfrak{G}(U) = \prod_{\pi_0(U)} A$ ($\pi_0(U)$ 为 U 的连通分支数)，而限制为自然映射，则 $\mathfrak{G}$ 为层，称为**常数层** (constant sheaf)。

类似于函子的子函子，我们可以考虑层的子对象。

定义 1.9

设 $\mathfrak{F}$ 为 X 上的层而 $\mathfrak{F}'$ 为 $\mathfrak{F}$ 的子函子。若 $\mathfrak{F}'$ 也是层，则称之为 $\mathfrak{F}$ 的一个**子层** (subsheaf)。

以下是子层的一个刻画。

命题 1.10

若 $\mathfrak{F}$ 为 X 上的层而 $\mathfrak{F}'$ 为子函子，那么 $\mathfrak{F}'$ 是子层当且仅当对每个开集 U 和 $s \in \mathfrak{F}(U)$ ，以及任意开覆盖 $U = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ ，有 $s \in \mathfrak{F}'(U) \iff s|_{V_{\alpha}} \in \mathfrak{F}'(V_{\alpha}), \forall \alpha$ 。

证明. “ $\Rightarrow$ ” 由层的定义可得。

“ $\Leftarrow$ ” 从以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{F}'(U) & \longrightarrow & \prod_{\alpha} \mathfrak{F}'(V_{\alpha}) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}'(V_{\alpha} \cap V_{\beta}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{F}(U) & \longrightarrow & \prod_{\alpha} \mathfrak{F}(V_{\alpha}) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(V_{\alpha} \cap V_{\beta})
 \end{array}$$

我们可以获得结论。 □

连续映射用来比较两个空间，也能够建立两个空间上层范畴间的联系。

定义 1.11

设 $f: X \rightarrow Y$ 为连续，则有函子

$$\tilde{f}: \mathcal{P}_Y \rightarrow \mathcal{P}_X, V \mapsto f^{-1}(V).$$

它进一步诱导**正像函子** (direct image) $f_*: \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y)$ 使得

$$[f_*(\mathfrak{F})](V) := \mathfrak{F}(f^{-1}(V)).$$

此时 $f_*(\mathfrak{F})$ 叫做 $\mathfrak{F}$ 的正像。

需要说明的是，从 Y 中开覆盖 $V = \cup_{\alpha} V_{\alpha}$ 产生 X 中覆盖 $f^{-1}(V) = \cup_{\alpha} f^{-1}(V_{\alpha})$ ，可以验证 $f_*(\mathfrak{F})$ 是层。进一步可以看出 f_* 确实是一个函子。

显然若 f 为同胚，则 $\tilde{f}$ 为同构且 f_* 成为范畴等价。

注解 1.12: 局部化

若 U 为 X 中开集, 那么 X 上的预层 $\mathfrak{F}$ 限制到 U 上 (沿着包含函子 $\mathcal{P}_U \hookrightarrow \mathcal{P}_X$)。易验证当 $\mathfrak{F}$ 为层时, $\mathfrak{F}|_U$ 是 U 上的层。

反过来, 如果空间 X 上存在一个开覆盖, 则每个开覆盖上的层可能通过恰当方式黏合产生 X 上的层。

定理 1.13

设 X 有开覆盖 $\{W_\alpha\}_\alpha$, 且对 $\forall \alpha$, 存在层 $\mathfrak{F}_\alpha \in \text{Sh}(W_\alpha)$ 满足 $\mathfrak{F}_\alpha|_{W_\alpha \cap W_\beta} = \mathfrak{F}_\beta|_{W_\alpha \cap W_\beta}, \forall \alpha, \beta$ 。则存在 X 上的层 $\mathfrak{F}$, 在同构意义下唯一, 使得 $\mathfrak{F}|_{W_\alpha} \cong \mathfrak{F}_\alpha$, 且与以上等式相匹配。

证明. 若这样的层 $\mathfrak{F}$ 存在, 则对任意开集 U 以及其覆盖 $\{U \cap W_\alpha\}_\alpha$ 应有

$$\mathfrak{F}(U) \longrightarrow \prod_\alpha \mathfrak{F}(U \cap W_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(U \cap W_\alpha \cap W_\beta)$$

且 $\mathfrak{F}(U \cap W_\alpha) = \mathfrak{F}_\alpha(U \cap W_\alpha)$, 并有

$$\mathfrak{F}_\alpha(U \cap W_\alpha \cap W_\beta) = \mathfrak{F}_\beta(U \cap W_\alpha \cap W_\beta).$$

受此启发, 部分下角标可忽略, 并定义 $\mathfrak{F}(U)$ 为

$$\prod_\alpha \mathfrak{F}(U \cap W_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(U \cap W_\alpha \cap W_\beta)$$

的等化子。

若 $V \subset U$, 由交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{F}(U) & \longrightarrow & \prod_\alpha \mathfrak{F}(U \cap W_\alpha) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(U \cap W_\alpha \cap W_\beta) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{F}(V) & \longrightarrow & \prod_\alpha \mathfrak{F}(V \cap W_\alpha) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(V \cap W_\alpha \cap W_\beta) \end{array}$$

及等化子的泛性质可构造出 $\mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathfrak{F}(V)$ (熟悉范畴论的读者可以直接使用极限的性质)。进一步可说明 $\mathfrak{F}$ 是一个函子。

最后验证它是一个层: 设 $U = \bigcup_\mu U_\mu$ 为开覆盖。则有交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{F}(U) & \longrightarrow & \prod_\alpha \mathfrak{F}(U \cap W_\alpha) & \rightrightarrows & \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(U \cap W_\alpha \cap W_\beta) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_\mu \mathfrak{F}(U_\mu) & \longrightarrow & \prod_\mu \left(\prod_\alpha \mathfrak{F}(U_\mu \cap W_\alpha) \right) & \rightrightarrows & \prod_\mu \left(\prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(U_\mu \cap W_\alpha \cap W_\beta) \right) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \prod_{\mu, \gamma} \mathfrak{F}(U_\mu \cap U_\gamma) & \longrightarrow & \prod_{\mu, \gamma} \left(\prod_\alpha \mathfrak{F}(U_\mu \cap U_\gamma \cap W_\alpha) \right) & \rightrightarrows & \prod_{\mu, \gamma} \left(\prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(U_\mu \cap U_\gamma \cap W_\alpha \cap W_\beta) \right) \end{array}$$

注意水平和垂直方向都是等化子序列 (如 $\{U_\mu \cap W_\alpha\}_\mu$ 是 $U \cap W_\alpha$ 的开覆盖)!

□

注解 1.14

以上结论是一种从局部构造黏合获得整体构造的方法。下面再给出另一种方法。

令 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间, $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{T}$ 的一个拓扑基, 由此产生 $\mathcal{P}_X$ 的一个子偏序集 $\mathcal{B}_X$ 。定义 $\mathcal{B}_X$ 上的预层为反变函子 $\mathcal{B}_X \rightarrow \text{Set}$ 。又设 $\mathcal{B}$ 在有限交下封闭。于是可利用定义 1.6, 将满足对应条件的预层称为“ $\mathcal{B}_X$ 上的层”。

命题 1.15

根据以上设定,

$$\text{Sh}(X) = \text{Sh}(\mathcal{P}_X) \simeq \text{Sh}(\mathcal{B}_X).$$

证明. 由 $\mathcal{B}_X \hookrightarrow \mathcal{P}_X$, 我们得到限制函子 (通过函子合成产生)

$$r : \text{Sh}(\mathcal{P}_X) \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{B}_X).$$

若 U 为 X 中开集 (即 $U \in \mathcal{P}_X$) 且 $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ 。由拓扑基的性质可知每个 $U_{\alpha} = \bigcup_{\mu} U_{\alpha\mu}$ 而 $U_{\alpha\mu} \in \mathcal{B}_X$ 。对 $\mathfrak{F}' \in \text{Sh}(\mathcal{B}_X)$, 定义 $\mathfrak{F}'(U_{\alpha})$ 为如下等化子

$$\mathfrak{F}'(U_{\alpha}) \longrightarrow \prod_{\mu} \mathfrak{F}'(U_{\alpha\mu}) \rightrightarrows \prod_{\mu, \gamma} \mathfrak{F}'(U_{\alpha\mu} \cap U_{\alpha\gamma})$$

注意, U_{α} 的不同覆盖给出同构的 $\mathfrak{F}'(U_{\alpha})$ 。在此基础上进一步利用 $\mathfrak{F}'(U_{\alpha})$ 和同样的技巧可定义 $\mathfrak{F}'(U)$, $\forall U \in \mathcal{P}_X$ 。由泛性质可见 $V \rightarrow U$ 将给出 $\mathfrak{F}'(U) \rightarrow \mathfrak{F}'(V)$, 即 $\mathfrak{F}'$ 为预层。进一步可证 $\mathfrak{F}'$ 必为层。由此我们构造出另一函子

$$e : \text{Sh}(\mathcal{B}_X) \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{P}_X),$$

它与 r 互为拟逆 (quasi-inverse)。

□

1.3 筛与层

为了便于课程中期向 Grothendieck 层论过渡, 我们用筛的语言重整层的定义。对于初学者, 这节内容可以粗看一遍, 跳过细节。

假设 X 为拓扑空间且 $\mathcal{P}_X$ 是其开集偏序集 (一个范畴)。若 U 为一开集, 即 $U \in \mathcal{P}_X$, 则它的一个开覆盖 $U = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ 提供的一个子偏序集, 其中元素 (即对象) 为所有 V_{α} 。

开集 U 最大的开覆盖包含其所有开子集, 直观上看恰好等同于 $\mathcal{P}_X$ 中所有终点为 U 的包含映射 (即态射) 集合, 而后者又可等同于可表函子 $h_U := \text{Hom}_{\mathcal{P}_X}(-, U)$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_X}(V, U) = \begin{cases} V \subseteq U, & \text{当 } V \text{ 为 } U \text{ 的子集;} \\ \emptyset, & \text{否则。} \end{cases}$$

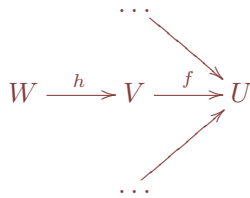
这是 Yoneda 嵌入 $\mathcal{P}_X \hookrightarrow \text{PSh}(X) = \text{Set}^{\mathcal{P}_X^{\text{op}}}$ 的一个直接应用。

对于 U 的其它开覆盖, 一般不能直接用函子的语言表述。为此, 我们用每个开覆盖生成一个新的开覆盖: 在给定开覆盖基础上, 添加其所有元素的所有开子集。我们将说明: 这是一类特殊的开覆盖, 能够等同于函子; 同时从层的构造角度看, 这部分开覆盖已经足够。我们使用一个专门术语“筛”来描述这类开覆盖: 为了便于今后讨论我们给出了一般定义, 但是在本节我们只关注 $\mathcal{C} = \mathcal{P}_X$ 的情形。

定义 1.16

设 $\mathcal{C}$ 为范畴且 $U \in \mathcal{C}$ 为对象。则 U 上的一个筛是一些以 U 为终点的态射之集合 S ，满足条件：若 $f \in S$ 且 fh 存在，则 $fh \in S$ 。

直观上有以下关于筛 S 的示意图：



按照上方描述，由开集 $U \in \mathcal{P}_X$ 生成的筛恰好是 $\text{Hom}_{\mathcal{P}_X}(-, U)$ （在此情形中，每个态射都是一个包含映射）。

引理 1.17

一般地， U 上的筛与 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U)$ 的子函子一一对应。

证明. 我们分三个步骤进行证明。首先，设 $\mathfrak{F}$ 为 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U)$ 子函子。令

$$S_{\mathfrak{F}} = \{f \mid f : V \rightarrow U \text{ 且 } f \in \mathfrak{F}(V)\}.$$

我们验证它是一个 U 上的筛。设 $h : W \rightarrow V$ 为 $\mathcal{C}$ 中的态射。要证 $fh \in S_{\mathfrak{F}}$ 。从 $\mathfrak{F}$ 为 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U)$ 的子函子可知，限制 $\mathfrak{F}(h)$ 由合成 $- \circ h$ 得到，并且我们有以下自然变换给出的交换图，即

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \cap & & \\ \mathfrak{F}(V) & \xrightarrow{\text{incl.}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, U) \\ \mathfrak{F}(h) \downarrow & & \downarrow - \circ h \\ \mathfrak{F}(W) & \xrightarrow{\text{incl.}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, U) \\ \cup & & \\ & fh & \end{array}$$

这说明 $fh \in \mathfrak{F}(W)$ 从而 $fh \in S_{\mathfrak{F}}$ 。

其次，设 S 为 U 上的筛。我们定义 $\mathfrak{F}_S(V) = \{f \mid f : V \rightarrow U \text{ 且 } f \in S\}$ 为 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, U)$ 的子集。根据定义可验证这些 $\{\mathfrak{F}(V)\}_{V \in \mathcal{C}}$ 给出 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U)$ 的一个子函子。

最后直接验证以上构造互逆！

□

为了行文方便，我们今后将不区分筛的态射集或函子属性，读者请根据上下文自行判断。

我们回到 $\mathcal{C} = \mathcal{P}_X$ 的情况。

定义 1.18

设 S 为 $U \in \mathcal{P}_X$ 上的筛, 若

$$U = \bigcup_{f \in S} \text{Im } f,$$

则称 S 为 U 的一个覆盖筛。

下方命题指出, 覆盖筛 (即特定类型的开覆盖) 已经足以判定一个预层是否为层。对于一般的范畴, 此概念缺乏直观意义 (除非借助 Yoneda 嵌入, 在预层范畴中展现)。因此, 如何在一般范畴中定义一个筛是覆盖筛, 需要专门研究, 而这就是 Grothendieck 层论的第一步 (见层论导引第一讲)。

命题 1.19

令 $\mathfrak{F}$ 为 $(X, \mathcal{T})$ 上的预层。则 $\mathfrak{F}$ 为层, 当且仅当, 对 $\forall U \in \mathcal{P}_X$, $\forall$ 开覆盖 $U = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ 以及 $\{V_{\alpha}\}_{\alpha}$ 产生的覆盖筛 S , 包含 $S \xrightarrow{i_S} h_U$ 诱导产生的集合映射 i_S^*

$$\mathfrak{F}(U) \xrightarrow{\text{Yoneda}} \text{Nat}(h_U, \mathfrak{F}) \xrightarrow{i_S^*} \text{Nat}(S, \mathfrak{F})$$

为 1-1 对应。

证明. 对于开覆盖 $U = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$, 考虑等化子序列

$$E \xrightarrow{d} \prod_{\gamma} \mathfrak{F}(V_{\gamma}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(V_{\alpha} \cap V_{\beta}).$$

由于 d 必为单射, 所以可设等化子 E 为 $\prod_{\gamma} \mathfrak{F}(V_{\gamma})$ 的子集。若 $\{e_{\gamma}\}_{\gamma} \in E$, 则 $e_{\gamma} \in \mathfrak{F}(V_{\gamma})$ 且 $e_{\alpha}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}} = e_{\beta}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}}$ 。根据等化子的泛性质, 存在自然映射 $c: \mathfrak{F}(U) \rightarrow E$ 使得 $e = dc$ 。

现在考虑开覆盖 $\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ 生成的覆盖筛 S 。显然 $S = \{V | V \subset V_{\alpha} \text{ 为开子集, } \forall \alpha\}$, 相应的等化子序列如下

$$E' \xrightarrow{d'} \prod_{V \in S} \mathfrak{F}(V) \rightrightarrows \prod_{V, W \in S} \mathfrak{F}(V \cap W).$$

首先, 我们证明 E 同构于 E' 。为此我们将两个等化子序列摆称两列。中间水平方向的映射, 从左往右是投影, 从右往左利用限制映射 (注意: 不依赖于包含映射 $V \rightarrow V_{\gamma}$ 的选取)。下方水平映射也是类似构造。

$$\begin{array}{ccc} E' & & E \\ d' \downarrow & & \downarrow d \\ \prod_{V \in S} \mathfrak{F}(V) & \xrightleftharpoons{\quad} & \prod_{\gamma} \mathfrak{F}(V_{\gamma}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \prod_{V, W \in S} \mathfrak{F}(V \cap W) & \xrightleftharpoons{\quad} & \prod_{\alpha, \beta} \mathfrak{F}(V_{\alpha} \cap V_{\beta}) \end{array}$$

因此, 我们根据泛性质获得两个映射 $E' \rightarrow E$ 和 $E \rightarrow E'$, 并进一步得知它们必然互逆。

其次, 可证 $E' \cong \text{Nat}(S, \mathfrak{F})$: 若 $\{e_{\gamma}|_V\}_{V \in S} \in E'$, 则定义自然变换 $\theta: S \rightarrow \mathfrak{F}$ 使得

$$\theta_V(V \hookrightarrow V_{\gamma}) = e_{\gamma}|_V$$

(这与 V_γ 选取无关!)。易证这提供所需 1-1 映射。

最后, 构造下方交换图, 左列为等化子序列:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Nat}(S, \mathfrak{F}) & \xleftarrow{i_S^*} & \text{Nat}(h_U, \mathfrak{F}) \\
 d'' \downarrow & & \downarrow \cong \\
 \prod_{V \in S} \mathfrak{F}(V) & \xleftarrow{e} & \mathfrak{F}(U) \\
 \Downarrow & & \\
 \prod_{V, W \in S} \mathfrak{F}(V \cap W) & &
 \end{array}$$

其中, 对 $\theta : S \rightarrow \mathfrak{F}$, $d''(\theta) = \{\theta(V \rightarrow U)\}_V$, 而 e 来自自然的限制。基于定义及上述讨论, $\mathfrak{F}$ 为层, 当且仅当对任意 U 和它的任意开覆盖, $(\mathfrak{F}(U), e) \cong (E, d)$ 为等化子, 当且仅当对任意 U 和它的任意覆盖筛 S , i_S^* 为同构。 $\square$

对 $\mathfrak{F} = h_U$ 应用上述命题, 可得以下结论。

推论 1.20

对任意 $U \in \mathcal{P}_X$, h_U 为层。

2 第二讲

空间上的集合层对应着某种覆盖空间，涵盖丰富的拓扑信息。这是 Lazard 从同伦论角度对层的等价刻画，对层论的发展起到至关重要的作用。在随后的 Grothendieck 层论中，产生了取值为范畴的“层”，即伪函子，对应着范畴覆盖的概念，即纤维范畴或 Grothendieck 构造。这些概念引领了高阶范畴理论的发展。

2.1 丛与截面层

定义 2.1

设 $\mathfrak{F}$ 为 X 上预层且 $x \in X$ 。令 $\mathcal{P}_x \subset \mathcal{P}_X$ 为由 x 的开邻域所构成的子偏序集，称

$$\mathfrak{F}_x = \varinjlim_{U \in \mathcal{P}_x} \mathfrak{F}(U)$$

为 $\mathfrak{F}$ 在点 x 处的 **茎** (stalk)。

利用极限的等价定义，以上概念存在相对具体的刻画。

注解 2.2

令 $U \in \mathcal{P}_x$, $s \in \mathfrak{F}(U)$ 。考虑集合

$$\{(U, s) \mid U \in \mathcal{P}_x, s \in \mathfrak{F}(U)\}$$

并在其上引入一个等价关系: $(U, s) \sim (V, t) \iff$ 存在 $W \in \mathcal{P}_x, W \subset U \cap V$, 使得 $s|_W = t|_W$ 。
每个 (U, s) 的等价类代表 $\mathfrak{F}$ 在点 x 的 **芽** (germ)，而

$$\mathfrak{F}_x \cong \{(U, s) \mid U \in \mathcal{P}_x, s \in \mathfrak{F}(U)\} / \sim.$$

利用茎和芽，我们可以构造一个拓扑空间，用于“覆盖” X 。

定义 2.3

设 $\mathfrak{F}$ 为 X 上预层。我们定义集合

$$\Lambda_{\mathfrak{F}} := \coprod_{x \in X} \mathfrak{F}_x,$$

以及一个投射 $p: \Lambda_{\mathfrak{F}} \rightarrow X$ (将 $\mathfrak{F}_x$ 映到 x)。我们在 $\Lambda_{\mathfrak{F}}$ 上引入使得 p 连续的最小拓扑。此时，我们称 $\Lambda_{\mathfrak{F}}$ 为 $\mathfrak{F}$ 的 **全空间**。

上述构造产生一个丛。

定义 2.4

设 X 和 Y 为拓扑空间。若 $p: Y \rightarrow X$ 为连续映射，则称三元组为 **X 上的丛** (bundle, 或 **X 上空间**)。

称 X 为**底空间**。对 $x \in X$ ，称 $p^{-1}(x)$ 为 Y 在 x 上的**纤维**。

以下为关于丛的一些基本性质。本讲将探讨层与丛之间的联系。

注解 2.5

1. 从 $Y = \bigcup_{x \in X} p^{-1}(x)$ 看，其上的拓扑将纤维“黏结”起来。
2. 考虑拓扑空间范畴 $\mathcal{Top}$ 。则 X 上**范畴** $\mathcal{Top}/X$ （也叫切片范畴）中的对象恰为 X 上的丛。它们之间的态射叫作 X 上**丛的态射**

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p^* & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

今后我们记 $\text{Bund}X := \mathcal{Top}/X$ 。

3. 我们获得一个函子

$$\Lambda_? : \text{PSh}(X) \rightarrow \text{Bund}X.$$

再不需要特别强调 p 的情况下，我们有时也简称 Y 为 X 上的丛。

定义 2.6

给定丛 $p: Y \rightarrow X$ 。若 $s: X \rightarrow Y$ 连续且 $ps = 1$ ，则称 s 为 p 的一个**截面**（cross-section）。

设 $U \subset X$ 为开集。则 p 诱导 $p_U: p^{-1}(U) \rightarrow U$ ，为 U 上的丛。实际上，这可以通过一个拉回来实现

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\text{incl.}} & Y \\ p_U \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{\text{incl.}} & X \end{array}$$

若 s 为 p_U 的一个截面(也叫 **p 在 U 上的截面**)，则有 $p_U s = 1$ ，也可写成一个包含 $p_U s: U \rightarrow Y \rightarrow X$ 。

定义 2.7

设 $p: Y \rightarrow X$ 为 X 上的丛。对任意开集 U ，令

$$\Gamma_p(U) = \{s \mid s: U \rightarrow Y, ps = \text{incl.}: U \rightarrow X\}.$$

则对 $\forall V \subset U$ ，存在自然的限制映射

$$\Gamma_p(U) \rightarrow \Gamma_p(V)$$

使得 Γ_p 为 X 上的预层。

根据定义我们立即得出以下结论。

命题 2.8

上述预层 Γ_p 为层，叫作丛的**截面层**。

证明. 任取开集 U 及其任意开覆盖 $U = \cup_{\alpha} V_{\alpha}$ 。令 $\{s_{\alpha} \in \Gamma_p(V_{\alpha})\}_{\alpha}$ 为一族截面，满足

$$s_{\alpha}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}} = s_{\beta}|_{V_{\alpha} \cap V_{\beta}}, \forall \alpha, \beta.$$

可直接构造映射 $s: U \rightarrow X$ 使得 $s|_{V_{\alpha}} = s_{\alpha}$ ，并由此可验证 s 是 p_U 的一个截面。从构造可以看出，在给定条件下， s 不仅存在且唯一。 $\square$

注解 2.9

1. 今后常记 $\Gamma Y = \Gamma(Y, p) = \Gamma_p$ 。
2. 以上构造实际上产生函子

$$\Gamma: \text{Bund}X \rightarrow \text{Sh}(X) \hookrightarrow \text{PSh}(X).$$

已知对于 X 上任意预层 $\mathfrak{F}$ 可以构造 X 上的丛

$$p: \Lambda_{\mathfrak{F}} \rightarrow X$$

使得 $\Lambda_{\mathfrak{F}} = \coprod_{x \in X} \mathfrak{F}_x$ 且 p 为自然的满射 ($p^{-1}(x) = \mathfrak{F}_x$)。全空间 $\Lambda_{\mathfrak{F}}$ 上赋予了使得 p 连续的最小拓扑，我们刻画如下：对每个 X 中开集 U 和任意 $s \in \mathfrak{F}(U)$ ，定义映射 $\dot{s}: U \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{F}}$ 使得

$$\dot{s}(x) = \text{germ}_x(s), \forall x \in U,$$

即 (U, s) 决定的点 x 的芽。易见 $p\dot{s}$ 为 U 到 X 的包含映射。令

$$\mathcal{B} = \{\dot{s}(U) \mid s \in \mathfrak{F}(U), \text{开集 } U \subset X\}.$$

用它（作为拓扑基）生成 $\Lambda_{\mathfrak{F}}$ 上的拓扑。因 $p^{-1}(U) = \bigcup_{s \in \mathfrak{F}(U)} \dot{s}(U)$ ，所以 p 连续。同时， $\dot{s}$ 为开映射、单射（若 $\dot{s}(x) = \dot{s}(y)$ ，则 $p\dot{s}(x) = p\dot{s}(y)$ ，即 $x = y$ ）且连续（ $p: \Lambda_{\mathfrak{F}} \rightarrow X$ 为**局部同胚**）。特别地， $\dot{s}$ 为 p 在 U 上的截面。

若 $\mathfrak{F}$ 为 X 上的预层，则丛 $p: \Lambda_{\mathfrak{F}} \rightarrow X$ 产生截面层 $\Gamma_p = \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}}$ 。实际上，我们有函子

$$\Lambda: \text{PSh}(X) \rightarrow \text{Bund}X, \mathfrak{F} \mapsto \Lambda_{\mathfrak{F}}$$

对于 X 的任意开集 U ，由 $s \mapsto \dot{s}$ 给出映射

$$\eta_U: \mathfrak{F}(U) \rightarrow \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}}(U) = \{q \mid q: U \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{F}} \text{ 且 } pq = \text{incl.}\}$$

提供一个自然变换

$$\eta: \mathfrak{F} \rightarrow \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}}.$$

定理 2.10

若 $\mathfrak{F}$ 为层, 则 $\eta: \mathfrak{F} \rightarrow \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}}$ 为自然同构。于是每个层均为截面层。

证明. 我们要证, 对任意开集 $U \subset X$, η_U 为同构。

首先, η_U 为单射: 若 $\dot{s}(x) = \dot{s}(y)$, 那么对 $\forall x \in U$ 有 $\text{germ}_x s = \text{germ}_x t$, 即存在 x 的开邻域 $V_x \subset U$ 使得 $s|_{V_x} = t|_{V_x}$ 。由于 $\{V_x\}_{x \in U}$ 是 U 的一个开覆盖, 而 $\mathfrak{F}$ 为层, 所以 $s = t$ 。

其次, η_U 为满射: 设 $h: U \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{F}}$ 为 $\Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}}(U)$ 中元素。那么对 $\forall x \in U$ 存在 x 的开邻域 U_x 以及 $s^x \in \mathfrak{F}(U_x)$ 使得 $h(x) = \text{germ}_x s^x$ 。由于 $\dot{s}^x(U_x)$ 为开集且 h 连续, 所以存在 x 的开邻域 V_x 使得 $h(V_x) \subset \dot{s}^x(U_x)$ 。因为 $V_x \subset U_x \subset U$, 所以 $\{V_x\}_{x \in U}$ 是 U 的一个开覆盖。

若 $y \in V_x$, 则 $h(y) \in \dot{s}^x(U_x)$, 即存在 $z \in U_x$ 使得 $h(y) = \dot{s}^x(z)$ 。于是由 $ph(y) = ps^x(z)$ 可得 $y = z$, 即 $h(y) = \dot{s}^x(y)$ 。

对 $\forall x \in U$, 有 $s^x|_{V_x} \in \mathfrak{F}(V_x)$ 。在 $V_x \cap V_y$ 上, 有 $\dot{s}^x|_{V_x \cap V_y} = h|_{V_x \cap V_y} = \dot{s}^y|_{V_x \cap V_y}$ 。于是 $\forall z \in V_x \cap V_y$ 有 $\dot{s}^x(z) = \dot{s}^y(z)$, 即

$$\text{germ}_z s^x = \text{germ}_z s^y,$$

从而 $s^x|_{V_x \cap V_y} = s^y|_{V_x \cap V_y}$ 。因此存在 $s \in \mathfrak{F}(U)$, 满足 $s|_{V_x} = s^x|_{V_x}$ 。综上可知, 对任意 $x \in U$, 总有

$$h(x) = \text{germ}_x s^x = \text{germ}_x s = \dot{s}(x),$$

即 $h = \dot{s} = \eta_U(s)$ 。 □

在下一节里继续对两个函子 Λ 和 Γ 进一步讨论之前, 我们借上述中间成果, 给出层化构造。

定理 2.11

对任意预层 $\mathfrak{F}$, $\eta_{\mathfrak{F}}: \mathfrak{F} \rightarrow \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}}$ 具有泛性质, 也就是说, 若有层 $\mathfrak{F}'$ 以及预层态射 $\theta: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$, 则存在唯一态射 $\sigma: \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{F}}} & \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}} \\ \searrow \theta & \downarrow \exists! \sigma & \searrow \Gamma\Lambda_{\theta} \\ & \mathfrak{F}' & \xrightarrow[\cong]{\eta_{\mathfrak{F}'}} \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}'} \end{array} \quad (\sigma \cdot \eta_{\mathfrak{F}} = \theta)$$

证明. 由于 $\eta_{\mathfrak{F}'}: \mathfrak{F}' \rightarrow \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}'}$ 为自然同构, 所以我们定义 $\sigma = \eta_{\mathfrak{F}'}^{-1} \Gamma\Lambda_{\theta}$ 。显然 σ 使上图交换。下证 σ 唯一。假设有 $\tau: \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 也满足上述交换图。由 $\sigma \cdot \eta_{\mathfrak{F}} = \tau \cdot \eta_{\mathfrak{F}}$, 需验证 $\sigma = \tau$ 。令 U 为 X 的开集且 $h \in \Gamma\Lambda_{\mathfrak{F}}(U)$ 。对 $\forall x \in U$, 存在邻域 V_x 以及 $s^x \in \mathfrak{F}(V_x)$, 使得 $h(x) = \text{germ}_x s^x$ 。从前面定理的证明中可知我们能取 V_x 足够小, 使得 $h|_{V_x} = \dot{s}^x = \eta_{V_x}(s^x)$ 。因此

$$\sigma_U(h)|_{V_x} = \sigma_U(h|_{V_x}) = \sigma \cdot \eta_{V_x}(s^x) = \tau \cdot \eta_{V_x}(s^x) = \tau_U(h)|_{V_x}.$$

由于 V_x 是 U 的开覆盖, 所以 $\sigma_U(h) = \tau_U(h)$ 。从 h 的任意性可得 $\sigma_U = \tau_U, \forall U$, 即 $\sigma = \tau$ 。 □

推论 2.12

包含函子 (或遗忘函子) $\text{Sh}(X) \hookrightarrow \text{PSh}(X)$ 存在左伴随 $(-)^{\#}$, 即

$$\text{Hom}_{\text{Sh}(X)}(\mathfrak{F}^{\#}, \mathfrak{F}') \cong \text{Hom}_{\text{PSh}(X)}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'),$$

对 $\forall \mathfrak{F} \in \text{PSh}(X)$, $\mathfrak{F}' \in \text{Sh}(X)$ 成立。此处 $\mathfrak{F}^\# := \Gamma \Lambda_{\mathfrak{F}}$ 。

定义 2.13

对任意预层 $\mathfrak{F} \in \text{PSh}(X)$, $\mathfrak{F}^\# \in \text{Sh}(X)$ 叫作 $\mathfrak{F}$ 的**层化** (sheafification 或 sheaf associated to $\mathfrak{F}$)。

给定预层 $\mathfrak{F}$ 和层 $\mathfrak{F}'$, 根据上述推论可知, 任意预层态射 $\phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 唯一对应一个层态射 $\psi : \mathfrak{F}^\# \rightarrow \mathfrak{F}'$ 且 ϕ 通过 ψ 分解为 $\phi = \psi\eta$ 。

2.2 层与平展丛

定义 2.14

设 $p : E \rightarrow X$ 为丛。如果 p 为局部同胚, 即对任意 $e \in E$ 存在开邻域 V 使得 $p(V)$ 为 X 中开集且 $p|_V$ 为同胚, 则称之为**平展丛** (étale bundle)。

由上方描述可知, 当 $\mathfrak{F}$ 为层, $\Lambda_{\mathfrak{F}}$ 为平展丛。

注解 2.15

如果 $p : E \rightarrow X$ 为平展且 $U \subset X$ 为开集, 那么拉回 p_U 也是平展

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{\quad} & E \\ p_U \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{\text{incl.}} & X \end{array}$$

命题 2.16

对平展丛 $p : E \rightarrow X$, p 及其截面均为开映射。对每个 $e \in E$ 至少存在一个截面 $s : U \rightarrow E$ 使得 $e \in s(U)$ 。所有截面的像构成 E 的一个拓扑基。如果 s 与 t 为两个截面, 则 $W = \{x \in U \mid s(x) = t(x)\}$ 为开集。

证明. 由定义直接可得。 □

现在我们陈述本讲主要定理。

定理 2.17

对于拓扑空间 X , 存在伴随函子

$$\text{Bund}X \begin{array}{c} \xrightarrow{\Gamma} \\ \xleftarrow{\Lambda} \end{array} \text{PSh}(X)$$

使得 $\eta_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} \rightarrow \Gamma \Lambda_{\mathfrak{F}}$ 为单位, 并有余单位 $\epsilon_Y : \Lambda_{\Gamma Y} \rightarrow Y$ 。

若 $\mathfrak{F}$ 为层, 则 $\eta_{\mathfrak{F}}$ 为同构; 若 Y 为平展, 则 ϵ_Y 为同构。

证明. 首先, 构造 ϵ_Y 。对 X 上丛 Y , 我们有平展丛 $\Lambda_{\Gamma Y}$ 。此丛中的每个点形如 $\text{germ}_x s$, $x \in X$, $s: U \rightarrow Y$ 。每个 s 决定一个映射 $\dot{s}: U \rightarrow \Lambda_{\Gamma Y}$ 使得 $\dot{s}(x) = \text{germ}_x s$ 。因此, 我们令 $\epsilon_Y(\dot{s}(x)) = \epsilon_Y(\text{germ}_x s) = s(x) \in Y, \forall x \in U, s \in \Gamma Y(U)$ 。

1. 以上定义不依赖于 s 的选取: 若有截面 $t: V \rightarrow Y$ 使得 $\dot{s}(x) = \dot{t}(x)$, 则存在 x 的开邻域 $W \subset U \cap V$ 使得 $s|_W = t|_W$ 。于是 $s(x) = t(x)$ 。
2. ϵ_Y 连续 (从而是 X 上丛的映射): 对 $\forall y \in Y$ 及开邻域 A_y , 要证 $\epsilon_Y^{-1}(A_y)$ 为开集。令 $\dot{s}(x) \in \epsilon_Y^{-1}(A_y)$, 有 $\epsilon_Y(\dot{s}(x)) = s(x) \in A_y$ (对某个 $x \in X$, 开邻域 U 及 $s: U \rightarrow Y$)。由 $\Lambda_{\Gamma Y}$ 上拓扑定义, 可知存在开邻域 V_x , 使得 $\dot{s}(x) \in \dot{s}(V_x) \subset \epsilon_Y^{-1}(A_y)$ 。
3. $\{\epsilon_Y\}_{Y \in \text{Bund} X}$ 构成自然变换: 态射

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & Y' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$$

诱导交换图

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\Gamma Y} & \xrightarrow{\epsilon_Y} & Y \\ \Lambda_{\Gamma q} \downarrow & & \downarrow q \\ \Lambda_{\Gamma Y'} & \xrightarrow{\epsilon_{Y'}} & Y' \end{array}$$

其次, 我们可验证 $\Gamma \xrightarrow{\eta^\Gamma} \Gamma \Lambda \Gamma \xrightarrow{\Gamma \xi} \Gamma$ 及 $\Lambda \xrightarrow{\Lambda \eta} \Lambda \Gamma \Lambda \xrightarrow{\epsilon \Lambda} \Lambda$ 为恒等。由于它们来自直接计算, 所以 Λ 是 Γ 的左伴随函子。

最后, 当 $Y \xrightarrow{p} X$ 为平展, ϵ_Y 为同构: 我们构造其逆 $\theta_Y: Y \rightarrow \Lambda_{\Gamma Y}$ 。设 $y \in Y$ 且 $p(y) = x$ 。存在 x 的开邻域 U 及截面 $s: U \rightarrow Y$ 满足 $ps = id_U$ 。由于 p 为局部同胚, 所以 $s(x) = y$ 。令 $\theta_Y(y) = \dot{s}(x)$ (此定义不依赖于 s 的选择)。可验证

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\theta_Y} & \Lambda_{\Gamma Y} \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$$

为交换且 θ_Y 为连续 (从而为丛态射), 并有 $\theta_Y^{-1}(\dot{s}(U)) = s(U)$ 。直接计算可知 $\epsilon_Y \theta_Y$ 及 $\theta_Y \epsilon_Y$ 均为恒等。□

推论 2.18

令 $\text{Etale } X$ 为 $\text{Bund } X$ 的满子范畴, 由 X 上平展丛构成。则函子 Λ 和 Γ 限制为以下范畴等价

$$\text{Etale } X \xrightleftharpoons[\Lambda]{\Gamma} \text{Sh}(X)$$

注解 2.19

基于以上原因, 在一些教材中, 作者将 X 上的层定义为 X 上的平展丛。

推论 2.20

给定 X 上层 $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$, 其间态射 $\theta: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 可以下面三种方式描述:

1. 函子间自然变换;
2. X 上空间态射 $\Lambda_{\mathfrak{F}} \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{F}'}$;
3. 一族映射 $\{\theta_x: \mathfrak{F}_x \rightarrow \mathfrak{F}'_x\}_{x \in X}$, 满足条件: 对每个开集 U 及 $s \in \mathfrak{F}(U)$, 映射 $U \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{F}}$, $x \mapsto \theta_x(s(x))$, 连续 (也就是说, 作为集合映射 $\theta = \{\theta_x\}_{x \in X}$, 对任意 U 及 $s \in \mathfrak{F}(U)$,

$$\theta \cdot s: U \xrightarrow{s} \Lambda_{\mathfrak{F}} \xrightarrow{\theta} \Lambda_{\mathfrak{F}'}$$

连续)。

证明. 已知 1 和 2 等价。我们证明 1 和 3 也等价。

从 1 推 3: 设有自然变换 $\theta: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 。由定义 θ 由一组映射 $\{\theta_U\}_{U \in \mathcal{P}_X}$ 构成。对 $\forall x \in X$, 产生 $\theta_x: \mathfrak{F}_x \rightarrow \mathfrak{F}'_x$ 。由于 $s(x) = \text{germ}_x s$, $\forall s \in \mathfrak{F}(U)$, $x \in U$, 从交换图:

$$\begin{array}{ccc} s \in \mathfrak{F}(U) & \xrightarrow{\theta_U} & \mathfrak{F}'(U) \\ \text{germ}_x(-) \downarrow & & \downarrow \text{germ}_x(-) \\ \mathfrak{F}_x & \xrightarrow{\theta_x} & \mathfrak{F}'_x \end{array}$$

可得 (*)

$$\theta_U(s)(x) = \text{germ}_x(\theta_U(s)) = \theta_x(\text{germ}_x s) = \theta_x(s(x)).$$

于是 $x \mapsto \theta \cdot s(x) = \theta_x s(x)$ 连续。

从 3 推 1: 若有满足上述条件的 $\{\theta_x\}_{x \in X}$, 则可用 (*) 定义 θ_U 及 θ 。

□

3 第三讲

本讲内容承接第二讲，进一步完善经典层论框架，为讨论具有代数结构的层进行铺垫。我们在最后给出函子 Λ 和 Γ 的一种抽象刻画，便于将来向 Grothendieck 层论过渡。

3.1 茎与层

在第二讲最后的推论中，我们已知层态射 $\theta : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 可由一族茎上映射 $\{\theta_x : \mathfrak{F}_x \rightarrow \mathfrak{F}'_x\}_{x \in X}$ 来刻画。我们沿着这一思路深入探索。下方给出一个后文将使用的构造，并介绍其基本性质。

定义 3.1

令 $x \in X$ 。其上的**茎函子**

$$\text{Stalk}_x : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Set}$$

在对象上为如下指定 $\mathfrak{F} \mapsto \mathfrak{F}_x$ 而在态射上是自然映射。对给定集合 $A \in \text{Set}$ ，定义 x 上的**摩天层** (skyscraper) 为

$$\text{Sky}_x(A) : \mathcal{P}_X^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

使得对任意开集 U

$$\text{Sky}_x(A)(U) = \begin{cases} A, & x \in U, \\ 1, & x \notin U. \end{cases}$$

从定义易证 $\text{Sky}_x(A)$ 确为层，并且我们获得一个函子 $\text{Sky}_x(-) : \text{Set} \rightarrow \text{Sh}(X)$ 。

引理 3.2

茎函子 Stalk_x 是摩天层函子 $\text{Sky}_x(-) : \text{Set} \rightarrow \text{Sh}(X)$ 的左伴随。

证明. 要证

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(\text{Stalk}_x \mathfrak{F}, A) \cong \text{Hom}_{\text{Sh}(X)}(\mathfrak{F}, \text{Sky}_x(A)).$$

一方面，给定映射 $\phi : \text{Stalk}_x(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_x \rightarrow A$ ，可定义层态射

$$\theta^\phi : \mathfrak{F} \rightarrow \text{Sky}_x(A)$$

使得 $\theta_U^\phi : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \text{Sky}_x(A)(U)$ 如下定义

$$\begin{cases} \mathfrak{F}(U) \rightarrow A \text{ 为 } \theta_U^\phi(s) = \phi(\text{germ}_x s), & x \in U; \\ \mathfrak{F}(U) \rightarrow 1 \text{ 为唯一映射,} & x \notin U. \end{cases}$$

另一方面，若有层态射 $\theta : \mathfrak{F} \rightarrow \text{Sky}_x(A)$ ，则它被一族映射 $\theta_y : \mathfrak{F}_y \rightarrow (\text{Sky}_x(A))_y$ ， $y \in X$ 定义。特别地，其中包含 $\theta_x : \mathfrak{F}_x \rightarrow A$ 。

易知以上构造互逆。 □

我们进一步证明，层态射的性质被它在茎上的刻画所决定。

命题 3.3

层态射 $\theta: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为满 (或单) 当且仅当, 对每个 $x \in X$, 集合映射 $\theta_x: \mathfrak{F}_x \rightarrow \mathfrak{F}'_x$ 为满 (或单)。

证明. 设 θ_x 均为满射。令 $\mathfrak{F} \xrightarrow[\beta]{\alpha} \mathfrak{F}''$ 为两个层态射, 满足 $\alpha\theta = \beta\theta$ 。在每个 $x \in X$, 有 $\alpha_x\theta_x = (\alpha\theta)_x = (\beta\theta)_x = \beta_x\theta_x$ 。于是 $\alpha_x = \beta_x, \forall x \in X$, 即 $\alpha = \beta$ 。从而 θ 为满。

对 θ_x 均为单, 证明方法类似因而略去。

反过来设 θ 为满态射。引理告诉我们 Stalk_x 有右伴随, 保持正向极限, 特别地它保持满射 (即 θ_x 是满, $\forall x \in X$)。

若 θ 为单态射, 则 θ_U 均为单射 (θ 是预层之间的单射)。设 $\text{germ}_x s, \text{germ}_x t \in \mathfrak{F}_x$ 满足 $\theta_x(\text{germ}_x s) = \theta_x(\text{germ}_x t)$ 。则存在 x 的开邻域 U 和 V , 使得 $\text{germ}_x s$ 的代表元 $(s, U) \in \mathfrak{F}(U)$ 和 $\text{germ}_x t$ 的代表元 $(t, V) \in \mathfrak{F}(V)$ 满足下方等式

$$\text{germ}_x(\theta_U(s)) = \text{germ}_x(\theta_V(t)).$$

于是存在开集 $W \subset U \cap V$, 使得 $\theta_U(s)|_W = \theta_V(t)|_W$ 。进一步从交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(U) & \xrightarrow{\theta_U} & \mathfrak{F}'(U) \\ \downarrow \scriptstyle ?|_W = \mathfrak{F}(W \rightarrow U) & & \downarrow \scriptstyle \mathfrak{F}'(W \rightarrow U) = ?|_W \\ \mathfrak{F}(W) & \xrightarrow{\theta_W} & \mathfrak{F}'(W) \end{array}$$

(和一个类似的关于 $W \subset V$ 的交换图) 可得对于 $s \in \mathfrak{F}(U)$ 和 $t \in \mathfrak{F}(V)$ 有

$$\theta_W(s|_W) = \theta_U(s)|_W = \theta_V(t)|_W = \theta_W(t|_W).$$

从 θ_W 为单可知 $s|_W = t|_W$, 即 $\text{germ}_x s = \text{germ}_x t$ 。 □

3.2 逆像层

我们在上一讲引入了正像函子, 此处给出其左伴随, 即逆像函子。

设 $f: X \rightarrow Y$ 为连续映射。已知它诱导函子 $\tilde{f}: \mathcal{P}_Y \rightarrow \mathcal{P}_X$ 及正像函子

$$\text{Res}_{\tilde{f}}: \text{PSh}(X) \rightarrow \text{PSh}(Y)$$

使得 $\text{Res}_{\tilde{f}}(\mathfrak{F})(V) = \mathfrak{F}(f^{-1}(V))$, 其中 $\mathfrak{F} \in \text{PSh}(X)$, $V \in \mathcal{P}_Y$; 并且它限制到层范畴上, 记作

$$f_*: \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y).$$

经典范畴论指出, $\text{Res}_{\tilde{f}}$ 在预层范畴层面存在左伴随, 即沿着 $\tilde{f}$ 的左 Kan 扩张

$$LK_{\tilde{f}}: \text{PSh}(Y) \rightarrow \text{PSh}(X),$$

并在层范畴间产生逆像函子

$$f^*: \text{Sh}(Y) \xrightarrow{\iota} \text{PSh}(Y) \xrightarrow{LK_{\tilde{f}}} \text{PSh}(X) \xrightarrow{(-)^\#} \text{Sh}(X).$$

定理 3.4

由定义可得 f^* 是 f_* 的左伴随函子。

证明. 从遗忘函子和 Kan 扩张的伴随性质可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}(f^*(\mathfrak{F}), \mathfrak{F}') &\cong \mathrm{Nat}(LK_{\widehat{f}}(\mathfrak{F}), \mathfrak{F}'), \\ &\cong \mathrm{Nat}(\mathfrak{F}, f_*(\mathfrak{F}')), \end{aligned}$$

□

因为 $\mathrm{Sh}(X) \simeq \mathrm{Etale}X$, 所以 f^* 存在几何构造方式。对于连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 以及 $E \in \mathrm{Bund}Y$, 沿着 f 的拉回产生 X 上丛 $f^*(E)$

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{p_2} & E \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

即得函子 $f^*: \mathrm{Bund}Y \rightarrow \mathrm{Bund}X$ 。

定理 3.5

设 $E \in \mathrm{Etale}Y$ 。则 $f^*(E) \in \mathrm{Etale}X$ 。从而有函子 $f^*: \mathrm{Etale}Y \rightarrow \mathrm{Etale}X$ 。

证明. 令 $(x, e) \in f^*(E)$, 满足 $f(x) = p(e)$ 。由于 E 为平展, 所以存在 e 的开邻域 U 使得 $p|_U: U \rightarrow p(U)$ 为同胚。于是 $f^{-1}(p(U)) \times U$ 为 (x, e) 在 $X \times E$ 中的开邻域, 且它与 $f^*(E)$ 的交集为 (x, e) 在 $f^*(E)$ 中的开邻域。后者通过投影映射 p_1 同胚地映到 $f^{-1}(p(U)) \subset X$ 上。 □

综上, 我们构造了

$$\mathrm{Sh}(Y) \xrightarrow[\simeq]{\Lambda} \mathrm{Etale}Y \xrightarrow{f^*} \mathrm{Etale}X \xrightarrow[\simeq]{\Gamma} \mathrm{Sh}(X)$$

且 $\Gamma f^* \Lambda: \mathrm{Sh}(Y) \rightarrow \mathrm{Sh}(X)$ 与前面定义的逆像函子 f^* 同构。

3.3 函子 Λ 和 Γ 的抽象刻画

预层实际上是一种特殊的伪函子 (或纤维范畴)。在此背景下, 层是特殊的叠形。我们给出第二讲中两个函子 Λ 和 Γ 的一类抽象刻画, 便于在课程后期与叠形理论简介相衔接。读者可以暂时跳过这一小节。

定义 3.6

设 $\mathfrak{F}: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathrm{Set}$ 为预层。则 $\mathfrak{F}$ 的元素范畴 (或 Grothendieck 构造)

$$\mathcal{C} \ltimes \mathfrak{F} \quad (\text{或 } \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{F})$$

的对象为 (U, x) , $U \in \mathcal{C}$, $x \in \mathfrak{F}(U)$, 而态射 $(V, y) \rightarrow (U, x)$ 由满足条件 $\mathfrak{F}(\alpha)(x) = y$ 的 $\alpha: V \rightarrow U$ 提供。

元素范畴最早应该出现在 Yoneda 等人的工作中, 一般形式的 Grothendieck 构造出现在 Grothendieck 及其合作者对于纤维范畴 (即 “范畴覆盖”) 的研究中。

注解 3.7

存在自然的投影函子 $\pi : \mathcal{C} \ltimes \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C}$, 使得 $(U, x) \mapsto U$ 且 $\alpha \mapsto \alpha$ 。实际上 $\mathcal{C} \ltimes \mathfrak{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个范畴覆盖, 也称 $\mathcal{C}$ 上纤维范畴。

若有自然变换 $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$, 则它诱导产生一个函子 $\mathcal{C} \ltimes \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{C} \ltimes \mathfrak{F}'$ 。

定理 3.8

设 $\mathfrak{H} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ 为从小范畴 $\mathcal{C}$ 到余完备范畴 $\mathcal{E}$ 的函子。令

$$\mathfrak{R} : \mathcal{E} \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$$

为由 $\mathfrak{R}(E)(U) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{H}(U), E)$, $\forall U \in \mathcal{C}, E \in \mathcal{E}$ 确定的函子。则 $\mathfrak{R}$ 存在左伴随

$$\mathfrak{L} : \text{PSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{E}$$

使得 $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}) = \varinjlim_{\mathcal{C} \ltimes \mathfrak{F}} \mathfrak{H} \circ \pi$ 。

证明. 根据上述设定可知 $\mathfrak{L}$ 确为函子。为证

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{L}(\mathfrak{F}), E) \cong \text{Nat}(\mathfrak{F}, \mathfrak{R}(E)),$$

我们构造双向映射。

设 $\tau : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{R}(E)$ 为自然变换。则 $\tau = \{\tau_U\}_{U \in \mathcal{C}}$, 其中分量

$$\tau_U : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathfrak{R}(E)(U) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{H}(U), E),$$

对 $\forall \alpha : V \rightarrow U$ 满足交换图

$$\begin{array}{ccc} x \in \mathfrak{F}(U) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha)} & \mathfrak{F}(V) \\ \tau_U \downarrow & & \downarrow \tau_V \\ \tau_U(x) \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{H}(U), E) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{H}(\alpha), E)} & \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{H}(V), E). \end{array}$$

于是从 $\mathfrak{H}(\alpha)\tau_U(x) = \tau_V(x|_V)$ 可知 $\{\tau_U\}_{U \in \mathcal{C}}$ 能表述为一族映射

$$\{\tau_U(x) : \mathfrak{H}(U) \rightarrow E\}_{(U, x)}$$

而交换图可以改写为

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H}(\pi(U, x)) = \mathfrak{H}(U) & & \\ \downarrow \mathfrak{H}(\pi(\alpha)) = \mathfrak{H}(\alpha) & \searrow \tau_U(x) & \\ \mathfrak{H}(\pi(V, y)) = \mathfrak{H}(V) & \nearrow \tau_V(y) & E \end{array}.$$

因为后者是极限锥, 所以它产生唯一态射

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{F}) = \varinjlim_{\mathcal{C} \ltimes \mathfrak{F}} \mathfrak{H} \pi \rightarrow E.$$

反之, 若有 $\alpha : \mathfrak{L}(\mathfrak{F}) \rightarrow E$, 则对 $\forall U \in \mathcal{C}$, 存在映射 $\mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathfrak{R}(E)(U)$, 由下式定义

$$x \mapsto [\alpha \rho_U : \mathfrak{H}(U) = \mathfrak{H} \pi(U, x) \rightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{F}) \rightarrow E],$$

其中 ρ_U 来自极限锥。这些映射组装成自然变换 $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{R}(E)$ 。

我们直接验证可知它们构成所需同构。 $\square$

设 X 为拓扑空间且 $U \subset X$ 为开集。则包含映射 $U \hookrightarrow X$ 提供 $\text{Bund}X = \mathcal{T}op/X$ 中一对象。这产生（正变）函子

$$\mathfrak{H} : \mathcal{C} = \mathcal{P}_X \rightarrow \text{Bund}X = \mathcal{E}.$$

对 $E \in \text{Bund}X$ ，即丛 $E = (p : Y \rightarrow X)$ ，构造 $\mathcal{P}_X$ 上预层 $\mathfrak{R}(p) = \mathfrak{R}(E)$ ，使得

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(p)(U) &= \text{Hom}_{\text{Bund}X}(\mathfrak{H}(U), (Y, p)) \\ &= \text{Hom}_{\text{Bund}X}((U, \text{incl.}), (Y, p)) \end{aligned}$$

其中元素即所有连续映射 f

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \text{incl.} & \swarrow p \\ & X & \end{array}.$$

根据第二讲可知 $\mathfrak{R}(p)(U) = \Gamma_p(U)$ ，于是 $\mathfrak{R}(p) = \Gamma_p \in \text{PSh}(X)$ 。由于 $\mathcal{E} = \text{Bund}X$ 是余完备，所以由上述定理可知 $\mathfrak{R}$ 存在左伴随

$$\mathfrak{L} : \text{PSh}(X) \rightarrow \text{Bund}X.$$

由 $\mathfrak{R} \cong \Gamma$ 可得 $\mathfrak{L} \cong \Lambda$ 。

注解 3.9

在 Grothendieck 层论中，采用类似的思路将“广义预层”（即伪函子，pseudofunctor）与“范畴覆盖”（即纤维范畴，fibred category）相对应。在 $\mathcal{C}$ 上引入 Grothendieck 拓扑后，进一步定义“广义层”（即叠形，stack），将这部分内容推广到更加一般的情形。

4 第四讲

集合层范畴是集合范畴的推广。为了解决代数问题，我们需要引入具有代数结构的层。最基本的情况是阿贝尔层，由集合层范畴中的阿贝尔对象构成。

4.1 阿贝尔层

定义 4.1

设 X 为拓扑空间。称 $\mathfrak{F}: \mathcal{P}_X^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 为**阿贝尔（群）预层**。若将 $\mathfrak{F}$ 看作 $\mathcal{P}_X^{op}$ 到 $\mathbf{Set}$ 的预层时，它是一个层，则称 $\mathfrak{F}$ 为 X 上的一个**阿贝尔（群）层** (sheaves of Abelian groups 或 Abelian sheaves)。

阿贝尔预层范畴记作 $\mathbf{PSh}(X, \mathbf{Ab})$ ，而阿贝尔层范畴记为 $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ 。

注解 4.2

给定阿贝尔层对应的平展丛 $p: E \rightarrow X$ ，对 $\forall x \in X$ ， $p^{-1}(x)$ 为阿贝尔群，且群运算（加法）连续。

设 $f: X \rightarrow Y$ 为连续映射。由于 f_* 与 f^* 均保持有限积，所以它们保持阿贝尔群对象，从而限制为

$$\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}) = \mathbf{Ab}(\mathbf{Sh}(X)) \xrightleftharpoons[f^*]{f_*} \mathbf{Ab}(\mathbf{Sh}(Y)) = \mathbf{Sh}(Y, \mathbf{Ab})$$

也就是说在阿贝尔层范畴间， f_* 与 f^* 仍然互为伴随函子。

4.2 核、余核与像

已知

$$\mathbf{PSh}(X, \mathbf{Ab}) = \mathbf{Ab}^{\mathcal{P}_X^{op}} = \mathbf{Ab}(\mathbf{Set}^{\mathcal{P}_X^{op}})$$

是阿贝尔范畴（因为 $\mathbf{Ab}$ 为阿贝尔范畴）。若 $\phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为预层态射（即自然变换），则定义（预层）**核** $\ker^p \phi$ 使得 $(\ker^p \phi)(U) := \ker(\phi_U)$ ， $\forall U \in \mathcal{P}_X$ 。同样可定义（预层）**余核** $\mathrm{cok}^p \phi$ 使得 $(\mathrm{cok}^p \phi)(U) := \mathrm{cok}(\phi_U)$ ， $\forall U \in \mathcal{P}_X$ 。

命题 4.3

若 $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}' \in \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ ，且 $\phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为态射，则预层 $\ker^p \phi$ 为层，记为 $\ker \phi$ 。

证明. 设 U 为 X 的开集且有开覆盖 $U = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$ 及 $s_{\alpha} \in \ker^p \phi(U_{\alpha})$ 满足 $s_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}} = s_{\beta}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}}$ ， $\forall \alpha, \beta$ 。由于 $s_{\alpha} \in \mathfrak{F}(U_{\alpha})$ ，所以存在 $s \in \mathfrak{F}(U)$ 使得 $s|_{U_{\alpha}} = s_{\alpha}$ ， $\forall \alpha$ 。下证 $s \in \ker^p \phi(U)$ 。

由于 $\phi_U(s) \in \mathfrak{F}'(U)$ 满足 $\phi_U(s)|_{U_{\alpha}} = \phi_{U_{\alpha}}(s|_{U_{\alpha}}) = \phi_{U_{\alpha}}(s_{\alpha}) = 0$ ， $\forall \alpha$ ，以 $\phi_U(s) = 0 \in \mathfrak{F}'(U)$ 。从而 $s \in \ker^p \phi(U)$ 。

唯一性证明类似（略）。 $\square$

由此可知， $\ker \phi$ 显然是 $\phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 的核（在层或预层范畴中）。层态射是单态射当且仅当作为预层态射是单。相对而言，层的满态射与作为预层的满态射，有很大差异。

例 4.4

令 $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, 而 $\mathfrak{F}$ 为 X 上常数层 $\mathbb{Z}$ (茎总是 $\mathbb{Z}$)。令 $\mathfrak{F}'$ 为如下定义的 X 上的层

$$\mathfrak{F}' = \text{Sky}_0 \mathbb{Z} \oplus \text{Sky}_1 \mathbb{Z}.$$

再令 $\phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为层态射, 使得

$$\phi_x = \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{Z}}, & x = 0 \text{ or } 1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

因为

$$\mathfrak{F}'(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & x = 0 \text{ or } 1; \\ 0, & \text{else,} \end{cases}$$

所以这是一个层的满态射。然而 ϕ 作为预层态射非满! 例如, $\phi_X: \mathfrak{F}(X) \rightarrow \mathfrak{F}'(X)$ 非满。

设 $\phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为 X 上的层态射。根据第二讲中层化的性质, $(\text{cok}^p \phi)^\#$ 为层且存在自然态射 $\pi': \mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok}^p \phi$, 和态射

$$\pi: \mathfrak{F}' \xrightarrow{\pi'} \text{cok}^p \phi \xrightarrow{\eta} (\text{cok}^p \phi)^\#.$$

命题 4.5

在 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中, $\pi: \mathfrak{F}' \rightarrow (\text{cok}^p \phi)^\#$ 是层态射 $\phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 的余核。

证明. 设 $\mathfrak{F}''$ 为层且有

$$\mathfrak{F}' \xrightarrow{\pi} (\text{cok}^p \phi)^\# \xrightarrow[\psi']{\psi} \mathfrak{F}'',$$

使得

$$\psi\pi = \psi'\pi.$$

由 $\text{cok} \phi$ 以及 $(\text{cok} \phi)^\#$ 的泛性质, 可知存在唯一的 ψ'' 和 ψ''' 使下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}' & \xrightarrow{\psi\pi = \psi'\pi} & \mathfrak{F}'' \\ \pi' \searrow & & \nearrow \psi'' \\ & \text{cok}^p \phi & \\ & \searrow \eta & \uparrow \psi''' \\ & & (\text{cok}^p \phi)^\# \end{array}$$

于是 $\psi''' = \psi = \psi'$ 。

□

基于以上结论, 我们给出下方定义。

定义 4.6

设 $\phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为层态射。称上述 π 或者 $(\text{cok}^p \phi)^\#$ 为 ϕ 的**余核**，记作 $\text{cok} \phi$ 。

定义 4.7

若 ϕ 为层态射，则令其**像**为

$$\text{Im} \phi = \ker(\mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok} \phi).$$

为了后续讨论，我们回顾若干概念。

定义 4.8

设 $\cdots \rightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}' \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}'' \rightarrow \cdots$ 为阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中序列。若 $\ker \psi = \text{Im} \phi$ ，称它在 $\mathfrak{F}'$ 处**正合**。如果序列在每处均正合，则称其为**正合列**。

如果 $0 \rightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}' \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}'' \rightarrow 0$ 正合，则称之为一个**短正合列**。

假设 $F: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ 为阿贝尔范畴间的函子，将 $\mathcal{A}_1$ 中正合列 $0 \rightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}' \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}'' \rightarrow 0$ 映到 $\mathcal{A}_2$ 中序列

$$0 \rightarrow F(\mathfrak{F}) \xrightarrow{F(\phi)} F(\mathfrak{F}') \xrightarrow{F(\psi)} F(\mathfrak{F}'') \rightarrow 0.$$

1. 如果对 $\mathcal{A}_1$ 中任意正合列，序列

$$0 \rightarrow F(\mathfrak{F}) \xrightarrow{F(\phi)} F(\mathfrak{F}') \xrightarrow{F(\psi)} F(\mathfrak{F}'') \rightarrow 0.$$

正合，则称 F 为**正合函子**。

2. 如果对 $\mathcal{A}_1$ 中任意正合列，序列

$$0 \rightarrow F(\mathfrak{F}) \xrightarrow{F(\phi)} F(\mathfrak{F}') \xrightarrow{F(\psi)} F(\mathfrak{F}'')$$

正合，则称 F 为**左正合函子**。

3. 如果对 $\mathcal{A}_1$ 中任意正合列，序列

$$F(\mathfrak{F}) \xrightarrow{F(\phi)} F(\mathfrak{F}') \xrightarrow{F(\psi)} F(\mathfrak{F}'') \rightarrow 0$$

正合，则称 F 为**右正合函子**。

我们将说明 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 为阿贝尔范畴，且包含函子（或遗忘函子） $\iota: \text{Sh}(X, \text{Ab}) \rightarrow \text{PSh}(X, \text{Ab})$ 只是左正合。

4.3 阿贝尔层的性质

引理 4.9

设 X 为拓扑空间， $\mathfrak{F}$ 为 X 上预层。对 $\forall x \in X$ ，自然映射 $\eta_x: \mathfrak{F}_x \rightarrow (\mathfrak{F}^\#)_x$ 为同构。

证明. 由 $\Lambda_{\mathfrak{F}} = \bigsqcup_{y \in X} \mathfrak{F}_y$, 对 x 的任意开邻域 U , $\mathfrak{F}^\#(U)$ 等同于

$$\Gamma \Lambda_{\mathfrak{F}}(U) = \{\dot{s} : U \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{F}} \mid \dot{s}(x) = \text{germ}_x s, s \in \mathfrak{F}(U)\},$$

并有 $\eta_U : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathfrak{F}^\#(U)$, $s \mapsto \dot{s}$. 后者诱导 $\eta_x : \mathfrak{F}_x \rightarrow (\mathfrak{F}^\#)_x$. 注意到存在自然映射 $\mathfrak{F}^\#(U) \rightarrow \mathfrak{F}_x, \dot{s} \mapsto \dot{s}(x)$. 从泛性质可得 η_x 为同构. $\square$

可从平展丛的定义直接“看出”上述结论。

注解 4.10

当 $\mathfrak{F}$ 为阿贝尔预层时, η_x 为群同构: 若 $(s, U), (t, V)$ 代表 $\mathfrak{F}_x$ 中两个芽, 则在 $U \cap V$ 上存在 $(s+t, U \cap V)$, 它代表上述两个芽在 $\mathfrak{F}_x$ 中的和。

更一般地, 若 $\phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 的阿贝尔预层态射, 则 $\phi_x : \mathfrak{F}_x \rightarrow \mathfrak{F}'_x$ 为群同态。

已知 $\text{PSh}(X, \text{Ab})$ 为阿贝尔范畴, 其中的核、余核等记作 $\ker^p \phi, \text{cok}^p \phi$ 等。在 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中, 对层态射 $\phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 定义了核 $\ker \phi = \ker^p \phi$, 余核 $\text{cok} \phi = (\text{cok}^p \phi)^\#$, 像 $\text{Im} \phi = \ker(\mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok} \phi)$ 等。若 $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为层的满同态, 则称 $\mathfrak{F}'$ 为 $\mathfrak{F}$ 的商层。

命题 4.11

若 $\phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中态射, 则 $(\ker \phi)_x = \ker \phi_x$ 。

证明. 根据定义, 我们有以下等价刻画

$$\begin{aligned} u &\in (\ker \phi)_x \\ \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{P}_x, s \in \ker \phi(U) : u &= \text{germ}_x s \\ \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{P}_x, s \in \mathfrak{F}(U) : \phi_U(s) &= 0, u = \text{germ}_x s \\ \Leftrightarrow \phi_x(u) &= 0 \\ \Leftrightarrow u &\in \ker \phi_x. \end{aligned}$$

$\square$

分别记 $\pi^p : \mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok}^p \phi$ 和 $\pi : \mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok} \phi$ 为自然的预层态射及层态射。交换图

$$\begin{array}{ccc} & & (\text{cok}^p \phi)(U) \\ & \nearrow \pi_U^p & \downarrow \eta \\ \mathfrak{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathfrak{F}'(U) \\ & \searrow \pi_U & \downarrow \\ & & (\text{cok} \phi)(U) \end{array}$$

诱导产生新交换图

$$\begin{array}{ccc} & & (\text{cok}^p \phi)_x \\ & \nearrow \pi_x^p & \downarrow \cong \eta_x \\ \mathfrak{F}_x & \xrightarrow{\phi_x} & \mathfrak{F}'_x \\ & \searrow \pi_x & \downarrow \\ & & (\text{cok} \phi)_x \end{array}$$

命题 4.12

若 $\phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ 为 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中态射, 则 $(\text{cok}^p \phi)_x = (\text{cok} \phi)_x = \text{cok} \phi_x$ 。

证明. 设 $u' \in \mathfrak{F}'_x$ 。我们有以下等价

$$\begin{aligned} \pi_x^p(u') &= 0 \\ \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{P}_x \ s' \in \mathfrak{F}'(U) : u' = \text{germ}_x s', \pi_U^p(s') &= 0 \\ \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{P}_x, s' \in \mathfrak{F}'(U) : u' = \text{germ}_x s', s' \in \text{Im} \phi(U) \\ \Leftrightarrow u' &\in \text{Im} \phi_x \end{aligned}$$

从 $\mathfrak{F}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathfrak{F}'_x \xrightarrow{\pi_x^p} (\text{cok}^p \pi)_x$, 可知 $(\text{cok}^p \phi)_x \cong \mathfrak{F}'_x / \text{Im} \phi_x = \text{cok} \phi_x$ 。

□

我们验证阿贝尔层范畴确为阿贝尔范畴。

定理 4.13

在 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中, 有

1. 每个子层均为某个层态射之核;
2. 每个商层均为某个层态射之余核。

因此在 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中每个单态射均为核, 而每个满态射均为余核。

证明. 在 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中,

1. 设 $\iota: \mathfrak{F} \hookrightarrow \mathfrak{F}'$ 为子层嵌入。由于 $\mathfrak{F} \hookrightarrow \mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok} \iota$ 为零态射, 所以 ι 分解为 $\mathfrak{F} \hookrightarrow \ker(\mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok} \iota) \hookrightarrow \mathfrak{F}'$ 。对 $\forall x \in X$, 有 $\mathfrak{F}_x = \ker(\mathfrak{F}'_x \rightarrow \text{cok} \iota_x) = \ker(\mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok} \iota)_x$ 。于是 $\mathfrak{F} = \ker(\mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok} \iota)$ 。
2. 若有满态射 $\pi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$, 要证明 $\mathfrak{F}' = \text{cok}(\ker \pi \rightarrow \mathfrak{F})$ 。由于存在交换图

$$\begin{array}{ccc} & & \text{cok} \pi \\ & \nearrow \rho & \downarrow \psi \\ \ker \pi \hookrightarrow \mathfrak{F} & \searrow \pi & \mathfrak{F}' \end{array}$$

且对 $\forall x \in X$ 有 π_x 满, 所以 ψ_x 为满。又由 $\psi_x: (\text{cok} \pi)_x = \text{cok}(\pi_x) \rightarrow \mathfrak{F}_x$ 为单射, 可知 ψ 为同构。

□

注解 4.14

在 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中有显然的余积 $\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}'$ 。基于前述性质, $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 为阿贝尔范畴。

定理 4.15

1. 预层序列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}' \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}'' \longrightarrow 0$$

正合，则

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathfrak{F}'_x \xrightarrow{\psi_x} \mathfrak{F}''_x \longrightarrow 0$$

正合。

2. 层序列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}' \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}'' \longrightarrow 0$$

正合等价于

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathfrak{F}'_x \xrightarrow{\psi_x} \mathfrak{F}''_x \longrightarrow 0$$

正合。

3. 如果层序列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}' \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}'' \longrightarrow 0$$

作为预层序列正合，则作为层序列也正合。

证明. 我们只在 $\mathfrak{F}'$ 处进行证明。其他位置随即自动导出。

1. 设 $u \in \mathfrak{F}_x$ ，使得 $\phi_x(u) = 0 \in \mathfrak{F}'_x$ 。则存在 x 的开邻域 U 以及 $s \in \mathfrak{F}(U)$ 使得 $u = \text{germ}_x s$ 。
由交换图

$$\begin{array}{ccc} s \in \mathfrak{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathfrak{F}'(U) \\ \text{germ}_x \downarrow & & \downarrow \text{germ}_x \\ u \in \mathfrak{F}_x & \xrightarrow{\phi_x} & \mathfrak{F}'_x \end{array}$$

可知 $(\phi_U(s), U)$ 代表 $\phi_x(u) \in \mathfrak{F}'_x$ 。因为 $\phi_x(u) = 0$ ，所以当 U 足够小时，必有 $\phi_U(s) = 0$ 。从 ϕ_U 的单性，可知 $s = 0$ 。从而 $u = 0$ ，即 ϕ_x 为单射（ ψ_x 证明类似）。

2. 由前面讨论可知 ϕ 为单（或 ψ 为满）当且仅当 ϕ_x 为单（或 ψ_x 为满）， $\forall x \in X$ 。因此，

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}' \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}'' \longrightarrow 0$$

正合当且仅当 $(\text{Im} \phi)_x \subset (\ker \psi)_x$ 为相等。由定义

$$\begin{aligned} & (\text{Im} \phi)_x \\ &= \ker(\mathfrak{F}' \rightarrow \text{cok} \phi)_x \\ &\cong \ker(\mathfrak{F}'_x \rightarrow (\text{cok} \phi)_x) \\ &\cong \ker(\mathfrak{F}'_x \rightarrow \text{cok} \phi_x) \\ &= \text{Im} \phi_x \\ &= \ker \psi_x \\ &= (\ker \psi)_x. \end{aligned}$$

3. 综合 1 和 2 即得。

□

迄今为止，我们在阿贝尔层范畴中讨论正合性。实际上，更一般的正合性是通过“是否保持极限”来判断。为了适配课程需求，在经典层论部分我们仅陈述以下特例。

定理 4.16

层化函子 $(-)^{\#} : \text{PSh}(X, \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X, \text{Ab})$ 为正合。

证明. 设

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}' \longrightarrow \mathfrak{F}'' \longrightarrow 0$$

为预层正合列。于是, 对 $\forall x \in X$,

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}_x \longrightarrow \mathfrak{F}'_x \longrightarrow \mathfrak{F}''_x \longrightarrow 0$$

正合。层化产生预层交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{F} & \longrightarrow & \mathfrak{F}' & \longrightarrow & \mathfrak{F}'' \longrightarrow 0 \\ & & \eta \downarrow & & \eta' \downarrow & & \eta'' \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{F}^{\#} & \longrightarrow & \mathfrak{F}'^{\#} & \longrightarrow & \mathfrak{F}''^{\#} \longrightarrow 0 \end{array}$$

应用茎函子可得交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{F}_x & \longrightarrow & \mathfrak{F}'_x & \longrightarrow & \mathfrak{F}''_x \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\mathfrak{F}^{\#})_x & \longrightarrow & (\mathfrak{F}'^{\#})_x & \longrightarrow & (\mathfrak{F}''^{\#})_x \longrightarrow 0 \end{array}$$

由上方正合性可得下方正合。

□

引理 4.17

设 $f : X \rightarrow Y$ 为连续映射且 $\mathfrak{F}$ 为 Y 上的层。对 $\forall x \in X$, 有 $(f^*\mathfrak{F})_x \cong \mathfrak{F}_{f(x)}$ 。

证明. 回顾逆像函构造

$$f^* : \text{Sh}(Y) \xhookrightarrow{\iota} \text{PSh}(Y) \xrightarrow{LK_{\hat{f}}} \text{PSh}(X) \xrightarrow{(-)^{\#}} \text{Sh}(X).$$

只需对 $LK_{\hat{f}}$ 进行讨论: 设 $\mathfrak{F}$ 为 Y 上预层, 证明 $(LK_{\hat{f}}\mathfrak{F})_x \cong \mathfrak{F}_{f(x)}$ 。我们直接计算: 若 U 为 X 中开集, 则

$$(LK_{\hat{f}}\mathfrak{F})(U) \cong \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathfrak{F},$$

其中 V 为 Y 中开集。于是存在自然映射 $(LK_{\hat{f}}\mathfrak{F})(U) \rightarrow \mathfrak{F}_{f(x)}$, $\forall U$ 。它导致自然映射 $(LK_{\hat{f}}\mathfrak{F})_x \rightarrow \mathfrak{F}_{f(x)}$ 。

由于 f 连续, 所以对 $f(x)$ 的任意开邻域 V , 存在 x 的一个开邻域 U 使得 $U \subset f^{-1}(V)$, 即 $f(U) \subset V$ 。这导致以上自然映射成为同构 (利用极限的泛性质)。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(V) & \dashrightarrow & (LK_{\hat{f}}\mathfrak{F})(U) \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \mathfrak{F}_{f(x)} & \xleftarrow{\cong} & (LK_{\hat{f}}\mathfrak{F})_x \end{array}$$

□

定理 4.18

设 $f : X \rightarrow Y$ 连续。则 $f^* : \text{Sh}(Y, \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X, \text{Ab})$ 正合。

证明. 设 $0 \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F}'' \rightarrow 0$ 为 $\text{Sh}(Y, \text{Ab})$ 中的正合列。对 $\forall x \in X$, 有

$$0 \rightarrow \mathfrak{F}_{f(x)} \rightarrow \mathfrak{F}'_{f(x)} \rightarrow \mathfrak{F}''_{f(x)} \rightarrow 0$$

正合。由上述引理可知

$$0 \rightarrow (f^*\mathfrak{F})_x \rightarrow (f^*\mathfrak{F}')_x \rightarrow (f^*\mathfrak{F}'')_x \rightarrow 0$$

正合, $\forall x \in X$ 。于是

$$0 \rightarrow f^*\mathfrak{F} \rightarrow f^*\mathfrak{F}' \rightarrow f^*\mathfrak{F}'' \rightarrow 0$$

为 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中正合列。

□

5 第五讲

在进入模层和同调代数之前，我们再介绍几个层范畴相关构造。这些构造基本都在模层范畴层面上保留。

5.1 限制与延拓

设 U 为 X 中开集，则 X 上的任意层自然限制为 U 上的层。它可以通过函子方式自然产生。

定义 5.1

设 X 为 Y 的子空间， $\mathfrak{F}$ 为 Y 上的层，记 $\iota: X \hookrightarrow Y$ 为自然嵌入。称逆像 $\iota^*\mathfrak{F}$ 为 $\mathfrak{F}$ 到 X 上的**限制**，也记作 $\mathfrak{F}|_X$ 。

对任意开子集 $U \in \mathcal{P}_X$ ， $\iota^*\mathfrak{F}(U) = \varinjlim_{\iota(U) \subset V} \mathfrak{F}$ ， V 为 Y 中开集。当 X 为 Y 中开子集时，由于指标范畴有初始对象（最小元素） U ，所以 $\iota^*\mathfrak{F}(U) \cong \mathfrak{F}(U)$ 。

命题 5.2

若 $\iota: X \hookrightarrow Y$ 而 $\mathfrak{F}$ 为 X 上的层。则 $\epsilon: (\iota_*\mathfrak{F})|_X = \iota^*\iota_*\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ 为同构。

证明. 考虑 $\epsilon_x: (\iota^*\iota_*\mathfrak{F})_x \rightarrow \mathfrak{F}_x$ ， $\forall x \in X$ 。对 x 的任意开邻域 U 有

$$(\iota^*\iota_*\mathfrak{F})(U) = \varinjlim_{\iota(U) \subset V} \iota_*\mathfrak{F},$$

V 为 Y 中开集。

由于 $\iota_*\mathfrak{F}(V) = \mathfrak{F}(\iota^{-1}V) = \mathfrak{F}(V \cap X)$ ，所以 $(\iota^*\iota_*\mathfrak{F})_x$ 恰为 $\mathfrak{F}_x$ ，即 ϵ_x 为同构， $\forall x \in X$ 。 $\square$

定义 5.3

设 X 为 Y 的子空间且 $\mathfrak{F}$ 为 X 上的层。若 $\mathfrak{F}'$ 为 Y 上的层，使得 $\mathfrak{F}'|_X \cong \mathfrak{F}$ ，则称 $\mathfrak{F}'$ 为 $\mathfrak{F}$ 的一个**延拓**。若 $\mathfrak{F}'$ 还满足 $\mathfrak{F}'_y = \emptyset$ ， $\forall y \in Y \setminus X$ ，则称 $\mathfrak{F}'$ 为一个**空集延拓**（extension by the empty set，蕴含 $\mathfrak{F}'|_{Y \setminus X} = \emptyset$ ）。

对于 $\iota: X \rightarrow Y$ 和 $\mathfrak{F} \in \text{Sh}(X)$ ， $\iota_*\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的一个延拓，但它一般不是空集延拓。当我们考虑阿贝尔层时，其空集延拓（如果存在）不一定是阿贝尔层。此时我们需要调整定义（将上述定义中的初对象 $\emptyset \in \text{Set}$ 换成初对象 $0 \in \text{Ab}$ 即可），引入**零延拓**（extension by zero）概念。

例 5.4

设 $X = \mathcal{R} \setminus 0 \hookrightarrow \mathcal{R} = Y$ ，并考虑 Y 上的常数层 $\mathbb{Z}_Y$ 。于是

$$\mathbb{Z}_Y|_X = \mathbb{Z}_X.$$

再考虑 $\iota_*\mathbb{Z}_X$ ，它是 $\mathbb{Z}_X$ 的一个延拓。但是

$$(\iota_*\mathbb{Z}_X)_y = \begin{cases} \mathbb{Z}, & y \neq 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & y = 0 \end{cases}$$

因此， $\iota_*\mathbb{Z}_X$ 不是 $\mathbb{Z}_X$ 的零延拓。

我们将构造零延拓并刻画其存在性。

注意：在 $\mathbf{Ab}$ 中，0 既是初对象也是终对象。

引理 5.5

若 X 为 Y 中闭子空间，则对 X 上任意阿贝尔层， $\iota_*\mathfrak{F}$ 为 $\mathfrak{F}$ 的零延拓。

证明. 已知 $\iota_*\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的延拓。现设 $y \in Y \setminus X$ 。则存在 y 的开邻域 V 使得 $V \subset Y \setminus X$ 。于是 $(\iota_*\mathfrak{F})(V) = \mathfrak{F}(\iota^{-1}(V)) = \mathfrak{F}(V \cap X) = \mathfrak{F}(\emptyset) = 0$ 。所以 $(\iota_*\mathfrak{F})_y \equiv 0, \forall y \in Y \setminus X$ 。□

下一节我们将推广此结论。

5.2 局部闭子空间与零延拓

我们利用平展丛探讨零延拓的存在性。

定义 5.6

设 Y 为拓扑空间且 $X \subset Y$ 。若 X 在其闭包 $\bar{X}$ 中为开集，则称 X 在 Y 中为**局部闭** (locally closed)。

空间的开子集和闭子集显然都是局部闭。代数几何中常见的例子有拟仿射簇 (quasi-affine variety) 和拟投射簇 (quasi-projective variety)。为便于应用，我们给出局部闭的等价刻画。

引理 5.7

1. $X \subset Y$ 为局部闭；
2. 存在 Y 中开集 U 以及闭集 V ，使得 $X = U \cap V$ ；
3. 对 $\forall x \in X$ ，存在 x 的开邻域 U_x ，使得 $U_x \cap X$ 在 X 中闭。

证明. 显然 (2) 与 (3) 等价。从 (1) 到 (2)：由于存在 Y 中开集 U 使得 $X = U \cap \bar{X}$ ，所以取 $V = \bar{X}$ 即可。从 (2) 推 (1)：注意到 $X = X \cap \bar{X} = (U \cap V) \cap \bar{X} = U \cap (V \cap \bar{X}) = U \cap \bar{X}$ ，即 X 在 $\bar{X}$ 中为开。□

局部闭子空间上的阿贝尔层存在唯一的零延拓。

定理 5.8

子空间 $X \subset Y$ 为局部闭当且仅当 X 上任意阿贝尔层 $\mathfrak{F}$ 存在唯一零延拓，记作 $\iota_*\mathfrak{F}$ (此处 $\iota: X \hookrightarrow Y$ 为包含映射)。

证明. “ $\Leftarrow$ ” 选 $\mathfrak{F} = \mathbb{Z}_X$ 为 X 上常数层 (对应平展空间 $E_X = X \times \mathbb{Z}$)。它存在零延拓 $\mathfrak{F}'$ ：对 $x \in X$ ，存在开集 $U_x \subset Y$ ，及 $s \in \mathfrak{F}'(U)$ 使得 $s(x) = (x, 1)$ 。经过适当收缩，能使 $s(x') = (x', 1), \forall x' \in U_x \cap X$ 。由于 $U_x \cap X^c = \{y \in U | s(y) = 0\}$ (补集 $X^c = Y \setminus X$) 是 U_x 中开集，所以由引理 5.7 (2)， X 为局部闭。

“ $\Rightarrow$ ” 设 $X \subset Y$ 为局部闭。只要 $\mathfrak{F}'$ 是 $\mathfrak{F}$ 的一个零延拓，对 $\forall Y$ 中开集 U ，我们有单射

$$\mathfrak{F}'(U) \rightarrow \mathfrak{F}(U \cap X), s' \mapsto s'|_{U \cap X}.$$

截面 $s \in \mathfrak{F}(U \cap X)$ 在上述映射的像中, 当且仅当 s 通过以下方式连续延拓到 U 上: 令 $s(y) = 0, \forall y \in U \setminus (U \cap X)$ 。而后者成立当且仅当 $\{x \in U \cap X | s(x) \neq 0\}$ 是 U 中闭集。此条件与 $\mathfrak{F}'$ 完全无关, 因此 $\mathfrak{F}'$ 存在则唯一。

我们只需说明 X 上的层可以零延拓到 $\bar{X}$ 上。

下设 $Y = \bar{X}$, 我们从 X 上平展空间构造一个 Y 上平展空间 E 。定义 $E = \Lambda_{\mathfrak{F}} \coprod Y / \sim$, 其中 $\sim$ 将 $x \in X \subset Y$ 与零元 $0_x \in \mathfrak{F}_x \subset \Lambda_{\mathfrak{F}}$ 等同。令 E 带有商拓扑, 且 $p': E \rightarrow Y$ 为自然满射。易见为 p' 局部同胚 (且满), 即给出 Y 上一个层。这对应 $\mathfrak{F}$ 的一个零延拓。 $\square$

对于局部闭嵌入 $\iota: X \hookrightarrow Y$, $\iota_! \mathfrak{F} = (\iota_p \mathfrak{F})^\#$ 为以下预层, $\forall V \in \mathcal{P}_Y$,

$$\iota_p \mathfrak{F}(V) = \begin{cases} \mathfrak{F}(V \cap X), & V \cap \bar{X} \subset X; \\ 0, & \text{else,} \end{cases}$$

的层化。

命题 5.9

若 $\iota: X \hookrightarrow Y$ 是局部闭嵌入, 则函子

$$\iota_!: \text{Sh}(X, \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(Y, \text{Ab})$$

为正合。

证明. 设 $0 \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow 0$ 为 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 中正合列。为判断 $0 \rightarrow \iota_! \mathfrak{F} \rightarrow \iota_! \mathfrak{F}' \rightarrow \iota_! \mathfrak{F} \rightarrow 0$ 是否正合, 只需在茎上进行验证。 $\square$

推论 5.10

若 $\iota: X \hookrightarrow Y$ 为局部闭嵌入, 则函子

$$\text{Sh}(Y, \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(Y, \text{Ab}),$$

$\mathfrak{F} \mapsto \iota_!(\mathfrak{F}|_X)$ 为正合。

由前可知, 若 Z 为 X 中闭集且 $j: Z \hookrightarrow X$ 为包含映射, 则 $j^* \mathfrak{F} \cong j_! \mathfrak{F}$ 。对 $\forall U \in \mathcal{P}_X$, 以下态射

$$j_! \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathfrak{F}(U \cap Z), s \mapsto s|_{U \cap Z},$$

为同构。

定理 5.11

设 U 为 X 中开集, ι 为包含映射且 $\mathfrak{F}$ 为 X 上的阿贝尔层。则有正合列

$$(*) \quad 0 \rightarrow \iota_!(\mathfrak{F}|_U) \xrightarrow{\theta} \mathfrak{F} \xrightarrow{\tau} \iota_!(\mathfrak{F}|_{U^c}) \rightarrow 0.$$

证明. 从 $\Lambda_{\iota_!(\mathfrak{F}|_U)} \hookrightarrow \Lambda_{\mathfrak{F}}$ 为丛态射可知 θ 存在。

若 V 为 X 中开集, 则存在映射 τ_V

$$\mathfrak{F}(V) \rightarrow \iota_!(\mathfrak{F}|_{U^c}) = \mathfrak{F}|_{U^c}(\iota^{-1}(V)) = \mathfrak{F}|_{U^c}(V \cap U^c)$$

使得 $s \mapsto s|_{V \cap U^c}$ 。它们给出层态射 τ 。

按照常见办法, 在 $(*)$ 上取茎运算可得

$$\begin{cases} 0 \rightarrow \mathfrak{F}_x \xrightarrow{\cong} \mathfrak{F}_x \rightarrow 0 \rightarrow 0, & x \in U; \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathfrak{F}_x \xrightarrow{\cong} \mathfrak{F}_x \rightarrow 0. & x \notin U \end{cases}$$

于是 $(*)$ 为正合列。 □

设 $X \subset Y$ 为开子集, ι 为包含映射且 $\mathfrak{F} \in \text{Sh}(X, \text{Ab}), \mathfrak{F}' \in \text{Sh}(Y, \text{Ab})$, 则 (通过在茎上判断) 有

$$\text{Nat}(\iota_!\mathfrak{F}, \mathfrak{F}') \cong \text{Nat}(\mathfrak{F}, \iota^*\mathfrak{F}').$$

最近两讲出现的伴随函子常常用以下方式组织在一起, 是 [Grothendieck 六运算](#) 中的四种。剩下的两种运算是 [张量](#) $\otimes$ 和 [内态射](#) hom (internal hom), 将在模层范畴中引入。

注解 5.12

若 $\iota: U \hookrightarrow X$ 为开嵌入且 $j: Z \hookrightarrow X$ 是闭嵌入, 则有如下函子 (其中 $j^!$ 在下方定义)

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sh}(U, \text{Ab}) & \xrightarrow{\iota_*} & \text{Sh}(X, \text{Ab}) & \xrightarrow{j^*} & \text{Sh}(Z, \text{Ab}) \\ & \xleftarrow{\iota^*} & & \xleftarrow{j_*} & \\ & \xrightarrow{\iota_!} & & \xrightarrow{j^!} & \end{array}$$

通常特别关注 $Z = U^c = X \setminus U$ 的情形, 叫作阿贝尔层范畴的 [黏合](#) (recollement)。

设 $\mathfrak{F} \in \text{PSh}(X)$ 且 $U \in \mathcal{P}_X$ 。对于任意截面 $s \in \mathfrak{F}(U)$, 我们记其支集 (或支撑, support) 为

$$\text{supp } s = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}.$$

定义 5.13

设 $j: X \hookrightarrow Y$ 为局部闭嵌入。定义 [支集在 \$X\$ 中的限制](#) (restriction with supports in X) 为以下函子 $j^!: \text{Sh}(Y, \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X, \text{Ab})$, 对任意 $\mathfrak{F} \in \text{Sh}(Y, \text{Ab})$ 和 $U \in \mathcal{P}_X$ 有

$$j^!\mathfrak{F}(U) = \varinjlim_{\substack{V \in \mathcal{P}_Y \\ V \cap X = U}} \{s \in \mathfrak{F}(V) \mid \text{supp } s \subset U\}$$

我们最后陈述两个基本性质。

命题 5.14

设 $j: X \hookrightarrow Y$ 为局部闭嵌入。函子 $j^!: \text{Sh}(Y, \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X, \text{Ab})$ 为左正合。

引理 5.15

若 $\iota: X \hookrightarrow Y$ 为开嵌入, 则 $\iota^! \cong \iota^*$ 。

6 第六讲

本讲在阿贝尔层基础上, 进一步介绍空间上的模层。以下设 R 为带单位元的交换环, $R\text{-Alg}$ 为 R -代数范畴, 其中的代数均有单位元, 且态射保持单位元。

6.1 赋环空间

正如阿贝尔层定义那样, 我们可以定义 X 上的 R -代数层, 即预层 $\mathcal{O}_X : \mathcal{P}_X^{\text{op}} \rightarrow R\text{-Alg}$ 使得合成 $\mathcal{O}_X : \mathcal{P}_X^{\text{op}} \rightarrow R\text{-Alg} \hookrightarrow \text{Set}$ 为集合层。对于单点空间, 其上的 R -代数层恰好就是通常的 R -代数。

定义 6.1

若 X 为拓扑空间而 $\mathcal{O}_X$ 为 X 上的一个 R -代数层, 则称 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为 R 上赋环空间 (ringed space, 也叫环积空间)。我们常简称 X 为 R 上赋环空间, $\mathcal{O}_X$ 为其结构层 (structure sheaf)。

注意, 若 $\mathfrak{F}$ 为 R -代数预层, 则 $\mathfrak{F}^\#$ 为 R -代数层。如果不特别指定 R , 通常暗指 $R = \mathbb{Z}$ 。所有 R -代数层都是 $\mathbb{Z}$ -代数层。

例 6.2

设 X 为拓扑空间。令 $\mathcal{O}_X = \mathbb{Z}_X$ 为常数层, 即常数 $\mathbb{Z}$ -预层的层化。则 X 成为 $\mathbb{Z}$ 上赋环空间。

空间 X 上的所有 R -代数层构成一个范畴, 其中的态射 $\theta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ 是一个自然变换, 使得对任意开集 U , $\theta_U : \mathfrak{A}(U) \rightarrow \mathfrak{B}(U)$ 是 R -代数同态。

命题 6.3

设 X 和 Y 为 R 上赋环空间且 $f : X \rightarrow Y$ 连续。那么 $f_*(\mathcal{O}_X)$ 和 $f^*(\mathcal{O}_Y)$ 均为 R -代数层。

证明. 已知存在伴随函子 $f_* : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y)$ 及 $f^* : \text{Sh}(Y) \rightarrow \text{Sh}(X)$ 。

由定义若 $\mathfrak{F} \in \text{Sh}(X)$, 有 $f_*\mathfrak{F}(V) = \mathfrak{F}(f^{-1}(V)), \forall V \in \mathcal{P}_Y$ 。如果 $\mathfrak{F}$ 是 X 上 R -代数层, 那么显然 $f_*(\mathfrak{F})$ 是 Y 上 R -代数层。

对于 f^* , 我们根据它的构造可以得到类似结论。□

推论 6.4

前一讲中由伴随关系产生的阿贝尔层态射 $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\eta_Y} f_*f^*\mathcal{O}_Y$ 及 $f^*f_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{\epsilon_X} \mathcal{O}_X$ 均为 R -代数层态射。于是有伴随关系

$$\text{Hom}(f^*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \cong \text{Hom}(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X),$$

其中态射集分别是空间 X 和空间 Y 上的 R -代数层同态。

我们常常需要比较不同的赋环空间。

定义 6.5

设 R 为环, $(X, \mathcal{O}_X)$ 及 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 为 R 上赋环空间。赋环空间态射

$$\Phi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

由一对态射组成 (f, ϕ) , 其中 $f: X \rightarrow Y$ 连续映射而 $\phi: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ 为 Y 上 R -代数层态射。

注意, $\phi: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ 唯一对应一个 X 上 R -代数层态射 $f^*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ 。

若 U 是 X 的开子集, 则包含映射 ι 将 X 的结构层 $\mathcal{O}_X$ 限制到 U 上的代数层 $\iota^*\mathcal{O}_X$, 记作 $\mathcal{O}_X|_U$ 。相应的赋环空间态射中 ϕ 为恒等。

注解 6.6

若有态射

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\Phi=(f,\phi)} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\Psi=(g,\psi)} (Z, \mathcal{O}_Z),$$

则它们的合成 $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ 为 $\Psi\Phi = (gf, g_*(\phi)\psi)$, 其中 $g_*(\phi)\psi$ 为

$$\mathcal{O}_Z \rightarrow g_*\mathcal{O}_Y \rightarrow g_*f_*\mathcal{O}_X = (gf)_*\mathcal{O}_X.$$

此合成的单位态射是

$$\text{id}_{(X, \mathcal{O}_X)} : (X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(\text{id}_X, \text{id}_{\mathcal{O}_X})} (X, \mathcal{O}_X)$$

由此我们引入了 R 上赋环空间范畴。

我们从定义可以直接证明以下结论。

命题 6.7

$\Phi = (f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 为同构 $\iff f: X \rightarrow Y$ 为同胚且 $\varphi: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ 为层同构。

更一般地, 我们对于赋环空间态射有如下刻画。

命题 6.8

任意态射 $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 可唯一分解为

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\Phi_1} (X, f^*\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\Phi_2} (Y, \mathcal{O}_Y)$$

其中 $\Phi_1 = (\text{id}_X, \hat{\phi})$ 且 $\hat{\phi}$ 如下

$$f^*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*\phi} f^*f_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{O}_X}} \mathcal{O}_X,$$

而 $\Phi_2 = (f, \eta_{\mathcal{O}_Y})$ 。

此分解满足泛性质: 若 Φ 分解为

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\Psi_1} (X, \mathcal{O}'_X) \xrightarrow{\Psi_2} (Y, \mathcal{O}_Y)$$

且 $\Psi_1 = (\text{id}_X, \psi_1)$ 及 $\Psi_2 = (f, \psi_2)$, 那么存在唯一态射 $\hat{\psi}_2: f^*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}'_X$ 构成 $\Delta = (\text{id}_X, \hat{\psi}_2)$

并使下图交换

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (X, f^* \mathcal{O}_Y) & & \\
 & \nearrow \Phi_1 & \uparrow \Delta & \nwarrow \Phi_2 & \\
 (X, \mathcal{O}_X) & & & & (Y, \mathcal{O}_Y) \\
 & \searrow \Psi_1 & \downarrow & \swarrow \Psi_2 & \\
 & & (X, \mathcal{O}'_X) & &
 \end{array}$$

证明. 取

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{\psi}_2 & & \psi_2 \\
 \cap & & \cap \\
 \mathrm{Hom}(f^* \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}'_X) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y, f_* \mathcal{O}'_X) \\
 \mathrm{Hom}(-, \psi_1) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Hom}(-, f_* \psi_1) \\
 \mathrm{Hom}(f^* \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y, f_* \mathcal{O}_X) \\
 \Psi & & \Psi \\
 \hat{\phi} & & \phi
 \end{array}$$

□

注解 6.9

对偶地, $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 可唯一分解为

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\Theta_1} (Y, \mathcal{O}'_Y) \xrightarrow{\Theta_2} (Y, \mathcal{O}_Y)$$

使得 $\Theta_1 = (f, \theta_1)$ 且 $\Theta_2 = (\mathrm{id}_Y, \theta_2)$, 其中 $\mathcal{O}'_Y = \mathrm{Im}(\mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X)^\#$, 而 $\theta_1 : \mathcal{O}'_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ 来自预层态射 $\mathrm{Im}(\mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X) \hookrightarrow f_* \mathcal{O}_X$, 是单态射; $\theta_2 : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}'_Y$ 为满态射。

6.2 赋环空间上的模

现在我们把代数的模推广为代数层的模。

定义 6.10

设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为 R 上赋环空间。一个 $\mathcal{O}_X$ -**模预层** $\mathfrak{M}$ 是 X 上的一个阿贝尔预层, 满足:

1. 对任意开集 $U \subset X$, $\mathfrak{M}(U)$ 是 $\mathcal{O}_X(U)$ -模; 且
2. 对 $\forall V \subseteq U$, 限制 $\mathfrak{M}(U) \rightarrow \mathfrak{M}(V)$ 与代数同态 $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ 相匹配, 即有交换图

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_X(U) \times \mathfrak{M}(U) & \longrightarrow & \mathfrak{M}(U) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_X(V) \times \mathfrak{M}(V) & \longrightarrow & \mathfrak{M}(V),
 \end{array}$$

其中垂直方向是限制，水平方向是模的结构映射。

若以上 $\mathfrak{M}$ 是层，则称之为 $\mathcal{O}_X$ -模（层）。

以上定义无非是将代数的模的结构态射 $R \times M \rightarrow M$ 拓展到我们关心的一般情形。

注解 6.11

1. 定义中的匹配性可表述为，对于 $\forall m \in \mathfrak{M}(U), \forall r \in \mathcal{O}_X(U), (r \cdot m)|_V = r|_V \cdot m|_V$ 。
2. $\mathcal{O}_X$ -模同态是层同态 $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ ，使得任意 $\mathfrak{M}(U) \rightarrow \mathfrak{N}(U)$ 均为 $\mathcal{O}_X$ -模同态。记 $\mathcal{O}_X$ -模的范畴为 $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ ，这是一个 Grothendieck 范畴。
3. 若 $\mathcal{O}_X = \mathbb{Z}_X$ ，则

$$\mathbb{Z}_X\text{-Mod} = \text{Sh}(X, \text{Ab}).$$

4. 若 $\mathfrak{M} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ ，则

$$\mathfrak{M}_x \in \mathcal{O}_{X,x}\text{-Mod},$$

$\forall x \in X$ ，其中 $\mathcal{O}_{X,x} := (\mathcal{O}_X)_x$ 。

定义 6.12

设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为 R 上赋环空间，且 $\{\mathfrak{M}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为一族 $\mathcal{O}_X$ -模。定义预层如下，其中 U 为 X 中任意开集，

$$U \mapsto \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{M}_\lambda(U)$$

及

$$U \mapsto \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{M}_\lambda(U)$$

它们均为 $\mathcal{O}_X$ -模，称为直积 $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{M}_\lambda$ 及直和 $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{M}_\lambda$ 。

注解 6.13

由于直和也是正向极限，与茎函子可交换，因而存在同构

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{M}_\lambda\right)_x \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (\mathfrak{M}_\lambda)_x, \forall x \in X.$$

直积通常没有类似的同构关系。

6.3 张量积与内蕴态射

为便于介绍，现设 $\mathcal{O}_X$ 为交换代数层。这样我们就不需要区分左模和右模。

定义 6.14

令 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为 R 上赋环空间, 且 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$. 考虑预层

$$U \mapsto \mathfrak{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathfrak{N}(U),$$

其中 U 为 X 中任意开集. 其层化叫作 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 的**张量积**, 记作 $\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{N}$.

张量积 (以及后面的内蕴态射) 实际上可以定义在模预层上, 今后也会使用到. 为了简洁, 我们不专门把对应构造列出来.

从定义出发, 我们能够得到以下性质或构造.

注解 6.15

1. 由于张量运算与正向极限可换, 对 $\forall x \in X$ 有

$$(\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{N})_x \cong \mathfrak{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathfrak{N}_x.$$

2. $\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathfrak{M}$.
3. $\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} - : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 为右正合函子.

若 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathcal{O}_X$ -模且 U 为开子集, 则记 $\mathfrak{M}|_U = \iota^* \mathfrak{M}$. 这是一个 $\mathcal{O}_X|_U$ -模. 利用 ι^* 与张量积的交换性, 有以下结论.

命题 6.16

设 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 且 U 为 X 中开集, 则存在 $\mathcal{O}_X|_U$ -模同构 $\mathfrak{M}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathfrak{N}|_U \cong (\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{N})|_U$.

与张量积相配套, 我们还有以下重要构造.

定义 6.17

设 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$. 对 X 中任意开集 U , 令

$$\mathfrak{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathfrak{M}|_U, \mathfrak{N}|_U).$$

这产生一个预层, 记作 $\mathfrak{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, 称为**内蕴态射** (internal hom).

内蕴态射可以在集合层上进行构造, 以上是特殊情形. 在集合范畴 Set 中, 集合间的态射构成“态射集”, 是 Set 中对象, 这就是“内蕴”的含义. 拓扑斯是 Set 的推广, 内蕴态射可以看作“态射集”的一般化.

引理 6.18

内蕴态射 $\mathfrak{H}om(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 总是层.

证明. 不妨设 $U = U_1 \cup U_2$ 且存在

$$s_i \in \mathfrak{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})(U_i) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_{U_i}}(\mathfrak{M}|_{U_i}, \mathfrak{N}|_{U_i})$$

使得 $s_1|_{U_1 \cap U_2} = s_2|_{U_1 \cap U_2}$, $i = 1, 2$. 可定义

$$s \in \mathfrak{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathfrak{M}|_U, \mathfrak{N}|_U)$$

$s = \{s_V\}_{V \subseteq U}$ 如下, 使得 $s|_{U_i} = s_i$ ($i = 1, 2$): 对 $\forall V \subseteq U$, 令 $V_i = V \cap U_i$ (因而 $V = V_1 \cup V_2$) 并构造

$$s_V \in \text{Hom}_{\mathcal{O}(V)}(\mathfrak{M}(V), \mathfrak{N}(V)),$$

使得 $s_V(m), \forall m \in \mathfrak{M}(V)$, 由 $(s_1)_{V_1}(m|_{V_1}) \in \mathfrak{N}(V_1)$ 和 $(s_2)_{V_2}(m|_{V_2}) \in \mathfrak{N}(V_2)$ 唯一决定 (因为 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 是层, 而 m 由 $m|_{V_1}$ 和 $m|_{V_2}$ 唯一确定)。

可类似得出 s 的唯一性, 即 $s|_{U_i} = 0$ ($i = 1, 2$) 推出 $s = 0$ 。□

若 $\mathfrak{M}$ 仅是模预层而 $\mathfrak{N}$ 是模, 则有

$$\mathfrak{H}\text{om}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \cong \mathfrak{H}\text{om}(\mathfrak{M}^\#, \mathfrak{N}).$$

我们仅需在截面上 (结合层化函子的性质) 就能验证。由此可进一步推导以下结论。

命题 6.19

$$\mathfrak{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{F}', \mathfrak{F}'') \cong \mathfrak{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}''))$$

证明. 在截面上验证, 转化为模预层上讨论即可。□

将以上同构在 X 上取值, 可得 $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{F}', \mathfrak{F}'') \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}''))$ 。

6.4 局部自由模与皮卡群

定义 6.20

设 X 为 R 上赋环空间, $\mathfrak{M} \in \mathcal{O}_X$ -模。若 X 上存在开覆盖 $\{U_\alpha\}_\alpha$, 使得 $\mathfrak{M}|_{U_\alpha} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_\alpha})^n$ (作为 $\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$ 模), 则称 $\mathfrak{M}$ 为秩 n 的**局部自由模**。

若 X 为 R 上赋环空间。记 $\mathcal{O}_X$ 的**自同态环**为

$$\text{End}(\mathcal{O}_X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X),$$

而其中可逆元素构成一个群, 记为 $\text{Aut}(\mathcal{O}_X)$, 即 $\mathcal{O}_X$ 的**自同构群**。对 $s \in \mathcal{O}_X(X)$, 可引入映射

$$\rho: \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \text{End}(\mathcal{O}_X),$$

使得

$$\rho(s): \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$$

由 $\rho(s)_U: \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)(t \mapsto s|_U \cdot t)$ 给出, 其中 U 为 X 中任意开集。

本节仍设 $\mathcal{O}_X$ 为交换环层。

命题 6.21

以上映射 ρ 为环同构使得 $\text{Aut}(\mathcal{O}_X) = (\mathcal{O}_X(X))^*$ 以及 $\text{End}(\mathcal{O}_X^n) \cong M_n(\mathcal{O}_X(X))$ 且 $\text{Aut}(\mathcal{O}_X^n) \cong GL_n(\mathcal{O}_X(X))$ 。

证明. 首先, 映射 ρ 由定义可验证为环同态。其次, 若 $\rho(s)$ 为零同态, 则 $s = s|_X \cdot 1 = 0$, 即 ρ 为单射。再次, 若 $f \in \text{End}(\mathcal{O}_X)$, 则 f_U 为 $\mathcal{O}_X(U)$ -模同态。于是对任意开集 U 及 $t \in \mathcal{O}_X(U)$

$$f_U(t) = f_U(1)t.$$

由交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{f_X} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{O}_X(U) \end{array}$$

可得 $f_X(1)|_U = f_U(1)$ 。这说明 $f_X(1) \in \mathcal{O}_X(X)$ 为 f 在 ρ 下的原像, 即 ρ 为满。 $\square$

定义 6.22

秩为一的局部自由模叫作**可逆 $\mathcal{O}_X$ -模**。它们的同构类是一个集合 $\text{Pic}X$, 而模的张量积赋予集合 $\text{Pic}X$ 一个群结构, 称为 $(X, \mathcal{O}_X)$ 的**皮卡群**。

若 $\mathfrak{M}$ 是秩为一的模, 我们记它的同构类为 $[\mathfrak{M}]$ 。

定理 6.23

若 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是 R 上赋环空间, 则 $\text{Pic}X$ 在张量运算下形成一个群, 其单位元为 $[\mathcal{O}_X]$, 而 $[\mathfrak{M}] \in \text{Pic}X$ 的逆为 $[\mathfrak{H}om(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_X)]$ 。

证明. 首先, 由 $\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathfrak{M}$ 可得单位元。其次, 若 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ 为秩 1 的局部自由模, 则存在开覆盖 $\{U_\alpha\}_\alpha$, 使得 $\mathfrak{M}|_{U_\alpha} \cong \mathcal{O}_X(U) \cong \mathfrak{N}|_{U_\alpha}$ 。于是

$$(\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{N})|_{U_\alpha} \cong \mathfrak{M}|_{U_\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}} \mathfrak{N}|_{U_\alpha} \cong \mathcal{O}_X|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{O}_X|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$$

即 $\text{Pic}X$ 对乘法封闭。最后, 我们构造同构

$$\alpha : \mathfrak{H}om(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{O}_X$$

对任意开集 U , 令

$$\alpha_U : \mathfrak{H}om_{\mathcal{O}_X|_U} \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathfrak{M}(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U),$$

为 $\alpha_U(f \otimes m) = f_U(m)$, $\forall m \in \mathfrak{M}(U)$ 。若 $\mathfrak{M}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$, 则 α_U 成为同构。于是 α_x , $\forall x \in X$, 必为同构, 因而 α 为层同构。 $\square$

6.5 正像与逆像

我们将第四讲中阿贝尔层范畴间的一对伴随函子推广到模层范畴上。

定义 6.24

若 $\Phi = (f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 为赋环空间态射, 且 $\mathfrak{M} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 。令 $\Phi_*\mathfrak{M}(V) = \mathfrak{M}(f^{-1}(V))$, V 为 Y 中开集。这是 $f_*\mathcal{O}_X$ -模。由于有 $\varphi_V : \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow f_*\mathcal{O}_X(V)$, 所以 $\Phi_*\mathfrak{M}$ 成为 $\mathcal{O}_Y$ -模, 即有**正像函子**

$$\Phi_* : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y\text{-Mod}.$$

我们还能借助张量积, 构造反方向的函子。

定义 6.25

假定如上。若 $\mathfrak{N} \in \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$, 则 $f^*\mathfrak{N}$ 为 X 上阿贝尔层。对 $\forall X$ 中开集 U , $f^*\mathfrak{N}(U)$ 有自然的 $f^*\mathcal{O}_Y$ -模结构。以上 φ 唯一决定了层态射 $f^*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ 。于是可定义 $\Phi^*\mathfrak{N} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^*\mathcal{O}_Y} f^*\mathfrak{N}$, 即有**逆像函子**

$$\Phi^* : \mathcal{O}_Y\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}.$$

当 $\mathcal{O}_X = \mathbb{Z}_X$ 和 $\mathcal{O}_Y = \mathbb{Z}_Y$ 时, 以上为第四讲中的正像和逆像函子。借助它们的伴随关系, 我们可以得到以下结论。

定理 6.26

若 $\Phi = (f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 为赋环空间态射, 则 Φ^* 为 Φ_* 的左伴随, 即存在

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Phi^*\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathfrak{N}, \Phi_*\mathfrak{M})$$

证明. 由下图上方的已知同构可以推导出下方的诱导出同构

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_X}(f^*\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_Y}(\mathfrak{N}, f_*\mathfrak{M}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Hom}_{f^*\mathcal{O}_Y}(f^*\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathfrak{N}, \Phi_*\mathfrak{M}) \end{array}$$

现在我们证明

$$\text{Hom}_{f^*\mathcal{O}_Y}(f^*\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Phi^*\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$$

为此, 我们构造一对互逆映射 h 和 g 如下:

1. 以下给出态射 $f^*\mathfrak{N} \rightarrow \Phi^*\mathfrak{N}$:

对 X 中开集 U , 在截面上引入 (预) 层态射

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathfrak{N}(U) & & s \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(U) \otimes_{f^*\mathcal{O}_Y(U)} f^*\mathfrak{N}(U) & & 1 \otimes s \\ \downarrow \eta_U & & \downarrow \\ (\mathcal{O}_X \otimes_{f^*\mathcal{O}_Y} f^*\mathfrak{N})(U) = \Phi^*\mathfrak{N}(U) & & \eta_U(1 \otimes s) \end{array}$$

它诱导映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Phi^*\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) \xrightarrow{h} \text{Hom}_{f^*\mathcal{O}_Y}(f^*\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$$

2. 我们构造

$$\text{Hom}_{f^*\mathcal{O}_Y}(f^*\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) \xrightarrow{g} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Phi^*\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$$

给定层态射 $\alpha: f^*\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$, 可定义预层态射

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_X(U) \otimes_{f^*\mathcal{O}_Y(U)} f^*\mathfrak{N}(U) & & r \otimes s \\
 \downarrow \text{id} \otimes \alpha_U & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_X(U) \otimes_{f^*\mathcal{O}_Y(U)} \mathfrak{M}(U) & & r \otimes \alpha_U(s) \\
 \downarrow \rho_U & & \downarrow \\
 \mathfrak{M}(U) & & r\alpha_U(s)
 \end{array}$$

它诱导出层态射 $\Phi^*\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$ 。

3. 在茎上可验证, 以上映射为可逆。例如对 $\forall x \in X, [gh(\alpha)]_x \cong \alpha_x$ 。

□

设 $\mathcal{O}_X$ 为 $\mathbb{Z}$ -代数层。考虑赋环空间态射

$$\Phi = (\text{id}_X, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, \underline{\mathbb{Z}}_X),$$

其中 $\phi: \underline{\mathbb{Z}}_X \rightarrow (\text{id}_X)_*\mathcal{O}_X$ 为自然态射。它产生伴随函子 $\Phi_* = \text{for}$ (遗忘函子) 和 $\Phi^* = \mathcal{O}_X \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_X} -$, 并对任意 $\underline{\mathbb{Z}}_X$ -模 $\mathfrak{N}$ 和 $\mathcal{O}_X$ -模 $\mathfrak{M}$ 有

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_X} \mathfrak{N}, \mathfrak{M}) \cong \text{Hom}_{\underline{\mathbb{Z}}_X}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}).$$

7 第七讲

本讲介绍经典层上同调基本理论，它的基本性质以及局限性。

7.1 层上同调

利用环与模经典结论，我们能为每个模层构造入射包。这使得我们可以定义层上同调。

引理 7.1

设 X 为 R 上赋环空间。令 $\{\mathfrak{M}_x\}_{x \in X}$ 为一族 $\mathcal{O}_{X,x}$ -模。那么存在 $\mathcal{O}_X$ -模 $\mathfrak{M}$ ，使得对任意 $\mathcal{O}_X$ -模 $\mathfrak{N}$ ，以下映射为双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) &\rightarrow \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{M}_x) \\ f &\mapsto \prod_{x \in X} f_x. \end{aligned}$$

证明. 我们利用截面直接定义模 $\mathfrak{M}$ ，使得

$$\Gamma(U, \mathfrak{M}) := \prod_{x \in U} \mathfrak{M}_x,$$

其中 U 是任意开集。(我们也能令 $\mathfrak{M}^x \in \mathcal{O}_x\text{-Mod}$ 使得 $(\mathfrak{M}^x)_y = \begin{cases} 0, & y \neq x; \\ \mathfrak{M}_x, & y = x. \end{cases}$

可见 $\mathfrak{M} = \prod_{x \in X} \mathfrak{M}^x$.) □

命题 7.2

若 $\forall x \in X$, $\mathfrak{M}_x$ 为入射 $\mathcal{O}_{X,x}$ -模，则 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 中入射对象。

证明. 设 $0 \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F}'' \rightarrow 0$ 为 $\mathcal{O}_X$ -模正合列，应用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathfrak{M})$ 可得交换图

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}'', \mathfrak{M}) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathfrak{F}_x'', \mathfrak{M}_x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}', \mathfrak{M}) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathfrak{F}_x', \mathfrak{M}_x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{M}) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{M}_x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

由右方正合可得左方序列正合，即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathfrak{M})$ 为正合。 □

定理 7.3

若 X 为 R 上的赋环空间, 则 $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 存在足够多入射对象。

证明. 设 $\mathfrak{M} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$, 则 $\mathfrak{M}_x \in \mathcal{O}_{X,x}\text{-Mod}$ 可以嵌入一个入射模 $\mathfrak{I}_x$ 。由前述引理及命题可知存在 $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 中入射对象 $\mathfrak{I}$ 及单态射 $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{I}$ 。□

对于开子集 U , 考虑左正合函子 $\Gamma(U, -) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X(U)\text{-Mod}$, 使得

$$\Gamma(U, -)(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}(U),$$

即**截面函子** (section)。当 $U = X$ 时, 它被称为整体截面函子。

定义 7.4

对于开子集 U , 左正合函子

$$\Gamma(U, -) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X(U)\text{-Mod}$$

具有右导出函子

$$H^i(U, -) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X(U)\text{-Mod}, i \in \mathbb{N},$$

并称 $H^i(U, \mathfrak{M})$ 为 U 的第 i 个系数在 $\mathfrak{M}$ 中的上同调。

当 $U = X$ 时, $H^i(X, \mathfrak{M})$ 常称为 X 的层上同调。

引理 7.5

设 X 为 R 上赋环空间, 且 U 为 X 中开集。若 $\mathfrak{I}$ 为 $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 中入射对象, 则 $\mathfrak{I}|_U$ 为 $\mathcal{O}_X|_U\text{-Mod}$ 中的入射对象。

因此对于任意 $\mathfrak{M} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$,

$$H^i(U, \mathfrak{M}) \cong H^i(U, \mathfrak{M}|_U).$$

证明. 设 $\mathfrak{F} \in \mathcal{O}_X|_U\text{-Mod}$ 。则从 $i : U \hookrightarrow X$ 产生

$$\mathfrak{I}|_U = i^*\mathfrak{I},$$

以及

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathfrak{F}, \mathfrak{I}|_U) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!\mathfrak{F}, \mathfrak{I}).$$

这说明 $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(-, \mathfrak{I}|_U)$ 为正合, 即 $\mathfrak{I}|_U$ 为入射对象。

第二个结论根据定义可以直接得到。□

引理 7.6

设 $\mathfrak{I}$ 为入射 $\mathcal{O}_X$ -模。若 $W \subset U$ 是 X 的开子空间, 则 $\mathfrak{I}(U) \rightarrow \mathfrak{I}(W)$ 为满射。

证明. 已知对于任意模 $\mathfrak{M}$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!\mathcal{O}_X|_U, \mathfrak{M}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, i^*\mathfrak{M}) \\ &\cong \mathfrak{M}(U).\end{aligned}$$

类似地, 我们对于 W 有相应公式。

根据典范映射 $j_!\mathcal{O}_X|_W \rightarrow j_!\mathcal{O}_X|_U$, 计算其茎可得它是单射。应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathfrak{J})$ 即可得所需满射。□

这就引出下一节的关键概念。

7.2 松弛层

为计算层上同调, 我们将入射层拓展为更广的一类 $\Gamma(X, -)$ -零调对象 (acyclic object), 即松弛层。

定义 7.7

设 $\mathfrak{M} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 。我们称 $\mathfrak{F}$ 为**松弛** (flasque 或 flabby 或 soggy) 当且仅当对任意开集 $U \subset X$, $\Gamma(X, \mathfrak{M}) \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{M})$ 总是满。

由定义可知对于松弛层 $\mathfrak{M}$, 若有开集 $V \subset U$, 则 $\Gamma(U, \mathfrak{M}) \rightarrow \Gamma(V, \mathfrak{M})$ 为满。

命题 7.8

1. 松弛层的直和因子必为松弛。
2. 若 $0 \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{M}'' \rightarrow 0$ 正合, 且 $\mathfrak{M}$ 松弛, 则对任意开集 U ,

$$0 \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{M}) \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{M}') \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{M}'') \rightarrow 0$$

正合。

3. 若 $0 \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{M}'' \rightarrow 0$ 正合, 且 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 松弛, 那么 $\mathfrak{M}''$ 也是松弛。
4. 每个层都存在一个到松弛层的单态射。
5. 入射层总是松弛。
6. 若

$$\Phi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

为 R 上赋环空间态射且 $\mathfrak{M} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 松弛, 则 $\Phi_*\mathfrak{M}$ 也是松弛。

证明.

1. 由定义可得。

2. 因 $\Gamma(U, -)$ 为左正合, 我们只需证明 $\Gamma(U, \mathfrak{M}') \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{M}'')$ 为满。令 $s'' \in \Gamma(U, \mathfrak{M}'')$ 且构造集合

$$\Lambda := \{(W, s) | s \in \Gamma(W, \mathfrak{M}'), s \mapsto s''|_W\}.$$

其上存在偏序: $(W, s) \leq (V, t) \Leftrightarrow W \subset V$ 且 $t|_W = s$ 。取 (W, s) 为 Λ 中一极大元并假定 $W \subsetneq U$ 。令 $x \in U \setminus W$ 。于是存在 x 的开邻域 U_x 及截面 $t_x \in \Gamma(U_x, \mathfrak{M}')$ 使得 $t_x \mapsto s''|_{U_x}$ 。直接计算可知 $s|_{W \cap U_x} - t_x|_{W \cap U_x} \in \Gamma(W \cap U_x, \mathfrak{M}')$ 。由于 $\mathfrak{M}$ 松弛, 存在 $r \in \Gamma(U, \mathfrak{M})$ 且 $r|_{W \cap U_x} = s|_{W \cap U_x} - t_x|_{W \cap U_x}$ 。取 $t' = t_x + r|_{U_x} \in \Gamma(U_x, \mathfrak{M}')$ 。由 $t'|_{W \cap U_x} = s|_{W \cap U_x}$ 可知, s 可以延拓到 $W \cup U_x$ 上, 从而产生矛盾!

3. 由条件 $\Gamma(X, \mathfrak{M}') \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{M}')$ 为满。又由 (2), $\Gamma(U, \mathfrak{M}') \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{M}'')$ 也是满。从交换图

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathfrak{M}') & \twoheadrightarrow & \Gamma(X, \mathfrak{M}'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(U, \mathfrak{M}') & \twoheadrightarrow & \Gamma(U, \mathfrak{M}''), \end{array}$$

可知 $\Gamma(X, \mathfrak{M}') \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{M}'')$ 必为满。

4. 设 $\mathfrak{M}$ 为层。我们定义一个新的层 $\mathfrak{M}_0$, 使得对任意开集 U 有

$$\mathfrak{M}_0(U) = \{s : U \rightarrow \bigcup_{x \in U} \mathfrak{M}_x \mid s(y) \in \mathfrak{M}_y, \forall y \in U\}$$

直接验证可知 $\mathfrak{M}_0$ 为层, 且为松弛。对任意 U , 显然存在自然嵌入 $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{M}_0(U)$ 。这给出单射 $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}_0$ 。(注: $\mathfrak{M}_0$ 叫作 $\mathfrak{M}$ 的**不连续截面层**, sheaf of discontinuous sections)。

5. 上一节已经证明了这点。我们也能由 (4) 知入射层 $\mathfrak{I}$ 可以嵌入一个松弛层 $\mathfrak{M}$, 即有单态射 $\mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{M}$ 。此态射可裂, 于是 $\mathfrak{I}$ 为 $\mathfrak{M}$ 的直和因子, 从而松弛。

6. 利用 Φ_* 的定义可知它保持松弛层。

□

根据以上讨论, 我们发现松弛层可用来计算上同调。

注解 7.9

由命题可知, 任意模 $\mathfrak{M}$ 均存在一个**松弛分解** (flasque resolution), 即有正合列

$$0 \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}_0 \rightarrow \mathfrak{M}_1 \rightarrow \dots$$

而 $\mathfrak{M}_i$ 为松弛。应用 $\Gamma(X, -)$, 可得上链复形

$$\Gamma(X, \mathfrak{M}_*)$$

及其上同调群

$$H_f^i(X, \mathfrak{M}) := H^i(\Gamma(X, \mathfrak{M}_*)), i \in \mathbb{N}.$$

由于 $\{H_f^i(X, -)\}_{i \in \mathbb{N}}$ 为一组 δ -函子, 且

1. $H_f^0(X, -) = \Gamma(X, -)$
2. $H_f^i(X, -)$ 均为可擦除, $i \geq 1$ 。

于是由泛性质可知

$$H_f^i(X, -) \cong H^i(X, -) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X(X)\text{-Mod}.$$

7.3 高阶正像函子

上同调构造可以拓展为更一般的情况。

定理 7.10

若 $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 为 R 上赋环空间态射, 则左正合函子 Φ_* 的右导出函子 (高阶正像函子)

$$\mathbb{R}^i \Phi_* : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y\text{-Mod}.$$

注解 7.11

若 $Y = Pt$ 为单点空间, 则 $\mathcal{O}_Y\text{-Mod} = R\text{-Mod}$ 。从 $(X, \mathcal{O}_X)$ 到 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 存在唯一态射 Θ 。在此情况下 $\mathbb{R}^i \Theta_* \cong H^i(X, -)$ 。

下面我们刻画 $\mathbb{R}^i \Phi_*$ 。

定理 7.12

若 $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 为 R 上赋环空间态射, 且 $\mathfrak{M} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$, 则 $\mathbb{R}^i \Phi_*(\mathfrak{M}) \in \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$ 为以下模预层的层化:

$$V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}),$$

其中 V 为 Y 中任意开集。此处, V 实为赋环空间 $(V, \mathcal{O}_Y|_V)$, $f^{-1}(V)$ 为赋环空间 $(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(V)})$, 而 $H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}) := H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}|_{f^{-1}(V)})$ 成为 $\mathcal{O}_Y(V)$ -模。

证明. 记 $\{\Psi^i(\mathfrak{M})\}_{i \in \mathbb{N}}$ 为上述预层的层化。则

$$\Psi^i : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$$

为一系列函子, 且 $\Psi^0 = \Phi_*$ 。

首先, 说明 $\{\Psi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 为 Φ_* 上的 δ -函子。取 $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}' \longrightarrow \mathfrak{M}'' \longrightarrow 0$$

由层上同调的性质, 可得长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^{i-1}(f^{-1}(V), \mathfrak{M}'') & \longrightarrow & H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}) & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}') & \longrightarrow & H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}'') & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & H^{i+1}(f^{-1}(V), \mathfrak{M}) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

若 $V \subset W$ 为 Y 中开集, 则有交换图

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^{i-1}(f^{-1}(W), \mathfrak{M}'') & \longrightarrow & H^{i-1}(f^{-1}(V), \mathfrak{M}'') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^i(f^{-1}(W), \mathfrak{M}) & \longrightarrow & H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^i(f^{-1}(W), \mathfrak{M}') & \longrightarrow & H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}'') & \longrightarrow & H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{M}'') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

于是我们有 Y 上预层长正合列

$$\begin{array}{ccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^{i-1}(f^{-1}(-), \mathfrak{M}'') & \longrightarrow & H^i(f^{-1}(-), \mathfrak{M}) \\
 & & \searrow & & \\
 & & H^i(f^{-1}(-), \mathfrak{M}') & \longrightarrow & H^i(f^{-1}(-), \mathfrak{M}'') \\
 & & \searrow & & \\
 & & H^{i+1}(f^{-1}(-), \mathfrak{M}) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

层化后, 产生 Y 上长正合列 ($\mathcal{O}_Y$ -模长正合列)

$$\dots \rightarrow \Psi^{i-1}(\mathfrak{M}'') \rightarrow \Psi^i(\mathfrak{M}) \rightarrow \Psi^i(\mathfrak{M}') \rightarrow \Psi^i(\mathfrak{M}'') \rightarrow \dots$$

由此可判定 $\{\Psi^i\}_{i \geq 0}$ 确为 Φ_* 上的 δ -函子。

其次, 验证 $\{\Psi^i\}_{i \geq 0}$ 具有泛性质。为此我们证明 Ψ^i 为“可擦除” (effaceable), 即对 $\forall \mathfrak{M} \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}$, 存在单态射 $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{I}$ 使得 $\Psi^i(\mu) = 0$, $i \geq 1$ 。实际上只要取 $\mathfrak{I}$ 为入射对象且 μ 为嵌入, 则由 $H^i(f^{-1}(V), \mathfrak{I}) = 0$, $\forall i \geq 1$, 可得 $\Psi^i \mathfrak{I} = 0$ (从而 $\Psi^i(\mu) = 0$), $\forall i \geq 1$ 。

综上, $\Psi^i \cong \mathbb{R}\Phi_*$ 。 □

7.4 经典层上同调的局限性

层论的进一步发展基于 Grothendieck 对经典层上同调局限性的认识, 导致他对层论实施开拓式升级改造。

定理 7.13: Grothendieck

设 X 为不可约拓扑空间，且 $\mathfrak{K}$ 为常数阿贝尔层。则

$$H^i(X, \mathfrak{K}) \equiv 0, \forall i \geq 1.$$

证明. 由于 X 不可约，其中每个开集必为连通。因此

$$\mathfrak{K}(U) = A,$$

其中 A 为固定阿贝尔群。这说明所有限制 $\mathfrak{K}(U) \rightarrow \mathfrak{K}(V)$, $V \subset U$ ，均为恒等，即 $\mathfrak{K}$ 为松弛。□

例 7.14

仿射簇 (affine variety) $\text{Spec}(k[x_1, \dots, x_n]/I)$ 不可约当且仅当 I 为素理想。

实际上 Grothendieck 定理的一般形式指出，对于维数 $\leq d$ 的诺特拓扑空间 X ， $H^i(X, \mathfrak{F}) = 0$ 对任意 $i > d$ 和任意阿贝尔层 $\mathfrak{F}$ 都成立。这类结论说明经典层上同调理论用于仿射概形具有较大的局限性，从而启发 Grothendieck 引入 **Grothendieck 拓扑** 及其上的层。简而言之，Grothendieck 拓扑比 Zariski 拓扑拥有更多“开集”。

8 第八讲

设 X 为拓扑空间。考虑阿贝尔预层范畴 $\mathrm{PSh}(X, \mathrm{Ab})$ 。整体截面函子

$$\Gamma(X, -) : \mathrm{PSh}(X, \mathrm{Ab}) \rightarrow \mathrm{Ab}$$

为正合。然而我们仍然能够通过特定方式构造一类 δ -函子，能用于计算层上同调。

设 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 为 X 的开覆盖。对非负整数 $p > 0$ ，及 $\alpha := (i_0, i_1, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ ，记

$$U_\alpha = \bigcap_{v=0}^p U_{i_v}.$$

记 $\epsilon_q : I^{p+2} \rightarrow I^{p+1}$ 为“移除第 q 个分量”之映射。为了省事，我们也常常记 $\alpha = i_0 i_1 \cdots i_p$ 。

8.1 Čech 上同调

定义 8.1

设 $\mathfrak{A}$ 为 X 上阿贝尔预层且 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 为一个开覆盖。令 $C^*(\mathcal{U}; \mathfrak{A})$ 为阿贝尔群复形，使得

$$C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) = \begin{cases} 0, & p < 0 \\ \prod_{\alpha \in I^{p+1}} \mathfrak{A}(U_\alpha), & p \geq 0 \end{cases}$$

对 $0 \leq q \leq p+1$ ，设

$$\partial^q : C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathfrak{A}), (s_\alpha)_\alpha \mapsto (t_\beta)_\beta,$$

$\alpha \in I^{p+1}$ 且 $\beta \in I^{p+2}$ ，其中 $t_\beta = s_{\epsilon_q(\beta)}|_{U_\beta}$ 并且定义微分为

$$d^p = \sum_{q=0}^{p+1} (-1)^q \partial^q : C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathfrak{A}).$$

称 $\{C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{A}); d^*\}$ 为 $\mathcal{U}$ 和 $\mathfrak{A}$ 的 Čech 复形。记相应的上同调为

$$H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) = H^p(C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{A})), p \geq 0,$$

称为 $\mathfrak{A}$ 相对于 $\mathcal{U}$ 的 p -维 Čech 上同调。

上述定义可以推广到 X 的任意开子集 U 上：若 $\mathcal{U}_U = \{U_i\}_i$ 是满足 $U = \cup_i U_i$ 的开覆盖，我们能够定义 $H^p(\mathcal{U}_U, \mathfrak{A}) := H^p(\mathcal{U}_U, \mathfrak{A}|_U)$ 。此时限制映射产生自然映射

$$\mathfrak{A}(U) \rightarrow C^0(\mathcal{U}_U, \mathfrak{A}) = \prod_i \mathfrak{A}(U_i).$$

注解 8.2

如果 $\mathfrak{A}$ 为层，那么直接计算表明

$$H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \cong \mathfrak{A}(X) = \Gamma(X, \mathfrak{A}).$$

实际上，阿贝尔预层 $\mathfrak{A}$ 为层当且仅当对任意开集 U ，及其任意覆盖 $\mathcal{U}_U$ ，自然映射 $\mathfrak{A}(U) \rightarrow$

$H^0(\mathcal{U}_U, \mathfrak{A})$ 为同构。

假设 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 及 $\mathcal{V} = \{U_j\}_{j \in J}$ 为 X 的两个开覆盖。如果存在加细映射 $r : J \rightarrow I$ 使得 $V_j \subseteq U_{r(j)}, \forall j \in J$, 那么称 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的一个加细 (有时记为 “ $\mathcal{V} \geq \mathcal{U}$ ”)。这个加细映射诱导 $r : J^{p+1} \rightarrow I^{p+1}$ 以及

$$\gamma^p : C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow C^p(\mathcal{V}, \mathfrak{A})$$

使得 $\gamma^p[(s_\alpha)_\alpha] = (t_\beta)_\beta$ 满足 $t_\beta := s_{r(\beta)}|_{V_\beta}$ 。可验证 γ^* 为上链映射, 因而诱导同态

$$\bar{\gamma} : H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow H^p(\mathcal{V}, \mathfrak{A}).$$

特别地, 我们有自然同态 $\bar{\gamma}_X : H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow H^p(\{X\}, \mathfrak{A})$ 。

引理 8.3

设 $r_1, r_2 : J \rightarrow I$ 为加细映射, 使得 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的加细。则它们诱导相同映射

$$H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow H^p(\mathcal{V}, \mathfrak{A}), \forall p \geq 0.$$

证明. 设 r_1, r_2 分别诱导

$$\gamma_1, \gamma_2 : C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathfrak{A}).$$

构造 $h^p : C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow C^p(\mathcal{V}, \mathfrak{A})$ 使得 $(s_\alpha)_\alpha \mapsto (t_\beta)_\beta$ 且 $t_\beta = \sum_{k=0}^p (-1)^k s_{\beta_k}$, 而第 m 项

$$\beta_k^m = \begin{cases} r_1(\beta^m), & m \leq k; \\ r_2(\beta^{m-1}), & m > k, \end{cases}$$

其中 $\alpha \in I^{p+2}, \beta \in J^{p+1}, \beta_k \in I^{p+2}, m \in \{0, 1, \dots, p+1\}$ 。

通过直接计算可得 $\gamma_1 - \gamma_2 = dh + hd$, 因此 γ_1 和 γ_2 诱导上同调之间相同的映射。□

若 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ 为阿贝尔预层态射, 则它诱导同态

$$H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{B}).$$

定义 8.4

设 $\mathfrak{A}$ 为阿贝尔预层。定义系数在 $\mathfrak{A}$ 中的 X 的 p -维 Čech 上同调为

$$\check{H}^p(X, \mathfrak{A}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}).$$

如果担心 X 的所有开覆盖构成的不是集合, 那么我们可以采用以下方法妥善解决此问题。

注解 8.5

令 $\mathcal{R}(X)$ 为 X 的特定开覆盖的集合, 其元素为 X 的开覆盖 $\{U_x\}_{x \in X}$ 使得对 $\forall x \in X$, 有 $x \in U_x$, 即指标集取 $I = X$ 。

在 $\mathcal{R}(X)$ 上可定义偏序

$$\mathcal{V} \geq \mathcal{U} \iff \forall x \in X, V_x \subseteq U_x.$$

这实际上对应着加细映射 $\text{id}_X : X \rightarrow X$ 。它给出链映射

$$C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathfrak{A})$$

由此可定义 $C^*(X, \mathfrak{A}) = \varinjlim_{\mathcal{R}(X)} C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{A})$ 。因为 $\varinjlim_{\mathcal{R}(X)}$ 为正合，所以

$$\check{H}^p(X, \mathfrak{A}) = H^p(C^*(X, \mathfrak{A})), \forall p \geq 0.$$

若 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ 为 X 上阿贝尔预层态射，则它诱导同态

$$\check{H}^p(X, \mathfrak{A}) \rightarrow \check{H}^p(X, \mathfrak{B}).$$

定理 8.6

函子组 $\{\check{H}^p(X, -)\}_{p \in \mathbb{N}}$ 为

$$\check{H}^0(X, -) : \text{PSh}(X, \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$$

的右导出函子。

证明. 首先, 设 $0 \rightarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{A}'' \rightarrow 0$ 为预层短正合列。对 $\mathcal{U} \in \mathcal{R}(X)$ 产生复形正合列

$$0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{A}') \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{A}'') \rightarrow 0.$$

应用 $\varinjlim_{\mathcal{R}(X)}$, 可得复形正合列

$$0 \rightarrow C^*(X, \mathfrak{A}) \rightarrow C^*(X, \mathfrak{A}') \rightarrow C^*(X, \mathfrak{A}'') \rightarrow 0$$

这就产生了上同调的长正合列。

其次, 对入射对象 $\mathfrak{I}$, 我们说明 $\check{H}^p(X, \mathfrak{I}) = 0, \forall p \geq 1$ 。我们将说明 $C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{I})$ 总为正合。记 $P_U = \mathbb{Z}\text{Hom}_{\mathcal{P}_X}(-, U)$ 。改写复形为

$$\begin{aligned} C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{I}) &= \prod_{\alpha \in I^{p+1}} \mathfrak{I}(U_\alpha) \\ &= \prod_{\alpha \in I^{p+1}} \text{Hom}(P_{U_\alpha}, \mathfrak{I}) \\ &\cong \text{Hom}(\oplus_{\alpha \in I^{p+1}} P_{U_\alpha}, \mathfrak{I}). \end{aligned}$$

由 $\text{Hom}(-, \mathfrak{I})$ 的正合性, 只需证明预层复形 $\{\oplus_{\alpha \in I^{p+1}} P_{U_\alpha}\}$ 的正合性。实际上, 只需对任意开集 V 证明 $\{\oplus_{\alpha \in I^{p+1}} P_{U_\alpha}\}$ 正合, 即

$$\bigoplus_i \mathbb{Z}\text{Hom}(V, U_i) \xleftarrow{d} \bigoplus_{i,j} \mathbb{Z}\text{Hom}(V, U_i \cap U_j) \xleftarrow{d} \dots$$

正合。我们注意到每个 $\mathbb{Z}\text{Hom}(V, U_\alpha)$ 都有一个自然基元素 ι_α , 即包含映射, 且有 $d(\iota_\alpha) = \sum_{q=0}^p (-1)^q \iota_{\varepsilon_q(\alpha)}$ 。现取定 $\bar{i} \in I$, 使得 $V \subset U_{\bar{i}}$ 。令

$$h : \bigoplus_{\alpha \in I^{p+1}} \mathbb{Z}\text{Hom}(V, U_\alpha) \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I^{p+2}} \mathbb{Z}\text{Hom}(V, U_\beta)$$

在基元素上 $h(\iota_\alpha) = \iota_{(\bar{i}, \alpha)}$ 给定。直接计算可得 $dh + hd = \text{Id}$, 即 Id 同伦于零映射。于是讨论中的复形确为正合。 $\square$

注解 8.7

1. 由于层的正合列作为预层序列未必正合, 所以限制到层范畴 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 上, $\{\check{H}^p(X, -)\}_{p \in \mathbb{N}}$ 并非 δ -函子。但是当 $\mathfrak{A}$ 为层, $\check{H}^0(X, \mathfrak{A}) \cong \Gamma(X, \mathfrak{A}) \cong H^0(X, \mathfrak{A})$ 。
2. 因为遗忘函子 $\text{Sh}(X, \text{Ab}) \hookrightarrow \text{PSh}(X, \text{Ab})$ 保持入射对象, 对于 $\text{Sh}(X, \text{Ab})$ 的入射对象 $\mathfrak{I}$, $\check{H}^p(X, \mathfrak{I}) = 0, \forall p \geq 1$ 。

本讲将主要描述系数为阿贝尔(预)层的上同调, 最后一节内容将它推广到任意模(预)层上。如此编排的主要原因之一是我们将讨论皮卡群的上同调刻画, 另一原因是特殊与一般情形技术差异不大(参见以下注解)。

注解 8.8

设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为 R 上赋环空间。对任意模预层 $\mathfrak{A}$, 能类似产生 $\mathcal{O}_X(U)$ -模复形同构

$$\begin{aligned} C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) & \\ &\cong \text{Hom}(\oplus_{\alpha \in I^{p+1}} j_! \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}, \mathfrak{A}) \\ &\cong \text{Hom}(\oplus_{\alpha \in I^{p+1}} \mathcal{O}_X(U_\alpha)[\text{Hom}(-, U_\alpha)], \mathfrak{A}), \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{O}_X(U_\alpha)[\text{Hom}(-, U_\alpha)]$ 是由 $\text{Hom}(-, U_\alpha)$ 生成的自由 $\mathcal{O}_X(U_\alpha)$ -模, 并且预层复形 $\{\oplus_{\alpha \in I^{p+1}} j_! \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}\}$ 正合。于是对于入射 $\mathcal{O}_X$ -模 $\mathfrak{I}$, $C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{I})$ 正合从而 $H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{I}) = 0, \forall p > 0$ 。由此可进一步说明更一般的结论, 即函子组 $\{\check{H}^p(X, -)\}_{p \in \mathbb{N}}$ 为

$$\check{H}^0(X, -) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X(U)\text{-Mod}$$

的右导出函子。

8.2 Čech 上同调与半层化

定义 8.9

对于 X 上阿贝尔预层 $\mathfrak{A}$ 以及任意开集 U , 定义

$$\mathfrak{A}^\dagger(U) = \check{H}^0(U, \mathfrak{A}) := \check{H}^0(U, \mathfrak{A}|_U)$$

由此产生一个预层 $\mathfrak{A}^\dagger$ 。若 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ 为态射, 则有态射 $\mathfrak{A}^\dagger(U) \rightarrow \mathfrak{A}'^\dagger(U)$ 。因此我们获得一个函子

$$(-)^\dagger : \text{PSh}(X, \text{Ab}) \rightarrow \text{PSh}(X, \text{Ab}).$$

下方结论中的分离预层 (separated presheaf) 概念在引入层的概念时出现过。

命题 8.10

1. 对任意阿贝尔预层 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^\dagger$ 为分离。
2. 对任意阿贝尔预层 $\mathfrak{A}$, 存在自然态射 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^\dagger$, 使得当 $\mathfrak{A}'$ 为层时, 任意态射 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ 通过 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^\dagger$ 唯一分解。
3. 若阿贝尔预层 $\mathfrak{A}$ 为分离, 则 $\mathfrak{A}^\dagger$ 为层。
4. $(\mathfrak{A}^\dagger)^\dagger \cong \mathfrak{A}^\#$

证明. 1. 设 U 为开集且 $\mathcal{U}$ 为其开覆盖。令 $\bar{s} \in \ker(\mathfrak{A}^\dagger(U) \rightarrow \prod_i \mathfrak{A}^\dagger(U_i))$ 。我们要说明 $\bar{s} = 0$ 。由于 $\bar{s} \in \mathfrak{A}^\dagger(U) = \check{H}^0(U, \mathfrak{A}) = \varinjlim_{\mathcal{V}} H^0(\mathcal{V}, \mathfrak{A})$, 所以存在某个 U 的开覆盖 $\mathcal{V}$, 使得存在元素 $s \in H^0(\mathcal{V}, \mathfrak{A})$ 代表 $\bar{s}$, 即 $\bar{s}$ 是自然映射 $H^0(\mathcal{V}, \mathfrak{A}) \rightarrow \check{H}^0(U, \mathfrak{A})$ 下的像。记 $\mathcal{V}_i = \mathcal{V} \cap U_i$ 为 U_i 的开覆盖, 且 s_i 是 s 在 $H^0(\mathcal{V}, \mathfrak{A}) \rightarrow H^0(\mathcal{V}_i, \mathfrak{A})$ 下的像。则 s_i 代表

$$(\bar{s})_i = \mathfrak{A}^\dagger(U_i \hookrightarrow U)(\bar{s}) \in \mathfrak{A}^\dagger(U_i) = \check{H}^0(U_i, \mathfrak{A}).$$

由假设知 $(\bar{s})_i = 0$ 。又由 $\check{H}^0(U_i, \mathfrak{A})$ 的定义, 存在某个加细 $\mathcal{W}_i \geq \mathcal{V}_i$ 使得 $H^0(\mathcal{V}_i, \mathfrak{A}) \rightarrow H^0(\mathcal{W}_i, \mathfrak{A})$ 把 s_i 映到 0。因为 $\mathcal{W} = \cup_i \mathcal{W}_i (\geq \mathcal{V})$ 为 U 的开覆盖, 而 s 在 $H^0(\mathcal{V}, \mathfrak{A}) \rightarrow H^0(\mathcal{W}, \mathfrak{A})$ 下被映到 0, 所以 $\bar{s} = 0$ 。

2. 对任意开集 U , $\mathfrak{A}(U) = H^0(\{U\}, \mathfrak{A})$, 而后者存在到 $\mathfrak{A}^\dagger(U) = \check{H}^0(U, \mathfrak{A})$ 的自然映射。由此产生 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^\dagger$ 。若 $\mathfrak{A}'$ 为层, 则 $\mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{A}^\dagger$ 为同构。于是对任意态射 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ 产生 $\mathfrak{A}^\dagger \rightarrow \mathfrak{A}' \cong \mathfrak{A}'$, 即有

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^\dagger \rightarrow \mathfrak{A}'$$

由极限的泛性质, 这个合成恰好是事先给定的 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ 。下证分解的唯一性: 若 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ 为零态射, 则 $\mathfrak{A}^\dagger \rightarrow \mathfrak{A}'$ 必为零态射。设 $\mathcal{U}$ 为 U 的开覆盖。有交换图

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) & \hookrightarrow & \prod_{i \in I} \mathfrak{A}(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ \mathfrak{A}'(U) = H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{A}') & \hookrightarrow & \prod_{i \in I} \mathfrak{A}'(U_i) \end{array}$$

这迫使 $H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{A}'(U)$ 为零映射。于是

$$\check{H}^0(U, \mathfrak{A}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{A}'(U)$$

为零映射, 也就是说 $\mathfrak{A}^\dagger(U) \rightarrow \mathfrak{A}'(U)$ 为零映射。

3. 设 $\mathfrak{A}$ 为分离。对 U 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$, 首先证明 $H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow \check{H}^0(U, \mathfrak{A})$ 为单。由此可得 $H^0(\{U\}, \mathfrak{A}) \rightarrow \check{H}^0(U, \mathfrak{A})$ 为单, 从而 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^\dagger$ 为单态射。为实现以上目的, 我们可证明对 $\forall \mathcal{V} \geq \mathcal{U}$, $H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) \rightarrow H^0(\mathcal{V}, \mathfrak{A})$ 为单。记 $\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \{V_i \cap U_j\}_{i,j}$ 是 (更细的) U 的开覆盖。它提供两个加细映射 (a) $\{V_i \cap U_j\}_{i,j} \geq \{U_j\}_j = \mathcal{U}$ 及 (b) $\{V_i \cap U_j\}_{i,j} \geq \{V_i\}_i = \mathcal{V} \geq \mathcal{U}$ 。由前所述, 两个加细诱导相同的映射如下

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) & \xrightarrow{\quad} & H^0(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}, \mathfrak{A}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & H^0(\mathcal{V}, \mathfrak{A}) & \end{array}$$

为证明结论。我们只需验证水平映射为单。而此映射来自交换图

$$\begin{array}{ccc} \prod_j \mathfrak{A}(U_j) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathfrak{A}(V_i \cap U_j) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{A}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}, \mathfrak{A}) \end{array}$$

从 $\mathfrak{A}$ 分离可知上方水平映射为单。从而下方水平映射也单。

其次, 我们证明

$$\mathfrak{A}^\dagger(U) \longrightarrow \prod_i \mathfrak{A}^\dagger(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathfrak{A}^\dagger(U_i \cap U_j)$$

为等化子序列。由于 $\mathfrak{A}^\dagger$ 为分离, 所以左手映射为单。令

$$\bar{s} \in \ker\left(\prod_i \mathfrak{A}^\dagger(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathfrak{A}^\dagger(U_i \cap U_j)\right),$$

且 $\bar{s}_i \in \mathfrak{A}^\dagger(U_i)$ 为第 i 个分量。对于每个 i , 取 U_i 的开覆盖 $\mathcal{W}_i = \{W_{ik}\}_k$ 及 $s_i \in H^0(\mathcal{W}_i, \mathfrak{A})$ 代表 $\bar{s}_i$ 。又令 s_{ij}^1 为 s_i 下述映射下的像

$$H^0(\mathcal{W}_i, \mathfrak{A}) \rightarrow H^0(\mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j, \mathfrak{A}).$$

类似地, s_{ij}^2 为 s_j 在

$$H^0(\mathcal{W}_j, \mathfrak{A}) \rightarrow H^0(\mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j, \mathfrak{A})$$

下的像。易见 s_{ij}^1 与 s_{ij}^2 在 $\mathfrak{A}^\dagger(U_i \cap U_j)$ 中代表的元素, 分别是 $\bar{s}_i$ 和 $\bar{s}_j$ 在 $\mathfrak{A}^\dagger(U_i) \rightarrow \mathfrak{A}^\dagger(U_i \cap U_j)$ 以及 $\mathfrak{A}^\dagger(U_j) \rightarrow \mathfrak{A}^\dagger(U_i \cap U_j)$ 下的像。从 $\bar{s}$ 的假设可知它们相等。因此

$$s_{ij}^1 = s_{ij}^2 \in H^0(\mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j, \mathfrak{A}) \subset \prod_{k,l} \mathfrak{A}(W_{ik} \cap W_{jl}),$$

且 $s' = (s_i)_i \in H^0(\mathcal{W}, \mathfrak{A})$, 其中 $\mathcal{W} = \cup_i \mathcal{W}_i$ 为 U 的开覆盖。我们有 $\bar{s}' \in \mathfrak{A}^\dagger(U)$, 而它在 $\mathfrak{A}^\dagger(U) \rightarrow \prod_i \mathfrak{A}^\dagger(U_i)$ 下的像为 $\bar{s}$ 。

4. 由 (2)、(3) 立即可得。

□

根据上述结论, 我们形象地称函子 $(-)^\dagger$ 为**半层化** (half-sheafification)。

我们前面已经根据定义指出, 对于任意阿贝尔层 $\mathfrak{A}$, $H^0(X, \mathfrak{A}) \cong \check{H}^0(X, \mathfrak{A})$ 。对于一维上同调也有同样结论。

命题 8.11

对于任意阿贝尔层 $\mathfrak{A}$, $H^1(X, \mathfrak{A}) \cong \check{H}^1(X, \mathfrak{A})$ 。

证明. 考虑合成函子 (恒等)

$$\mathrm{Sh}(X, \mathrm{Ab}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PSh}(X, \mathrm{Ab}) \xrightarrow{(-)^\#} \mathrm{Sh}(X, \mathrm{Ab}).$$

由于层化是正合函子, 所以相应的 Grothendieck 谱序列迫使 $R^j \iota(\mathfrak{A})^\# = 0, \forall j > 0$, 从而由分离性可得 $R^j \iota(\mathfrak{A})^\dagger = 0, \forall j > 0$ 。

再考虑合成函子 $(-)^\dagger \iota$

$$\mathrm{Sh}(X, \mathrm{Ab}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PSh}(X, \mathrm{Ab}) \xrightarrow{(-)^\dagger} \mathrm{PSh}(X, \mathrm{Ab}).$$

相应的 Grothendieck 谱序列应用到 $\mathfrak{A}$ 上为

$$\check{H}^i(X, R^j \iota(\mathfrak{A})) = E_2^{i,j} \Rightarrow E_\infty^{i,j} = H^{i+j}(X, \mathfrak{A})$$

且其边缘态射是

$$\check{H}^i(X, \mathfrak{A}) = E_2^{i,0} \rightarrow E_\infty^{i,0} = H^i(X, \mathfrak{A}).$$

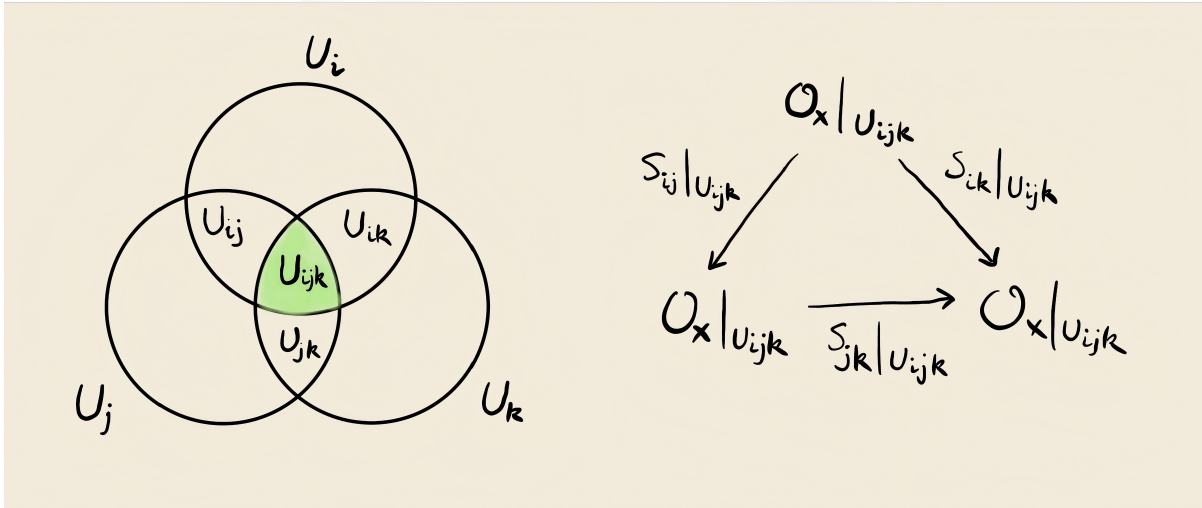
由于 $E_2^{0,j} = R^j \iota(\mathfrak{A})^\dagger = 0, \forall j > 0$, 所以当 $i = 0, 1, 2$ 时, $E_2^{i,0} \rightarrow E_\infty^{i,0}$ 为同构。但当 $i = 0, 1$ 时, $E_\infty^{i,0} = H^i(X, \mathfrak{A})$ 。于是我们得证。 $\square$

8.3 Čech 上同调与皮卡群

设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为赋环空间, 其中 $\mathcal{O}_X$ 是交换环层, 且 $\mathfrak{M}$ 为可逆 $\mathcal{O}_X$ -模。则

1. 存在 X 的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 使得 $\mathfrak{M}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$;
2. 对 $\forall i, j$, 有 $\mathcal{O}_X|_{U_{ij}} \cong \mathcal{O}_X|_{U_{ji}} (\cong \mathfrak{M}|_{U_{ij}})$ 。

从第六讲可知, (2) 相当于给出可逆元素 $s_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_{ij})$, 而同构为“乘以 s_{ij} ”。



考虑阿贝尔预层 $\mathcal{O}_X^*$, 使得对任意 U , $\mathcal{O}_X^*(U) := (\mathcal{O}_X(U))^* = \{\mathcal{O}_X(U) \text{ 中可逆元}\}$ (运算为乘法)。

引理 8.12

阿贝尔预层 $\mathcal{O}_X^*$ 是层。

证明. 设 U 为 X 的开子集, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为一个开覆盖且 $\{s_\alpha \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha)\}_\alpha$ 满足条件

$$s_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = s_\beta|_{U_{\beta\alpha}}, \forall \alpha, \beta \in I.$$

从 $\mathcal{O}_X$ 为层可知存在唯一 $s \in \mathcal{O}_X(U)$, 使得 $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ 。同理 $\{s_\alpha^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha)\}_\alpha$ 确定唯一 $s' \in \mathcal{O}_X(U)$ 。由于 $(ss')|_{U_\alpha} = s|_{U_\alpha} s'|_{U_\alpha} = 1_{\mathcal{O}_X(U_\alpha)}$ 且 $(s's)|_{U_\alpha} = s'|_{U_\alpha} s|_{U_\alpha} = 1_{\mathcal{O}_X(U_\alpha)}$, 所以我们必有 $ss' = s's = 1_{\mathcal{O}_X(U)}$, 从而 $s \in \mathcal{O}_X^*(U)$ 。这说明 $\mathcal{O}_X^*$ 确实是阿贝尔层。 $\square$

上述 $\{s_{ij}\}$ 提供了

$$s = (s_{ij})_{ij} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) = \prod_{i,j} \mathcal{O}_X^*(U_{ij}).$$

又由于 (2) 中同构在 U_{ijk} 上匹配, 所以对 $\beta = ijk$ 有

$$\begin{aligned} d^1 s &= d^1(s_{ij})_{ij} \\ &= s_{\epsilon_0(\beta)}|_{U_\beta} s_{\epsilon_1(\beta)}^{-1}|_{U_\beta} s_{\epsilon_2(\beta)}|_{U_\beta})_{\beta \in I^3} \\ &= (1_\beta)_{\beta \in I^3}, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon_0(\beta) = jk$, $\epsilon_1(\beta) = ik$, $\epsilon_2(\beta) = ij$ 。因此 s 是一个上闭链, 属于

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) = \ker[C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)].$$

反之, 给定 $s \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$, 我们可以 (通过黏合 $\mathcal{O}_X|_{U_{ij}}$ 等) 构造一个可逆 $\mathcal{O}_X$ -模 $\mathfrak{M}_s$ 。

以上引入了一个阿贝尔群同态

$$\zeta_{\mathcal{U}} : Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow \text{Pic} X.$$

若 $s \in \ker \zeta_{\mathcal{U}}$, 则 $\mathfrak{M}_s = \zeta_{\mathcal{U}}(s) \cong \mathcal{O}_X$ 。我们现在说明

$$s = (s_{ij}) \in \text{Im}(C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*))$$

取单位元 $1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ 。由 $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\cong} \Gamma(U_i, \mathfrak{M}_s)$ 可得 $1|_{U_i}$ 的像 $t_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{M}_s)$, 其中 $t_i \in \mathfrak{M}_s|_{U_i}(U_i) \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}(U_i)$ 可逆。由 (2) 可得对 $\forall i, j \in I$, 在 U_{ij} 上有 $t_j = s_{ij}t_i$ 。这说明 s 为上边缘, 即有

$$d^0(t_i)_i = (t_{\epsilon_0(\beta)} t_{\epsilon_1(\beta)}^{-1})_{\beta \in I^2} = (s_{ij}).$$

综上, $\zeta_{\mathcal{U}}$ 诱导单同态 $\bar{\zeta}_{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow \text{Pic} X$ 。

由于任意一个可逆模 $\mathfrak{M}$ 总存在 X 的某个覆盖 $\mathcal{V}$, 使得 $\mathfrak{M}$ 为 $\bar{\zeta}_{\mathcal{V}}$ 的像, 所以通过取极限我们有以下结论。

定理 8.13

$$\text{Pic} X \cong \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

8.4 一般情况

我们集中探讨模的 Čech 上同调, 并进一步展现 Čech 上同调与层上同调之间的联系。特别地, 我们证明模的上同调与将其看作阿贝尔层的上同调一致。

第一小节中关于 Čech 上同调是导出函子的注解包含以下结论。

引理 8.14

设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为赋环空间。对任意入射模 $\mathcal{I}$ 以及任意 $p > 0$, $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{I}) = 0$ 。

引理 8.15

设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为赋环空间, 并给定 $\mathcal{O}_X$ -模的短正合列

$$0 \rightarrow \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow 0$$

若对 X 的开子集 U , 存在共尾开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ 使得 $H^1(\mathcal{U}, \mathfrak{N}) = 0$, 则 $\mathfrak{L}(U) \rightarrow \mathfrak{M}(U)$ 为满射。

证明. 任取 $s \in \mathfrak{M}(U)$ 。根据共尾条件, 可取一个开覆盖 $\mathcal{U}$ 满足: $H^1(\mathcal{U}, \mathfrak{N}) = 0$ 且存在 $s_i \in \mathfrak{L}(U_i)$, 使得 $s|_{U_i} \in \mathfrak{M}(U_i)$ 是 s_i 的像, $\forall i$ 。构造

$$\{s_{ij} = s_j|_{U_{ji}} - s_i|_{U_{ij}} \in \mathfrak{N}(U_{ij})\}_{i,j}$$

从 $H^1(\mathcal{U}, \mathfrak{N}) = 0$ 可知, 我们能找到 $t_i \in \mathfrak{N}(U_i)$ 满足 $s_{ij} = t_j|_{U_{ji}} - t_i|_{U_{ij}}, \forall i, j$ 。于是 $\{s_i - t_i \in \mathfrak{N}(U_i)\}_i$ 满足黏合条件, 产生 $\mathfrak{N}(U) \subset \mathfrak{L}(U)$ 中一个元素, 并被映到 $s \in \mathfrak{M}(U)$ 。□

引理 8.16

设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为赋环空间, 并给定 $\mathcal{O}_X$ -模 $\mathfrak{M}$ 。若对 X 的开子集 U 和任意开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$, $H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{M}) = 0, \forall p > 0$, 则 $H^p(U, \mathfrak{M}) = 0, \forall p > 0$ 。

证明. 取 $\mathfrak{M}$ 的入射包 $\mathfrak{I}$, 并构造模的短正合列

$$0 \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{Q} \rightarrow 0.$$

根据对满态射的刻画, 可知总存在前序结论条件中的共尾覆盖, 因而以上也是模预层正合列。应用 Čech 上同调的长正合列, 可知 $\mathfrak{Q}$ 也满足本引理条件。

现在考虑层上同调的长正合列

$$0 \rightarrow H^0(U, \mathfrak{M}) \rightarrow H^0(U, \mathfrak{I}) \rightarrow H^0(U, \mathfrak{Q}) \rightarrow H^1(U, \mathfrak{M}) \rightarrow \dots$$

由于 $H^1(U, \mathfrak{I}) = 0$ 且 $H^0(U, \mathfrak{I}) \rightarrow H^0(U, \mathfrak{Q})$ 为满射, 所以有 $H^1(U, \mathfrak{M}) = 0$ 。同样方法表明 $H^1(U, \mathfrak{Q}) = 0$, 因而可以推出 $H^2(U, \mathfrak{M}) = 0$ 。通过递推, 我们得证。□

命题 8.17

设 $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 为赋环空间态射。令 $\mathfrak{I}$ 为入射 $\mathcal{O}_X$ -模。则对 Y 的任意开子集 V 和任意开覆盖 $\mathcal{V}$ 以及 $\forall p > 0$,

1. $H^p(\mathcal{V}, \Phi_*(\mathfrak{I})) = 0$, 且
2. $H^p(V, \Phi_*(\mathfrak{I})) = 0$ 。

这说明 $\Phi_*\mathfrak{I}$ 是 $\Gamma(V, -)$ -零调对象。

证明. 令 $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V_i) | V_i \in \mathcal{V}\}$ 。它是 $f^{-1}(V)$ 的一个开覆盖, 并有 $C^*(\mathcal{V}, \Phi_*\mathfrak{I}) \cong C^*(\mathcal{U}, \mathfrak{I})$ 。这给出 1 的证明, 由此进一步给出结论 2。□

命题 8.18

设 $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 为赋环空间态射。令 V 为 Y 的开子集。则 $\phi : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ 诱导产生

$$\text{Res}_{\phi_Y} \Gamma(X, -) = \Gamma(Y, -) \Phi_* : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)\text{-Mod}$$

以及对 $\forall p \geq 0$

$$\text{Res}_{\phi_Y} H^p(X, -) = H^p(Y, \Phi_*(-)) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)\text{-Mod}$$

对于任意模 $\mathfrak{M}$, 我们记 $\mathfrak{M}_{ab}$ 为承载它的阿贝尔对象。上述结论说明, 将任意模 $\mathfrak{M}$ 看作阿贝尔层去计算, 所得上同调不变。

推论 8.19

设 $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ 为赋环空间态射, 并给定 $\mathcal{O}_X$ -模 $\mathfrak{M}$ 。则

1. 对 X 的任意开子集 U ,

$$H^p(U, \mathfrak{M})_{ab} \cong H^p(U, \mathfrak{M}_{ab}),$$

2. 并有函子同构

$$(R^p \Phi_*(\mathfrak{M}))_{ab} \cong R^p \Phi_*(\mathfrak{M}_{ab}).$$