

2.2. 行列式的性质

对于 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$, 其行列式

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{\text{排列 } i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{m(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \\ &= V(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \end{aligned}$$

其中 α_i 是 $\mathbf{A}$ 的第 i 行。

对应上一节 V 满足的性质, 行列式有如下性质.

命题

假设 A 为 n 阶方阵, 其行列式 $|A|$ 具有下列性质.

- ① 将 A 的某一行乘数 λ 得到 B , 则 $|B| = \lambda|A|$;
- ② 如果 A 中两行相同, 那么 $|A| = 0$; 如果交换 A 的两行, 那么其行列式反号;
- ③ 将 A 的第 i 行写为两个向量 α, β 的和, 记 B 为用 α 替换 A 的第 i 行所得的矩阵, C 为用 β 替换 A 的第 i 行所得的矩阵, 则

$$|A| = |B| + |C|;$$

- ④ 对 A 施行第 III 种初等行变换得到矩阵 B , 则 $|B| = |A|$.

例

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 2+a & 3+a \\ 1+b & 2+b & 3+b \\ 1+c & 2+c & 3+c \end{vmatrix}.$$

例

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 2+a & 3+a \\ 1+b & 2+b & 3+b \\ 1+c & 2+c & 3+c \end{vmatrix}.$$

解: 将 D 的第 3 列减去第 2 列, 第 2 列减去第 1 列, 可得

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1+b & 1 & 1 \\ 1+c & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

此时后两列相同, 因此行列式为零, 即 $D = 0$.

例

计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解:

将行列式的第 2 行到第 n 行都加到第 1 行, 有

$$D = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

接着第 1 行乘 -1 加到第 $2, 3, \dots, n$ 行可得

$$D = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

由于 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, 因此将前面命题中的“行”换为“列”, 所有的性质同样成立!

推论

对 n 阶矩阵施行第 III 种初等变换不改变其行列式。

引理

任意 n 阶矩阵都可能通过第 III 种初等变换变为对角矩阵!

由此, 我们可以得到矩阵行列式的重要性质:

定理

对于 n 阶矩阵 A, B 有 $|AB| = |A| \cdot |B|$.

证明. 对 A 施行第 III 种初等变换可将 A 化为对角矩阵 D , 也就是说, 存在第 III 种初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_r, Q_1, Q_2, \dots, Q_s$, 使得

$$A = P_1 P_2 \cdots P_r D Q_1 Q_2 \cdots Q_s,$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

根据行列式的性质, 有 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{D}| = d_1 d_2 \cdots d_n$, 从而有

$$\begin{aligned} |\mathbf{AB}| &= |\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_r \mathbf{D} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_s \mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{D} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_s \mathbf{B}| \\ &= d_1 d_2 \cdots d_n |\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_s \mathbf{B}| \\ &= d_1 d_2 \cdots d_n |\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|. \end{aligned}$$

推论

假设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵. 那么下面几条等价。

(1) 线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解;

(2) $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵;

(3) $\mathbf{A}$ 的行列式不等于 0.

此时 $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

证明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): 线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解等价于

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = n$$

这导致 $\mathbf{A}$ 可逆, 因此 (1) $\Rightarrow$ (2). 反过来, 如果 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 为方程组的唯一解. 即 (2) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Leftrightarrow$ (3): 如果 $\mathbf{A}$ 可逆, 那么有 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

$$|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{I}| = 1.$$

因此 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 且 $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$. 反过来, 假设 $|\mathbf{A}| \neq 0$. 对 $\mathbf{A}$ 施行第 III 种初等变换将 $\mathbf{A}$ 化为

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix},$$

此时 $|\mathbf{D}| = |\mathbf{A}| \neq 0$. 由于 $|\mathbf{D}| = d_1 d_2 \cdots d_n$, 因此 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 均不为 0. 所以 $\mathbf{D}$ 是可逆矩阵. 由于初等变换不改变矩阵的可逆性, 因此 $\mathbf{A}$ 可逆。