

2.3. 行列式按行列展开

在计算矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式时, 将其中一行写成多个向量的和, 比如将第 i 行写成

$$(a_{i1}, 0, \cdots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \cdots, 0) + \cdots + (0, \cdots, 0, a_{in}).$$

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| + |\mathbf{A}_2| + \cdots + |\mathbf{A}_n|$$

$$\mathbf{A}_j := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

将 $\mathbf{A}_j$ 的第 i 行依次与第 $i-1, i-2, \dots, 1$ 行交换得到 $\mathbf{B}$, 则有 $|\mathbf{B}| = (-1)^{i-1} |\mathbf{A}_j|$. 再将 $\mathbf{B}$ 的第 j 列依次与第 $j-1, j-2, \dots, 1$ 列交换得到 $\mathbf{C}$, 则

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$|\mathbf{C}| = (-1)^{j-1} |\mathbf{B}| = (-1)^{i+j-2} |\mathbf{A}_j| = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_j|.$$

去掉 $\mathbf{C}$ 的第 1 行和第 1 列所得的矩阵恰为去掉 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和第 j 列得到的矩阵, 记相应的行列式为 M_{ij} , 称为 $\mathbf{A}$ 对应 (i, j) 元的余子式(minor)。

$$M_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$|\mathbf{C}| = a_{ij}M_{ij}, \quad |\mathbf{A}_j| = (-1)^{i+j}|\mathbf{C}| = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

称为 $\mathbf{A}$ 对应 (i, j) 元的代数余子式(cofactor)

$$|\mathbf{A}_j| = a_{ij} A_{ij}.$$

因为 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| + |\mathbf{A}_2| + \cdots + |\mathbf{A}_n|$, 所以我们得到如下定理.

定理

假设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\mathbf{A}$ 的行列式为其任意一行 (列) 的元素与对应的代数余子式的乘积之和。即对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$|\mathbf{A}| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}.$$

$$|\mathbf{A}| = a_{1i} A_{1i} + a_{2i} A_{2i} + \cdots + a_{ni} A_{ni}.$$

例

计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解: 将 D 的第 3 列乘 -2 加到第 1 列, 第 3 列乘 1 加到第 4 列, 行列式不变, 因此

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

按第 3 行展开得

$$D = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix},$$

再按第 3 列展开可得

$$D = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例

下面的行列式被称为范德蒙 (Vandermonde) 行列式。

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

它的值为

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

这里 $\prod$ 代表连乘。

推论

在任意 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 中, 某一行的元素与另一行的对应元素的代数余子式的乘积之和为零, 即对 $i \neq j$, 有

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

证明.

用 $\mathbf{A}$ 的第 i 行替换 $\mathbf{A}$ 的第 j 行, 记所得矩阵为 $\mathbf{B}$.

- $\mathbf{B}$ 的第 i, j 行完全相同
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 第 j 行各元素的代数余子式相同

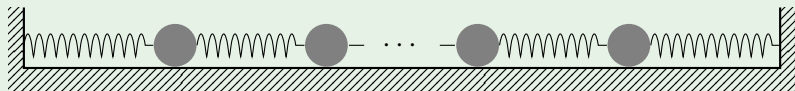
$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{B}| = b_{j1}B_{j1} + b_{j2}B_{j2} + \cdots + b_{jn}B_{jn} \\ &= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \end{aligned}$$



物理模型中的行列式 (选读)

例

在物理中, 考虑 n 个质量为 m 的物体通过弹性系数为 k 的弹簧依次相连, 且整个系统两端固定的模型, 如图



在正规模式 (normal mode) 下, 以初始位置为零点, 以向右为正方向, 从左到右数第 i 个小球的位移函数为 $x_i(t) = A_i \sin \omega t$, 其中 $\omega > 0$ 且 $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ 不全为零。 ω 有哪些可能性?

在 t 时刻, 通过分析可知小球的受力为

$$F_1(t) = (x_2(t) - 2x_1(t))k, \quad F_n(t) = (x_{n-1}(t) - 2x_n(t))k,$$

$$F_i(t) = (x_{i+1}(t) + x_{i-1}(t) - 2x_i(t))k, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

根据牛顿第二定律, 有

$$F_i(t) = m \cdot \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

对 $i = 1$, 这等价于

$$(A_2 - 2A_1)k \sin \omega t = -m\omega^2 A_1 \sin \omega t$$

对所有 t 成立, 即

$$(2k - m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0.$$

类似地可以得到

$$(2k - m\omega^2)A_n - kA_{n-1} = 0,$$

$$(2k - m\omega^2)A_i - k(A_{i-1} + A_{i+1}) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

这等价于 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是齐次方程 $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的非零解, $\mathbf{M}$ 为

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & & & & \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k & & & \\ & -k & 2k - m\omega^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2k - m\omega^2 & -k \\ & & & & -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix}.$$

因此 ω 满足 $|\mathbf{M}| = 0$. 现在我们计算 $|\mathbf{M}|$, 令

$$a = \frac{2k - m\omega^2}{-k} = \frac{m\omega^2}{k} - 2$$

$$|\mathbf{M}| = (-k)^n \begin{vmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & 1 & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a & 1 \\ & & & & 1 & a \end{vmatrix}.$$

记不带 $(-k)^n$ 的 n 阶行列式为 Δ_n , 按第 1 行展开可得递推式

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

令 λ, μ 为关于 x 的二次方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 在 $\mathbb{C}$ 中的两根。利用数学归纳法可以证明

$$\Delta_n = \sum_{i=0}^n \lambda^i \mu^{n-i} = \begin{cases} n\lambda^n, & \lambda = \mu; \\ \frac{\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}}{\lambda - \mu}, & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

所以 $\Delta_n = 0$ 当且仅当 $\lambda \neq \mu$ 且

$$\lambda^{n+1} - \mu^{n+1} = 0$$

当且仅当

$$\lambda = \mu \left(\cos \frac{2r\pi}{n+1} + i \sin \frac{2r\pi}{n+1} \right).$$

两边同时乘 λ , 根据 $\lambda\mu = 1$ 可解得

$$\lambda = \pm \left(\cos \frac{r\pi}{n+1} + i \sin \frac{r\pi}{n+1} \right).$$

此时 λ 的模长为 1, $\mu = \mu|\lambda|^2 = \mu\lambda\bar{\lambda} = \bar{\lambda}$ 为 λ 的共轭复数。从而

$$\frac{m\omega^2}{k} - 2 = a = \mu + \lambda = \bar{\lambda} + \lambda = \pm 2 \cos \frac{r\pi}{n+1},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \left(2 \pm 2 \cos \frac{r\pi}{n+1} \right)}, \quad 0 < r < n+1.$$