

2.4. 行列式按多行 (多列) 展开

对于一个 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$, 如果选取 k 行 k 列, 即取 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的两个 k 元子集

$$X = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, Y = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}.$$

我们将这 k 行 k 列交叉处对应的 k^2 个元素形成的行列式称为 $\mathbf{A}$ 的行列式的 **k 阶子式**(k -order minor), 记为

$$|\mathbf{A}_{X,Y}|.$$

例如, 取五阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 1, 第 2, 第 4 行与第 2, 第 3, 第 5 列交叉处的 9 个元素, 如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix},$$

形成的三阶子式为

$$|\mathbf{A}_{\{1,2,4\},\{2,3,5\}}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

记 $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ 在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中的补集为 X^c ,

记 ΣX 为 X 中的元素之和.

比如本例中 $n = 5$, $X = \{1, 2, 4\}$, $Y = \{2, 3, 5\}$, 则

$$\Sigma X = 1 + 2 + 4 = 7, \quad X^c = \{3, 5\}, \quad Y^c = \{1, 4\}.$$

X^c, Y^c 对应的子式

$$|\mathbf{A}_{X^c, Y^c}| = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$$

为从 $\mathbf{A}$ 中删除 X 中数字对应的行与 Y 中数字对应的列后对应的子式。

计算 n 阶行列式时, 先固定 k 行, 按这 k 行展开的结论如下。

定理 (2.11, 拉普拉斯 (Laplace) 展开)

对于 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$, 固定

$$X = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\},$$

则有

$$|\mathbf{A}| = \sum_{Y \text{ 为 } \{1, 2, \dots, n\} \text{ 的 } k \text{ 元子集}} (-1)^{\Sigma X + \Sigma Y} |\mathbf{A}_{X, Y}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c, Y^c}|.$$

这里 Y 取遍 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 k 元子集, 共有 $\binom{n}{k}$ 个。

这个定理的证明思路是:

先证明映射

$$f: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

将任意 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 映为

$$f(\mathbf{A}) := \sum_{Y \text{ 为 } \{1,2,\dots,n\} \text{ 的 } k \text{ 元子集}} (-1)^{\Sigma X + \Sigma Y} |\mathbf{A}_{X,Y}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c,Y^c}|,$$

满足对列的**多重线性**、**反对称性**和**规范性**

由定理 2.1 中的唯一性可知 $f(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$.

多重线性. 假设将 $\mathbf{A}$ 的第 l 列乘以数 λ 得到矩阵 $\mathbf{B}$, 则对任意 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 k 元子集 Y , 要么 $l \in Y$, 要么 $l \in Y^c$. 如果 $l \in Y$, 那么根据行列式的性质有

$$|\mathbf{B}_{X,Y}| = \lambda \cdot |\mathbf{A}_{X,Y}|.$$

此时 $l \notin Y^c$, 因此

$$|\mathbf{B}_{X^c,Y^c}| = |\mathbf{A}_{X^c,Y^c}|.$$

这样 $f(\mathbf{B})$ 中 Y 对应的项

$$(-1)^{\Sigma X + \Sigma Y} |\mathbf{B}_{X,Y}| \cdot |\mathbf{B}_{X^c,Y^c}| = \lambda \cdot (-1)^{\Sigma X + \Sigma Y} |\mathbf{A}_{X,Y}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c,Y^c}|$$

为 $f(\mathbf{A})$ 中 Y 对应的项的 λ 倍。

类似地, 当 $l \in Y^c$ 时, 也可以证明 $f(\mathbf{B})$ 中对应的项是 $f(\mathbf{A})$ 中对应的项的 λ 倍。所以 $f(\mathbf{B}) = \lambda \cdot f(\mathbf{A})$ 。

如果 $\mathbf{A}$ 的第 l 列写成两个列向量的和, 用这两个列向量分别替换 $\mathbf{A}$ 的第 l 列, 所得矩阵分别为 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$. 对任意 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 k 元子集 Y , 同样分两种情况讨论。若 $l \in Y$, 则 $l \notin Y^c$, 根据行列式的性质有

$$|\mathbf{A}_{X,Y}| = |\mathbf{B}_{X,Y}| + |\mathbf{C}_{X,Y}|,$$

$$|\mathbf{A}_{X^c,Y^c}| = |\mathbf{B}_{X^c,Y^c}| = |\mathbf{C}_{X^c,Y^c}|.$$

因此

$$|\mathbf{A}_{X,Y}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c,Y^c}| = |\mathbf{B}_{X,Y}| \cdot |\mathbf{B}_{X^c,Y^c}| + |\mathbf{C}_{X,Y}| \cdot |\mathbf{C}_{X^c,Y^c}|.$$

类似地, 对于 $l \notin Y$ 的情形同样可得上式。

所以 $f(\mathbf{A})$ 中的每一项都是 $f(\mathbf{B}), f(\mathbf{C})$ 中对应项的和, 即

$$f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{B}) + f(\mathbf{C}).$$

这就证明了映射 f 满足多重线性性质。

反对称性. 现假设 $\mathbf{A}$ 的两列相同, 我们需要证明 $f(\mathbf{A}) = 0$.

不妨设 $\mathbf{A}$ 的第 l , 第 m 列相同且 $l < m$.

对于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任意 k 元子集 Y , 若 l, m 都属于 Y , 则子式 $|\mathbf{A}_{X,Y}|$ 对应的这两列也相同, 从而 $|\mathbf{A}_{X,Y}| = 0$.

如果 l, m 都不属于 Y , 那么它们都属于 Y^c , 此时子式 $|\mathbf{A}_{X^c,Y^c}|$ 有两列完全相同, 为零。

在这两种情形下, $f(\mathbf{A})$ 中 Y 对应的项均为零。

现在考虑 l, m 中只有一个数出现在 Y 中的情形。

所有这样的子集可以两两配对。对于一个含 l , 但不含 m 的 k 元子集 Y , 我们将其中的 l 替换为 m , 保持其他数不变, 得到的集合记为 Y' . 我们将证明 $f(\mathbf{A})$ 中 Y 和 Y' 对应的项之和为零。

现在 Y 和 Y' 中除 l, m 外其他数相同, 而 $\mathbf{A}$ 的第 l , 第 m 两列完全相同。我们将子式 $|\mathbf{A}_{X,Y}|$ 中 l 对应的列依次与 Y 中大于 l , 但小于 m 对应的列 (设为 r 列) 交换, 就可以得到 $|\mathbf{A}_{X,Y'}|$.

$$l \leftrightarrow y_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow y_r$$

从 $|\mathbf{A}_{X,Y}|$ 到 $|\mathbf{A}_{X,Y'}|$ 经过了 r 次列的对换, 因此

$$|\mathbf{A}_{X,Y}| = (-1)^r |\mathbf{A}_{X,Y'}|.$$

类似地, 由于 Y^c 和 Y'^c 除 l, m 外, 其他数也相同, 因此

$$|\mathbf{A}_{X^c, Y^c}| = (-1)^t |\mathbf{A}_{X^c, Y'^c}|,$$

其中 t 为 Y^c 中大于 l 而小于 m 的数的个数。所以, $r+t$ 就是 $Y \cup Y^c = \{1, 2, \dots, n\}$ 中所有大于 l 而小于 m 的数的个数。因此 $r+t = m-l-1$, 故

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_{X, Y}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c, Y^c}| &= (-1)^{r+t} |\mathbf{A}_{X, Y'}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c, Y'^c}| \\ &= (-1)^{m-l-1} |\mathbf{A}_{X, Y'}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c, Y'^c}|. \end{aligned}$$

另外，容易验证

$$\Sigma X + \Sigma Y - (\Sigma X + \Sigma Y') = l - m$$

因此

$$(-1)^{\Sigma X + \Sigma Y} |\mathbf{A}_{X,Y}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c,Y^c}| + (-1)^{\Sigma X + \Sigma Y'} |\mathbf{A}_{X,Y'}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c,Y'^c}| = 0.$$

即 $f(\mathbf{A})$ 中 Y 和 Y' 对应的项之和为零。

$\{1, 2, \dots, n\}$ 中含 l 但不含 m 的 k 元子集和含 m 但不含 l 的 k 元子集可以通过 $Y \leftrightarrow Y'$ 这种方式两两配对。

因此，我们可以总结出 $f(\mathbf{A}) = 0$ ，反对称性得证。

规范性. 当 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 时, 只有当 $Y = X$ 时对应的子式非零, 因此

$$f(\mathbf{I}) = (-1)^{2\Sigma X} |\mathbf{I}_{X,X}| \cdot |\mathbf{I}_{X^c,X^c}| = |\mathbf{I}_k| \cdot |\mathbf{I}_{n-k}| = 1.$$

这样就证明了映射 f 也满足对列的多重线性、反对称性和规范性.

因此 f 就是取行列式这个映射, 从而 $f = \det$, 即 $f(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ 对任意 $\mathbf{A} \in M_n(F)$ 成立.

例

假设 $\mathbf{A}$ 是 k 阶方阵, $\mathbf{B}$ 是 m 阶方阵, 要计算分块矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

的行列式, 可按前 k 行展开, 即取 $X = \{1, 2, \dots, k\}$. 在前 k 行, 只有 $Y = \{1, 2, \dots, k\}$ 列对应的 k 阶子式可能非零, 因此 $|\mathbf{T}|$ 为

$$(-1)^{\sum X + \sum Y} |\mathbf{T}_{X,Y}| \cdot |\mathbf{T}_{X^c,Y^c}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

例

计算 4 阶矩阵行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

我们可以按第 2, 第 4 行展开, 即取 $X = \{2, 4\}$.

$\{1, 2, 3, 4\}$ 的 2 元子集共有六个, 分别为

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$$

我们把第 2, 4 行单独写出来

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

只有当 $Y = \{2, 3\}$ 时对应的子式 $|\mathbf{A}_{X,Y}|$ 非零。

因此, $|\mathbf{A}|$ 为

$$(-1)^{\Sigma X + \Sigma Y} |\mathbf{A}_{X,Y}| \cdot |\mathbf{A}_{X^c,Y^c}| = (-1)^{6+5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$