

2.5. 行列式的应用

对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$, 我们已经证明了线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解当且仅当 $|\mathbf{A}| \neq 0$. 这一节我们将这一组解用行列式表达。

对于 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$, 我们记

$$\mathbf{A}^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

称为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵(adjoint matrix), 其中 A_{ij} 为 $\mathbf{A}$ 的 (i, j) 元对应的代数余子式。

$\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ 的 (i, j) 元为用 $\mathbf{A}$ 的第 i 行乘 $\mathbf{A}^*$ 的第 j 列, 即

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i,j} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

所以

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时, 可得

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*.$$

定理 (克拉默 (Cramer) 法则)

对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 以及 $\mathbf{b} \in F^n$, 若 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 则线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}, \dots, x_n = \frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|},$$

其中 $\mathbf{A}_i$ 为用 $\mathbf{b}$ 替换 $\mathbf{A}$ 的第 i 列所得的矩阵。

例

如果矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的行列式 $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$, 由伴随矩阵的定义, 有

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

那么 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

这种求二阶矩阵逆矩阵的方法被形象地称为“**两调一除**”：调换对角线元素，调换其他两个元素正负号，再除以行列式。

例

用克拉默法则解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 9, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

解: 系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -70.$$

通过计算可得 $|\mathbf{A}_1| = -322$, $|\mathbf{A}_2| = 91$, $|\mathbf{A}_3| = -7$. 因此方程组有唯一解, 即

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = 4.6, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = -1.3, \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|} = 0.1.$$

矩阵秩的另一种理解

对于矩阵 $\mathbf{A}$, 任取 k 行 k 列, 位于这些行和列交叉点的元素在不改变相对位置的情况下形成的 k 阶行列式称为 $\mathbf{A}$ 的一个 k 阶子式。比如, 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

取第 1, 第 3 行, 第 2, 第 4 列, 形成的二阶子式为

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

定理

一个非零矩阵的秩等于其非零子式的最大阶数。

推论

对 n 阶矩阵 A ，下面几条等价

- A 可逆;
- $\text{rank}(A) = n$;
- $|A| \neq 0$;
- 对列向量 b , 线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解。