

3.1. 向量空间和子空间

- 中学: 空间向量, α, β 为空间向量

$$\alpha + \beta (\text{加法}),$$

$$\lambda \alpha, \lambda \in \mathbb{R} (\text{数乘})$$

- 大学: 矩阵 $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$A + B (\text{加法}),$$

$$\lambda A, \lambda \in \mathbb{R} (\text{数乘})$$

- $f(x), g(x)$: 区间 $[a, b]$ 上的连续函数

$$f(x) + g(x) (\text{加法}),$$

$$\lambda f(x), \lambda \in \mathbb{R} (\text{数乘})$$

$$\mathbb{R}^n \text{中: } \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{加法: } \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\text{数乘: } \lambda \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

上面三种例子中，**加法**和**数乘**满足一些共同的性质。

加法的共同特点：

- (1) 交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (2) 结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- (3) 存在零向量 $\mathbf{0}$ 使得 $\mathbf{0} + \alpha = \alpha$;
- (4) 存在负向量 $-\alpha$ 使得 $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$.

$\mathbb{R}^n$ 中:

$$\text{零向量: } \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{负向量: } -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$$

$C[a, b]$: 区间 $[a, b]$ 上连续函数集合. 加法的“零向量”为恒等于 0 的常值函数, “向量” $f(x)$ 的“负向量”为函数 $-f(x)$.

$M_{m,n}(\mathbb{R})$ 中, 零向量为零矩阵 O , “向量” A 的“负向量”为 $-A$.

上面例子中, 数乘满足以下性质:

(5) 分配律 1: $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;

(6) 分配律 2: $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;

(7) 结合律: $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;

(8) 单位元: $1\alpha = \alpha$.

定义 (向量空间)

设 V 是一个非空集合, 定义了两个运算:

加法: $V \times V \rightarrow V, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta;$

数乘: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, \alpha) \mapsto \lambda\alpha;$

使得

- 加法满足 (1) 交换律; (2) 结合律; (3) 有零向量; (4) 有负向量;
- 数乘与加法的关系满足 (5) 分配律 1; (6) 分配律 2; (7) 结合律; (8) $1\alpha = \alpha$.

则称 V 是一个 $\mathbb{R}$ 向量空间, 加法和数乘分别称为 V 上的向量加法和数乘.

例

$\mathbb{R}^n, M_{m,n}(\mathbb{R}), C[a, b]$ 都是 $\mathbb{R}$ 向量空间.

备注

向量空间的定义中, $\mathbb{R}$ 可以替换为任意一个数域 F , 这时称 V 是一个 **F -向量空间**. 比如: $\mathbb{C}^n, M_{m,n}(\mathbb{C})$ 都是 $\mathbb{C}$ -向量空间.

定理

假设 V 是数域 F 上的向量空间, 则下列结论成立.

- ① V 中的零向量是唯一的;
- ② 对任意 $\alpha \in V$, 其负向量唯一, 零向量的负向量是其本身;
- ③ $\lambda\alpha = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\lambda = 0$ 或者 $\alpha = \mathbf{0}$;
- ④ 对 $\lambda \in F, \alpha \in V$, 有 $\lambda(-\alpha) = (-\lambda)\alpha = -(\lambda\alpha)$.

命题

假设 V 是一个 $\mathbb{R}$ 向量空间, W 为 V 的非空子集。如果 W 关于 V 中的加法和数乘封闭, 即

$$\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha + \beta \in W;$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in W \Rightarrow \lambda \alpha \in W,$$

则 W 在 V 中的加法和数乘下也是一个 $\mathbb{R}$ 向量空间, 是 W 是 V 的一个子空间.

例

- 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 经过原点的平面 $x + 2y + z = 0$ 上的点对应的向量的集合为

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \right\}$$

容易验证 W 中向量关于加法和数乘封闭. 从而 W 为 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

- $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, 齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解构成的集合

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid A\alpha = \mathbf{0}\}$$

关于加法和数乘封闭, 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 称为方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间。

例

假设 W 是 V 的子空间, 即 W 关于向量加法和数乘封闭, 则对任意 W 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in W, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 都有

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n \in W$$

$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n$ 称为关于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的一个

$\mathbb{R}$ 线性组合

也就是说, 子空间 W 中若干个向量的线性组合依然在 W 中。

例

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是向量空间 V 中 n 个向量, 则它们的所有线性组合构成的集合

$$\{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

关于加法和数乘封闭, 称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 生成的子空间, 记作

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$$

- 向量空间 V 的两个子空间 W_1, W_2 的交 $W_1 \cap W_2$ 仍然是 V 的子空间; 但它们的并 $W_1 \cup W_2$ 一般不是 V 的子空间 (试举反例)。
- 对于 V 的两个子空间 W_1, W_2 , 它们的和

$$W_1 + W_2 = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in W_1, \beta \in W_2\}$$

是 V 的子空间, 称为 W_1 和 W_2 的和空间。

- 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 为向量空间 V 中两组向量, 则

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle + \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \rangle \\ &= \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \rangle \end{aligned}$$