

3.2. 线性相关性

- α, β, γ : 向量空间 V 中向量;
- 如果 $\alpha = 2\beta + 3\gamma$ 为 β 和 γ 的线性组合 (线性表示);
- 则任意 α, β, γ 的线性组合

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma \\ &= \lambda_1 (2\beta + 3\gamma) + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma \\ &= (2\lambda_1 + \lambda_2) \beta + (3\lambda_1 + \lambda_3) \gamma \end{aligned}$$

也是 β, γ 的线性组合, 从而有

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle$$

也就是说, α, β, γ 中去掉 α 后生成的子空间与原来生成的子空间相同!

问题

有没有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得其中任何一个向量不能写成其余向量的线性组合?

定理

假设 $n \geq 2$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}$ 向量空间 V 中的向量组。那么下面几条等价。

- ① 向量组的任一真子集生成的子空间真包含于 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$;
- ② 向量组中任一向量不能写成其余向量的线性组合;
- ③ 对任意 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, 如果线性组合

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n = \mathbf{0}$$

那么 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

定义

假设 $\mathbb{R}$ 向量空间 V 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, n \geq 1$ 满足上面定理中的第 3 条, 即

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n = \mathbf{0}$$

当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性无关**, 否则, 称该向量组**线性相关**。

备注

根据定义, 由一个单独的非零向量 α 组成的向量组线性无关, 而由一个零向量 $\mathbf{0}$ 组成的向量组线性相关。

例

$\mathbb{R}^n$ 中的标准单位向量

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关。实际上, 对于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, 有

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T.$$

如果此线性组合为零向量 $\mathbf{0}$, 那么 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

例

在 $\mathbb{R}$ 向量空间 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 中的 $\mathbf{E}_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 线性无关。跟上面的例子类似, 对于 $a_{ij} \in F$, 我们有

$$\sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{E}_{ij} = \mathbf{A},$$

其中 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 其 (i, j) 元为 a_{ij} . 如果此线性组合为 $M_{m,n}(F)$ 的零向量 $\mathbf{O}$, 即 $\mathbf{A}$ 为零矩阵, 那么所有的 a_{ij} 均为零。

例

将 $\mathbb{C}$ 看成 $\mathbb{R}$ 向量空间, 则 $1, i$ 是线性无关的。这是因为若 $\mathbb{R}$ 线性组合 $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$, 则实数 a, b 均为零。

如果将 $\mathbb{C}$ 看作 $\mathbb{C}$ 向量空间, 那么 $1, i$ 是线性相关的。这是因为取复数 $a = 1, b = i$, 不全为零, 但 $\mathbb{C}$ 线性组合

$$a \cdot 1 + b \cdot i = 1 + i^2 = 0.$$

例

判断 $\mathbb{R}^3$ 中的向量组

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的线性相关性。

解：线性组合

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

求使得这个线性组合为零向量的 x_1, x_2, x_3 相当于解齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由于该方程组的系数矩阵行列式为 1, 因此方程组只有唯一零解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

备注

一般地, $\mathbb{R}^m$ 中的 n 个向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关当且仅当由这 n 个向量拼成的 m 行 n 列矩阵 $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 对应的齐次线性方程组 $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, 这等价于 $\text{rank}(\mathbf{B}) = n$. 如果 $m = n$, 这进一步等价于 $\mathbf{B}$ 是可逆矩阵。

推论

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 中线性无关的向量组, $\alpha \in V$. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha$ 线性无关当且仅当 α 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示。

证明. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha$ 线性无关, 那么 α 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 必要性得证。

现证充分性。假设 α 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha$ 线性相关。则存在不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \lambda$, 使得

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_r \alpha_r + \lambda \alpha = \mathbf{0}.$$

如果 $\lambda = 0$, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的线性无关性, 得

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$, 这与 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \lambda$ 不全为零矛盾。

因此 $\lambda \neq 0$.

但如此一来,

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda} \right) \alpha_i,$$

这与 α 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示矛盾。

□

- 我们将一个向量组的子集称为其**部分组**(partial set)。
- 对于一个不全为零向量的向量组，如果某个向量可以由其余向量线性表示，那么去除这个向量，剩下的向量生成的子空间与原向量组生成的子空间相同。
- 重复这个过程，最终得到一个原向量组的部分组，满足
 - 这个部分组生成的子空间与原向量组生成的子空间相同
 - 部分组要么只含有一个非零向量，
 - 要么至少含有两个向量，且其中任何一个向量都不能由其余向量线性表示
- 因此我们得到原向量组的一个线性无关的部分组，它生成的子空间与原向量组生成的子空间相同。
- 去除向量的过程并不唯一！最终剩下向量个数是否唯一？
- 答案是：**最终剩下的向量个数是唯一的！**

引入一个方便的记号, 把线性组合用矩阵乘法的形式写出来, 记

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_n \alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

这里约定 $\alpha_i \lambda_i := \lambda_i \alpha_i$. 对 $\mathbf{A} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ 可定义

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m),$$

其中

$$\beta_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{1i}\alpha_1 + a_{2i}\alpha_2 + \dots + a_{ni}\alpha_n.$$

如果 $B \in M_{m,r}(\mathbb{R})$, 根据矩阵乘法的结合性, 可验证

$$[(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A]B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)(AB).$$

命题

假设 $\mathbb{R}$ 向量空间 V 中线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中的向量都可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表示, 则 $n \leq m$.

线性无关的向量组不能由向量个数更少的向量组线性表示.

证明. 根据假设, 存在 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, 使得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)A.$$

我们断言 $Ax = 0$ 只有零解. 实际上, 如果 $\eta \in \mathbb{R}^n$ 使得 $A\eta = 0$,

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\eta &= [(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)A]\eta \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)(A\eta) = 0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 因此 $\eta = 0$. 所以 $\text{rank}(A) = n$, 但矩阵的秩不超过其行数, 因此 $n \leq m$.

定义

如果两个向量组生成的子空间相同，那么我们称这两个向量组等价，实际上，这等同于这两个向量组能相互线性表示。

由前面的讨论，对于向量空间中不全为零的向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，存在线性无关的部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ ，使得

$$\langle \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r} \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle,$$

即此部分组与原向量组等价。这等同于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表示。此时， $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 称为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的一个极大线性无关组

前面关心的这个部分组的向量个数的唯一性问题的答案可由下面的定理给出。

定理

两个等价的向量组的极大线性无关组的向量个数相同。特别地，一个向量组的两个极大线性无关组的向量个数相同。

定义

如果一个向量组中的向量都是零向量，那么定义这个向量组的秩为 0，如果一个向量组中的向量不全为零向量，那么定义其秩为极大线性无关组的向量个数，记为 rank 。

求 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组的极大线性无关组

定理

假设 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组, $\mathbf{T} \in M_m(\mathbb{R})$ 是 m 阶可逆矩阵. 那么 $\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_r}$ 是 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ 的极大线性无关组当且仅当 $\mathbf{T}\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{T}\mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{T}\mathbf{u}_{i_r}$ 是 $\mathbf{T}\mathbf{u}_1, \mathbf{T}\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{T}\mathbf{u}_n$ 的极大线性无关组.

例

求 $\mathbb{R}^3$ 中的向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

的一个极大线性无关组。

解. 根据上面定理, 我们可以考虑向量组 $T\alpha_i, 1 \leq i \leq 4$, 其中 T 是三阶可逆实矩阵。在列向量左边乘一个可逆矩阵相当于对其作一系列的初等行变换, 因此我们可以先将 $\alpha_i, 1 \leq i \leq 4$ 拼成一个矩阵, 然后再对其作初等行变换。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{23}(-2), T_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{T_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

记这些初等行变换对应的初等矩阵的乘积为 $\mathbf{T}$, 则变换后的矩阵的列为 $\mathbf{T}\alpha_i, 1 \leq i \leq 4$. 容易发现前两列

$$\mathbf{T}\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{T}\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

线性无关且 $\mathbf{T}\alpha_3 = 2\mathbf{T}\alpha_2 - \mathbf{T}\alpha_1, \mathbf{T}\alpha_4 = 5\mathbf{T}\alpha_2 - 6\mathbf{T}\alpha_1$.

因此 $\mathbf{T}\alpha_1, \mathbf{T}\alpha_2$ 是 $\mathbf{T}\alpha_i, 1 \leq i \leq 4$ 的极大线性无关组。

从而 α_1, α_2 是 $\alpha_i, 1 \leq i \leq 4$ 的极大线性无关组。

备注

极大线性无关组并不是唯一的! 这个例子中向量组的任意两个向量组成的部分组都是其极大线性无关组。