

3.3. 基和维数

如果向量空间 V 可以由有限个向量生成, 那么称 V 有限生成。
我们可以在这个向量组中取出一个极大线性无关组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

它生成的空间与原向量组生成的空间相同, 即 V . 此时

- ① $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关;
- ② V 中所有向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示。

满足上述两个条件的向量组称为 V 的一组**基**(basis). 由

命题

向量空间 V 的两组基向量个数相同。

证明.

实际上, 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是 V 的两组基。则这两个向量组都线性无关且

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle = V = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \rangle.$$

由定理 3.10 得 $m = n$.



定义

$\mathbb{R}$ 向量空间 V 的基的向量个数称为 V 的 **维数**(dimension), 记为 $\dim_{\mathbb{R}} V$, 在没有混淆的情况下简记为 $\dim V$.

零向量空间的维数定义为 0.

例 (1)

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 单位向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关, 且对于任意 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 有

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

因此, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 特别地, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 的**标准基**(standard basis).

例 (2)

类似地, $E_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 是 $\mathbb{R}$ 向量空间 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 的一组基, 从而 $\dim_{\mathbb{R}} M_{m,n}(\mathbb{R}) = mn$.

例 (3)

$1, i$ 是 $\mathbb{R}$ 向量空间 $\mathbb{C}$ 的一组基, 因此 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

1 是 $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{C}$ 向量空间的一组基, 因此 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

向量空间 V 的维数 n 也可以理解为 V 中能容纳的线性无关向量组的最大向量个数, 并且 V 中所有向量个数为 n 的线性无关向量组都是 V 的一组基。

定理 (3.14)

假设 V 为 n 维向量空间, 那么下面结论成立。

- ① V 中任意多于 n 个向量的向量组都线性相关;
- ② V 中任意 n 个线性无关向量都是 V 的一组基;
- ③ 假设 W 为 V 的子空间. 则 $\dim W \leq \dim V$, 等号成立当且仅当 $W = V$;
- ④ V 中任意少于 n 个向量的线性无关向量组都可以扩展为 V 的一组基。

例

由定理 3.14, $\mathbb{R}^n$ 中 n 个向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基当且仅当它们线性无关。这等价于由这些向量拼成的矩阵

$$B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

是 $M_n(\mathbb{R})$ 中的可逆矩阵。例如, 由于实数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

可逆, 因此它的三列构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

物理例子 (选读)

例

我质量为 m 的物体在弹性系数为 k 的弹簧作用下作振动, 其位移函数 $x(t)$ 满足方程

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t).$$

容易验证 $C^2(\mathbb{R})$ (有二阶连续导数的函数的全体) 中所有满足这个条件的函数构成 $C^2(\mathbb{R})$ 的子空间, 记为 V .

我们现在找出 V 的一组基。记 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

显然函数 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 满足上面的微分方程, 属于 V .

下面我们将证明: 这两个函数构成 V 的一组基。

对任意 $g(t) \in V$, 考虑函数 $G(t) = \omega^2(g(t))^2 + (g'(t))^2$, 则有

$$G'(t) = 2\omega^2 g(t)g'(t) + 2g'(t)g''(t) = 2\omega^2 g(t)g'(t) - 2\omega^2 g'(t)g(t) \equiv 0.$$

因此 $G(t)$ 为常值函数。对任意 $f(t) \in V$, 函数

$$g(t) = f(t) - f(0) \cos \omega t - \frac{f'(0)}{\omega} \sin \omega t$$

为 V 中函数的线性组合, 依然属于 V . 简单计算可发现

$$g(0) = 0, g'(0) = 0$$

由前面的讨论知

$$\omega^2(g(t))^2 + (g'(t))^2 \equiv \omega^2(g(0))^2 + (g'(0))^2 = 0.$$

由此可得 $g(t)$ 恒为零。

所以

$$f(t) = f(0) \cos \omega t + \frac{f'(0)}{\omega} \sin \omega t$$

为 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的线性组合。这说明 V 中所有函数都是 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的线性组合。由于 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 在 V 中线性无关 (参见习题 3.2 第 1 题), 从而它们构成 V 的一组基。所以 $x(t) \in V$ 是周期函数, 周期为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

下面这个定理是关于子空间的维数的重要结论。

定理 (3.15)

假设 U, W 为向量空间 V 的有限维子空间，则

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$