

3.4. 坐标和基变换

对于 n 维 $\mathbb{R}$ 向量空间 V , 假设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

为 V 的一组基 (固定顺序), 则 V 中的任意向量 α 都可以写成这组基的线性组合

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

这些系数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in F$ 是由 α 唯一确定的. 实际上, 如果 α 可以写成另一种线性组合 $\alpha = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n$, 那么有

$$(x_1 - y_1)\alpha_1 + (x_2 - y_2)\alpha_2 + \cdots + (x_n - y_n)\alpha_n = \mathbf{0}.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 因此 $x_i - y_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

这样对每个 $\alpha \in V$, 存在唯一的列向量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

使得

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + \cdots + x_n \alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \mathbf{x}$$

这个列向量 $\mathbf{x}$ 称为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标向量 (coordinate vector), 常简称为坐标, x_i 称为第 i 个坐标.

例

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 关于 $\mathbb{R}^n$ 的标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 的坐标就是 $\mathbf{x}$.

命题

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathbb{R}$ 向量空间 V 的一组基, V 中向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 在这组基下的坐标分别是 $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$. 则

- ① 对于任意 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, 线性组合

$$\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_m \beta_m$$

在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_m u_m;$$

- ② $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关当且仅当 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 线性无关.

一般来说, 同一向量在不同基下的坐标是不同的!

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 $\mathbb{R}$ 向量空间 V 的两组基.

向量 $\alpha \in V$ 在这两组基下的坐标分别为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$

$\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x}'$ 有什么联系?

两组基可以相互线性表示, 因此存在 n 阶矩阵 $\mathbf{T} \in M_n(\mathbb{R})$, 使得

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mathbf{T}.$$

实际上, 对 $i = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{T}$ 的第 i 列恰为 β_i 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标. 矩阵 $\mathbf{T}$ 称为基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵(transition matrix).

定理 (3.17)

假设 V 为数域 F 上的 n 维向量空间, $\alpha \in V$ 在 V 的两组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 和 } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

下的坐标分别为 x 和 x' . 假设

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)T.$$

那么下面两条成立.

- ① 过渡矩阵 T 是可逆矩阵;
- ② $x = Tx'$.

$$\text{新基} = \text{旧基} \cdot T, \quad T \cdot \text{新坐标} = \text{旧坐标}$$

例

对于 $\mathbb{R}$ 向量空间 $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 为其标准基, 将这组基逆时针旋转 θ , 所得向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

组成了 V 的另一组基. 从 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 到 α_1, α_2 的过渡矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ 在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 下的坐标就是 $\mathbf{x}$, 那么它在 α_1, α_2 下的坐标 $\mathbf{x}'$ 应该是多少呢?

解. 根据定理 3.17, $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'$, 因此 $\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

所以

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}$$

例

证明: $\mathbb{R}^3$ 中的三个向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

组成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 并求 $\mathbf{x} = (6, 12, 6)^T$ 在这组基下的坐标.

解. 令 $\mathbf{A}$ 为这三个向量拼成的矩阵, 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

通过简单计算可知 $|\mathbf{A}| = 6$, 因此 $\mathbf{A}$ 可逆, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 组成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

由于 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\mathbf{A}$,

所以从 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为 $\mathbf{A}$.

$\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下坐标为 $\mathbf{x}$.

所以 $\mathbf{x}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下坐标为

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 14 & -4 & -8 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$