

3.5. 线性方程组解的结构

矩阵 $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$,

我们可以将 $\mathbf{A}$ 看成 n 个 m 维列向量从左到右拼在一起,

也可以看成 m 个 n 维向量从上到下拼在一起, 分别称为 $\mathbf{A}$ 的**列向量**(column vector) 和**行向量**(row vector).

$\mathbf{A}$ 的所有列向量生成的子空间称为 $\mathbf{A}$ 的**列空间**(column space).

$\mathbf{A}$ 的行向量生成的子空间称为 $\mathbf{A}$ 的**行空间**(row space).

有趣的是, $\mathbf{A}$ 的行空间和列空间具有相同的维数, 都等于 $\mathbf{A}$ 的秩.

前面我们用初等变换将 $\mathbf{A}$ 变为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

的形式, 然后定义矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 r .

在行列式这一章, 我们发现 r 也是 $\mathbf{A}$ 的非零子式的最大阶数

现在它又是矩阵的行空间 (列空间) 的维数

我们来看看这是为什么.

引理 (3.18)

对于一个矩阵 $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, 下面结论成立.

- ① 对任意 m 阶可逆矩阵 $\mathbf{P}$, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{PA}$ 具有相同的行空间;
- ② 对任意 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{AQ}$ 具有相同的列空间.

定理 (3.19)

一个矩阵的秩与其行空间、列空间维数相同.

证明. 若 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, 其列空间和行空间都是零空间, 结论显然成立.

设 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$. 那么存在可逆矩阵 $\mathbf{P} \in M_m(\mathbb{R})$, $\mathbf{Q} \in M_n(\mathbb{R})$, 使得

$$\mathbf{PAQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \text{因此,} \quad \mathbf{AQ} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

根据引理 3.18, 左边 $\mathbf{AQ}$ 的列空间与 $\mathbf{A}$ 的列空间相同, 右边矩阵的列空间是由 $\mathbf{P}^{-1}$ 的前 r 列生成的子空间.

所以 $\mathbf{A}$ 列空间与 $\mathbf{P}^{-1}$ 的前 r 列生成的子空间相同, 有相同维数.

由于 $\mathbf{P}^{-1}$ 可逆, 因此其列向量线性无关, 从而前 r 列也线性无关. 所以由其前 r 列生成的子空间维数是 r .

故, $\mathbf{A}$ 的列空间维数为 $r = \text{rank}(\mathbf{A})$.

考虑 $\mathbf{A}^T$ 可得到 $\mathbf{A}$ 的行空间维数也是 r .



换个角度来看线性方程组: 线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\mathbf{b}$ 可以写成 $\mathbf{A}$ 的列向量的线性组合, 也就是说 $\mathbf{b}$ 属于 $\mathbf{A}$ 的列空间.

$\mathbf{A}$ 的列空间是增广矩阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 的列空间的子空间.

$\mathbf{b}$ 属于 $\mathbf{A}$ 的列空间当且仅当 $\mathbf{A}$ 的列空间与 $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 的列空间相同, 当且仅当它们有相同的维数.

利用定理 3.19, 就非常简单地重新证明了我们第 1 章的结论:
线性方程组有解当且仅当其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩

齐次线性方程组的基础解系

齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, 我们知道其所有解构成 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 现在我们的问题是:

能否为其解空间找出一组基?

由第 1 章的消元法, 我们可以通过初等行变换将 $\mathbf{A}$ 化为最简行阶梯型, 必要时再交换列, 得到 $\mathbf{PAQ}$ 形如

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} \\ & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} \\ \hline & & & & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

$\mathbf{Q}$ 是第 I 型初等矩阵的乘积.

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \begin{pmatrix} -c_{1,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

如果 $b_1\boldsymbol{\eta}_1 + b_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + b_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r} = \mathbf{0}$, 左边线性组合作为列向量的后 $n-r$ 个分量分别是 $b_1, b_2, \cdots, b_{n-r}$. 因此

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-r} = 0$$

故, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

一个齐次线性方程组的解空间的一组基称为这个线性方程组的一个**基础解系**(fundamental system of solution).

命题 (3.20)

假设 n 个变元的齐次线性方程组的系数矩阵秩为 r , 那么其解空间维数为 $n - r$.

例

求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

解. 对其系数矩阵进行初等行变换, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对自由变元 x_3, x_4 依次取

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

可得方程组的一个基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2$, 其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

对于一般的线性方程组, 有如下结论.

命题 (3.21)

假设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 为 n 个变元的线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解, 而 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 为对应的齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系. 那么 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{\eta}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}, \quad k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

证明. 直接验证可得式 (1) 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解.

反过来, 如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解, 那么 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

所以 $\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解,

从而存在 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$, 使得

$$\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0 = k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_{n-r} \boldsymbol{\eta}_{n-r}.$$

于是 $\boldsymbol{\eta}$ 可由式 (1) 得出.

□