

4.1. 线性映射与线性变换

矩阵 $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, 前几章, 有以下几种看法

- $\mathbf{A}$ 是一个数组成的数表 (线性方程组的增广矩阵);
- $\mathbf{A}$ 是一些高维向量组成的向量组 (行列式, 行空间, 列空间)

这一章, 我们换个角度

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$$

将 $\mathbf{A}$ 看成从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射.

这样线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是否有解, 就转化为

判断 $\mathbf{b}$ 是否在映射 $\mathbf{A}$ 的像集中.

对于一般的向量空间之间的映射, 我们作如下定义.

定义

两个 $\mathbb{R}$ 向量空间 V, W 之间的映射

$$\sigma: V \longrightarrow W$$

称为一个线性映射(linear map), 如果对任意 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 下面两条性质成立.

① $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta);$

② $\sigma(\lambda\alpha) = \lambda\sigma(\alpha).$

向量空间 V 到自身的线性映射称为 V 上的线性变换(linear transformation).

注: 很多参考书, 线性映射也被称为线性变换, 并不区分.

线性映射就是保持线性组合的映射, 即任意线性组合 $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r$ 在线性映射 σ 下的像满足

$$\sigma(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r) = \lambda_1 \sigma(\alpha_1) + \lambda_2 \sigma(\alpha_2) + \cdots + \lambda_r \sigma(\alpha_r).$$

特别地, 零向量在线性映射下的像也是零向量, 即

$$\sigma(\mathbf{0}) = \sigma(0 \cdot \mathbf{0}) = 0\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

如果一个线性映射 $\sigma: V \longrightarrow W$ 既是单射又是满射, 那么称 σ 为向量空间的**同构**(isomorphism). 如果两个向量空间之间存在同构映射, 那么称这两个向量空间同构.

例

(1) 对任意 $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, 上面提到的

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \alpha \mapsto \mathbf{A}\alpha$$

是线性映射, 当 $n = m$ 时, 此映射为 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换.

(2) 对由 $[0, 1]$ 上所有连续函数组成的 $\mathbb{R}$ 向量空间 $C[0, 1]$, 定义

$$I : C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1], \quad f(x) \mapsto \int_0^x f(t) dt.$$

由定积分的基本性质, I 是 $C[0, 1]$ 上的线性变换.

例

(3) 假设 $C^\infty[0, 1]$ 为 $[0, 1]$ 上任意阶可导函数组成的 $\mathbb{R}$ 向量空间, 定义

$$D: C^\infty[0, 1] \longrightarrow C^\infty[0, 1], \quad f(x) \mapsto f'(x).$$

根据导函数的性质, D 为 $C^\infty[0, 1]$ 上的线性变换.

(4) 对任意 $\mathbb{R}$ 向量空间 V , 对任意 $a \in \mathbb{R}$,

$$\iota_a: V \longrightarrow V, \quad \alpha \mapsto a\alpha$$

是 V 上的线性变换, 称为 V 上的**位似变换**(homothetic transformation). ι_0 将所有 V 中的向量映为零向量, 称为 V 上的**零变换**(zero transformation), ι_1 (简记为 ι) 为 V 上的**恒等变换**(identity transformation).

线性映射和线性变换有下面这些基本性质.

命题 (4.2)

假设 V, W 是有限维 $\mathbb{R}$ 向量空间, 则下列结论成立.

- ① 假设 $\sigma: V \longrightarrow W$ 是线性映射. 则其像集 $\text{Im } \sigma$ 是 W 的子空间, 其核 (kernel) 空间

$$\text{Ker } \sigma := \{\alpha \in V \mid \sigma(\alpha) = \mathbf{0}\}$$

是 V 的子空间. 并且

$$\dim \text{Im } \sigma + \dim \text{Ker } \sigma = \dim V$$

- ② 线性映射 $\sigma: V \longrightarrow W$ 是单射当且仅当 $\text{Ker } \sigma = \{\mathbf{0}\}$.
- ③ 如果 $\sigma: V \longrightarrow W$ 为同构, 那么 $\dim V = \dim W$.

命题 (4.2-续)

- ④ 假设 σ 为 V 上的线性变换. 则
 σ 是单射 $\Leftrightarrow \sigma$ 为满射 $\Leftrightarrow \sigma$ 为同构.
- ⑤ 对 V 上的两个线性变换 σ, τ 以及两个数 $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a\sigma + b\tau : V \longrightarrow V, \quad \alpha \mapsto a\sigma(\alpha) + b\tau(\alpha)$$

是 V 上的线性变换.

复合映射 $\sigma\tau$ 也是 V 上的线性变换.

对于 n 维向量空间 V , 想要了解 V 上的一个线性变换 σ , 由于 σ 保持线性组合, 因此我们只需要了解 V 的一组基在 σ 下的像就可以了.

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基

在 σ 下的像 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)$ 还是 V 中的向量.

可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 因此存在 $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$, 使得

$$(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\mathbf{A}.$$

这里 $\mathbf{A}$ 的第 i 列为 $\sigma(\alpha_i)$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标, 这也说明矩阵 $\mathbf{A}$ 是由 σ 唯一确定的. 称为

线性变换 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵.

例

(1) 假设 $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$, 对于 $\mathbb{R}^n$ 的标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, 有

$$(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)\mathbf{A}.$$

因此 $\mathbf{A}$ 作为 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵就是 $\mathbf{A}$ 自己.

(2) 有限维 $\mathbb{R}$ 向量空间 V 上的位似变换 $\iota_a: V \longrightarrow V, \alpha \mapsto a\alpha$ 在 V 的任意一组基下的矩阵均为 $a\mathbf{I}$.

例

(3) 假设 V 是 $\mathbb{R}$ 上次数 $\leq n$ 的多项式函数组成的向量空间, 则

$$\frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \dots, 1$$

组成 V 的一组基, 线性变换

$$D: V \longrightarrow V, \quad f(x) \mapsto f'(x)$$

在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

假设 V 是 n 维 $\mathbb{R}$ 向量空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一组基.

我们用 $M(\sigma)$ 表示 V 上线性变换 σ 在下的矩阵.

定理 (4.3)

对任意 V 上线性变换 σ, τ 以及实数 a, b , 有

- $M(\sigma\tau) = M(\sigma)M(\tau);$
- $M(a\sigma + b\tau) = aM(\sigma) + bM(\tau)$

也就是说, 线性变换的复合在一组基下的矩阵是它们分别在这组基下矩阵的乘积; 线性变换的线性组合在一组基下的矩阵是它们分别在这组基下矩阵的线性组合.

假设向量空间 V 有两组基, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 它们之间的过渡矩阵为 T , 即

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)T.$$

假设线性变换 σ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A .

则 σ 在 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的矩阵为 $T^{-1}AT$.

若存在可逆矩阵 T 使得 $B = T^{-1}AT$, 则称 B 与 A 相似(similar).
这里有个重要的特点是

$$B^m = \underbrace{(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT)}_{m\text{次}} = T^{-1}A^mT.$$

要计算 B 的方幂, 只需计算 A 相应的方幂, 然后在两边分别乘 T^{-1} 和 T 即可. 对一个多项式 $f(t) = a_nt^n + \cdots + a_1t + a_0$ 有

$$\begin{aligned} f(B) &= a_nB^n + \cdots + a_1B + a_0I \\ &= a_n(T^{-1}AT)^n + \cdots + a_1T^{-1}AT + a_0I \\ &= a_nT^{-1}A^nT + \cdots + a_1T^{-1}AT + a_0T^{-1}IT \\ &= T^{-1}f(A)T \end{aligned}$$

可以将计算 B 的多项式形式的矩阵问题转化为 A 的问题.