

5.1. 向量的内积

在中学, 两个空间向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ 的数量积

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

具有下面几个特点. 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$,

- ① 对称性: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
- ② $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$, $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
- ③ 正定性: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们也可以定义数量积

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \mathbf{x}^T \mathbf{y},$$

它依然满足上面三条性质.

定义 (5.1)

假设 V 是 $\mathbb{R}$ 向量空间, 如果映射

$$(-, -) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

对所有 $\alpha, \beta, \gamma \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ 满足

- ① 对称性: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
- ② $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma), (\lambda\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta)$;
- ③ 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\alpha = 0$,

那么称 $(-, -)$ 为 V 上的一个内积(inner product).

一个有内积的 $\mathbb{R}$ 向量空间称为一个欧几里得空间(Euclidean space), 简称欧氏空间.

注意, 条件 (1) 和 (2) 还保证了对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ 有

$$(\gamma, \alpha + \beta) = (\gamma, \alpha) + (\gamma, \beta), \quad (\alpha, \lambda\beta) = \lambda(\alpha, \beta).$$

也就是说, 任意固定 $\alpha \in V$, $(\alpha, -)$ 和 $(-, \alpha)$ 都是 V 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射. 因此, 内积具有以下基本性质.

① $(\mathbf{0}, \alpha) = (\alpha, \mathbf{0}) = 0$. 事实上, $(\mathbf{0}, \alpha) = (0\mathbf{0}, \alpha) = 0(\mathbf{0}, \alpha) = 0$.

②
$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n b_j \beta_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (\alpha_i, \beta_j).$$

这个性质称为双线性.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 数量积是一种特殊的内积, 但并不是唯一的内积. 例如, 在 $\mathbb{R}^2$ 上

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 2x_1y_1 + x_2y_2$$

也是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个内积. 尽管如此, 今后, 在不加说明的情况下, 我们默认 $\mathbb{R}^n$ 上的内积为数量积.

例

假设 $V = C[a, b]$ 为区间 $[a, b]$ 上的连续函数的全体. 前面我们知道 V 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间. 在 V 上定义

$$(f, g) := \int_a^b f(t)g(t)dt$$

容易验证 $(-, -)$ 为 V 上的内积.

例

假设 $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$. 在 V 上定义

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}).$$

容易验证 $(-, -)$ 是 $\mathbb{R}$ 双线性的且满足对称性. 这里解释正定性.

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i,$$

其中 $\mathbf{A}_i$ 为 $\mathbf{A}$ 的第 i 列. 由于

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{mi}^2 \geq 0,$$

因此, $(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i = 0$ 对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 成立, 而这等价于 $\mathbf{A}$ 的每一列都为零向量, 即 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

因此 $(-, -)$ 的确是 V 上的内积.

欧氏空间区别于一般向量空间的地方在于, 有了内积后, 我们可以将一个向量的长度定义为

$$\|\alpha\| := \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

长度为 1 的向量称为单位向量(unit vector). 从向量长度的定义可发现, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 有

$$\|\lambda\alpha\| = \sqrt{(\lambda\alpha, \lambda\alpha)} = \sqrt{\lambda^2(\alpha, \alpha)} = |\lambda| \cdot \|\alpha\|,$$

也就是说一个向量的 λ 倍的长度等于这个向量长度的 $|\lambda|$ 倍.

例

特别地, $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的长度可定义为

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

$C[a, b]$ 中函数 f 作为 $C[a, b]$ 中的向量长度可定义为

$$\|f\| := \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

对于 $\mathbb{R}^3$ 中空间向量, 我们有

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta,$$

其中 θ 为向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 形成的夹角. 那么在一般的欧氏空间中能定义两个向量的夹角吗?

比照 $\mathbb{R}^3$ 中的情形, 我们需要下面这个定理.

定理 (5.2)

假设 $(-, -)$ 为欧氏空间 V 上内积. 那么对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta),$$

等号成立当且仅当 α, β 线性相关.

例

定理 5.2 其实是我们熟知的一些不等式背后的一般形式. 比如, 在 $\mathbb{R}^n$ 中利用定理 5.2 可得柯西不等式 (Cauchy inequality)

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

在 $C[a, b]$ 中利用定理 5.2 可得施瓦茨不等式 (Schwarz inequality)

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt}.$$

在定理 5.2 的帮助下, 我们可以定义欧氏空间中向量的夹角.

对于欧氏空间 V 中的两个非零向量 α, β , 由定理 5.2 可得

$$-1 \leq \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \leq 1,$$

由此我们定义其夹角

$$\theta := \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}.$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $(\alpha, \beta) = 0$ 时, 我们称 α 与 β 正交.

我们约定零向量与任意向量正交.

因此欧氏空间中两个向量正交当且仅当它们的内积为零.

例

求向量 $\mathbf{x} = (1, 2, 2, 3)^T$ 与 $\mathbf{y} = (3, 1, 5, 1)^T$ 在 $\mathbb{R}^4$ 中的夹角.

解: 假设夹角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} = \frac{18}{\sqrt{18} \times \sqrt{36}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$.

定理 5.2 中的不等式除了能用来定义两个向量的夹角外, 还可以用来给出向量长度的三角不等式.

推论 (5.3)

对欧氏空间 V 中的任意向量 α, β 有

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$