

5.2. 规范正交基和正交矩阵

在 3 维空间中, 通常取三个相互垂直的单位向量建立直角坐标系.

在 n 维欧氏空间中, 是否存在 n 个彼此正交的单位向量?

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 显然标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 是一组彼此正交的单位向量.

实际上, 无限维欧氏空间中也有这样的向量组. 比如, 大家可以验证在 $C[0, 2\pi]$ 中,

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

是两两正交的. 这在傅里叶级数中是非常重要的性质.

引理 (5.4)

欧氏空间中两两正交的非零向量组成的向量组线性无关.

证明. 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是欧氏空间 V 中的两两正交的非零向量, 并假设线性组合

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

由于 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ 对所有 $i \neq j$ 成立, 所以

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m, x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j (\alpha_i, \alpha_j) = \sum_{i=1}^m x_i^2 (\alpha_i, \alpha_i). \end{aligned}$$

又因为每个 $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$, 所以每个 x_i 都为零.

□

由引理 5.4, 若 n 维欧氏空间 V 中有 n 个彼此正交的单位向量

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \quad (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

那么这些向量必然线性无关, 从而构成 V 的一组基.

满足上面条件的向量组称为 V 的一组规范正交基

怎样构造一个欧氏空间的规范正交基呢?

构造规范正交基的方法——施密特正交化

假设 V 是 n 维欧氏空间, 有一组基

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

我们将从这组基出发构造规范正交基, 方法如下:

- 先固定 $\alpha_1 = \beta_1$
- 用 β_2 减去其在 α_1 上的“投影”

$$\frac{(\beta_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1, \text{ 得到, } \beta_2 - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1$$

则有

$$(\beta_2 - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1, \alpha_1) = (\beta_2, \alpha_1) - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} (\alpha_1, \alpha_1) = 0$$

■ 令

$$\alpha_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1$$

由于 $\alpha_1 = \beta_1, \beta_2$ 线性无关, 因此 $\alpha_2 \neq 0$.

■ 现在用归纳法, 假设我们已经得到 k 个两两正交的非零向量

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k,$$

其中每个 α_i 都是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i$ 的线性组合.

■ 令

$$\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(\beta_{k+1}, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i.$$

可以证明 α_{k+1} 非零, 且为 $\beta_1, \cdots, \beta_{k+1}$ 的线性组合.

- 对任意 $j \leq k$, 有

$$\begin{aligned}(\alpha_{k+1}, \alpha_j) &= (\beta_{k+1}, \alpha_j) - \sum_{i=1}^k \frac{(\beta_{k+1}, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} (\alpha_i, \alpha_j) \\&= (\beta_{k+1}, \alpha_j) - \frac{(\beta_{k+1}, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} (\alpha_j, \alpha_j) = 0,\end{aligned}$$

由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 已经两两正交, 这样便得到 $k+1$ 个彼此正交的非零向量.

- 继续这个过程, 最终可得到 n 个彼此正交的非零向量

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

- 最后, 对它们进行单位化, 即

$$\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}, \cdots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|},$$

进而得到 V 中 n 个两两正交的单位向量, 从而构成 V 的一组规范正交基.

推论 (5.5)

有限维欧氏空间中的两两正交的单位向量组成的向量组可扩展为 V 的一组规范正交基.

证明. 先扩展成 V 的一组基, 再用正交化方法.

□

例

用施密特正交化方法将向量组

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

化为 $\mathbb{R}^3$ 的一组规范正交基.

解. 先正交化, 令 $\alpha_1 = \beta_1$.

$$\alpha_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \beta_3 - \frac{(\beta_3, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 - \frac{(\beta_3, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} \alpha_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

再进行单位化可得

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

这三个向量是彼此正交的单位向量, 组成 $\mathbb{R}^3$ 的一组规范正交基.

规范正交基的好处

假设 n 维欧氏空间 V 有一组规范正交基

$$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$$

对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 假设它在这组规范正交基下的坐标为

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \text{ 即, } \boldsymbol{\alpha} = x_1 \boldsymbol{\xi}_1 + x_2 \boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\xi}_n$$

对 $i = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}_i) = \sum_{k=1}^n x_k (\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_i) = x_i (\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i) = x_i.$$

即第 i 个坐标恰好是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_i$ 的内积.

如果 β 在这组规范正交基下的坐标是 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 那么

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\xi_i, \xi_j) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

即 α 与 β 的内积等于它们的坐标向量在 $\mathbb{R}^n$ 中的内积, 特别地,

$$\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

即 α 的长度和其对应的坐标向量在 $\mathbb{R}^n$ 中的长度相同

规范正交基之间的过渡矩阵

假设

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 和 } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

都是欧氏空间 V 的规范正交基, 对应的过渡矩阵为 U , 即

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)U.$$

U 的第 i 列 U_i 为 β_i 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标向量.

上面的讨论可知

$$(\beta_i, \beta_j) = (U_i, U_j) = U_i^T U_j$$

由于 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 也是规范正交基, 因此

$$\mathbf{U}_i^T \mathbf{U}_j = (\beta_i, \beta_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

这等价于 $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$, 即 $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$,

也等价于 $\mathbf{U}$ 的 n 个列向量是 $\mathbb{R}^n$ 的一组规范正交基.

定义 (5.6)

满足 $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ 的实数方阵 $\mathbf{U}$ 称为**正交矩阵**(orthogonal matrix).

容易发现正交矩阵有如下几个性质.

- ① 如果 U 是正交矩阵, 那么 $U^{-1} = U^T$ 也是正交矩阵;
- ② 正交矩阵的行列式为 ± 1 ;
- ③ 如果 U_1, U_2 是正交矩阵, 那么 $U_1 U_2$ 也是正交矩阵.

例

二阶正交矩阵有哪些?

解. 假设

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

是二阶正交矩阵, 则 U 的列向量是彼此正交的单位向量, 即满足下面几个条件.

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

存在 $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ 使得 $a = \cos \theta, c = \sin \theta, b = \sin \varphi, d = \cos \varphi$ 且

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi = cd + ab = 0.$$

所以 $\theta + \varphi = k\pi$, 即 $\varphi = k\pi - \theta, k \in \mathbb{Z}$.

当 k 为偶数时,

$$b = \sin \varphi = -\sin \theta, \quad d = \cos \varphi = \cos \theta.$$

当 k 为奇数时,

$$b = \sin \varphi = \sin \theta, \quad d = \cos \varphi = -\cos \theta.$$

因此 U 分别为两种形式, 即

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

容易看出 U_1 的列向量都是单位向量, 并且两个列向量正交, 因此 U_1 的确是正交矩阵. 同样的, U_2 也是正交矩阵.

不同的是 $|U_1| = 1$, $|U_2| = -1$. 对任意平面向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_1)^T$

$U_1 \mathbf{x}$ 为将 $\mathbf{x}$ 逆时针旋转角度 θ 所得到的向量.

$U_2 \mathbf{x}$ 为将 $\mathbf{x}$ 沿角 $\frac{\theta}{2}$ 的终边所在直线翻折所得到的向量.