

## 5.3. 正交变换

在  $\mathbb{R}^3$  中, 很多时候我们需要保持向量长度的变换, 比如绕某个轴旋转等. 因此, 欧氏空间上保持长度的线性变换无疑是重要的.

### 定义 (5.7)

假设  $\sigma$  为欧氏空间  $V$  上的线性变换. 如果对任意  $\alpha \in V$  都有

$$\|\sigma(\alpha)\| = \|\alpha\|,$$

那么称  $\sigma$  为**正交变换**(orthogonal transformation).

需要指出的是, 线性变换  $\sigma$  保长度和保内积实际上是等价的.

### 引理 (5.8)

假设  $\sigma$  为欧氏空间  $V$  上的线性变换, 那么  $\sigma$  是正交变换当且仅当  $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$  对所有  $\alpha, \beta \in V$  成立.

**证明.** 如果  $\sigma$  保内积, 即  $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$ . 那么

$$\|\sigma(\alpha)\|^2 = (\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) = (\alpha, \alpha) = \|\alpha\|^2.$$

从而  $\|\sigma(\alpha)\| = \|\alpha\|$ , 即  $\sigma$  保长度, 为正交变换.

反过来, 假设  $\sigma$  是正交变换, 则对任意  $\alpha, \beta \in V$  有

$$\|\sigma(\alpha + \beta)\|^2 = \|\alpha + \beta\|^2.$$

把两边写成内积的形式有

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) + 2(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) + (\sigma(\beta), \sigma(\beta)) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta).$$

$$\text{即 } \|\sigma(\alpha)\|^2 + 2(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) + \|\sigma(\beta)\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2(\alpha, \beta) + \|\beta\|^2,$$

因为  $\sigma$  保长度, 所以  $\|\sigma(\alpha)\|^2 = \|\alpha\|^2, \|\sigma(\beta)\|^2 = \|\beta\|^2$ , 因此

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta).$$

□

### 定理 (5.9)

假设  $\sigma$  为  $n$  维欧氏空间  $V$  上的线性变换, 则下面几条等价.

- ①  $\sigma$  是正交变换;
- ②  $\sigma$  在  $V$  的任意规范正交基下的矩阵为正交矩阵;
- ③  $\sigma$  在  $V$  的某组规范正交基下的矩阵为正交矩阵.

### 推论 (5.10)

对于矩阵  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 将  $A$  看作  $\mathbb{R}^n$  上的线性变换. 则  $A$  是正交变换当且仅当  $A$  是正交矩阵.

由于正交变换保持向量长度, 假设  $\lambda \in \mathbb{R}$  为欧氏空间  $V$  上正交变换  $\sigma$  的特征值,  $\alpha \in V$  是对应  $\lambda$  的特征向量, 则

$$|\lambda| \cdot \|\alpha\| = \|\lambda\alpha\| = \|\sigma(\alpha)\| = \|\alpha\|.$$

从而  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda = \pm 1$ . 更一般地, 我们有下面的结论.

### 命题 (5.11)

正交矩阵在  $\mathbb{C}$  中特征值的模长为 1. 特别地, 正交矩阵的实特征值只能是  $\pm 1$ .

## 例 (镜面反射)

在欧氏空间  $V$  中, 对任意非零向量  $\alpha$ , 容易验证映射

$$\tau_{\alpha} : V \longrightarrow V, \quad \beta \mapsto \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

是  $V$  上的线性变换且  $\tau_{\alpha} = \tau_{\lambda\alpha}$  对所有非零  $\lambda \in \mathbb{R}$  成立. 不妨设  $\alpha$  是单位向量, 扩展成  $V$  的一组规范正交基  $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . 我们可以看看  $\tau_{\alpha}$  作用在这组基上的效果如何.

$$\tau_{\alpha}(\alpha) = \alpha - \frac{2(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha.$$

对于  $2 \leq k \leq n$ , 由于  $(\alpha, \alpha_k) = 0$ , 因此  $\tau_{\alpha}(\alpha_k) = \alpha_k - 0\alpha = \alpha_k$ .  $\tau_{\alpha}$  在规范正交基  $\alpha, \dots, \alpha_n$  下的矩阵为  $U = \text{diag}[-1, 1, \dots, 1]$ . 显然  $U^T U = I$ ,  $U$  为正交矩阵. 由定理 5.9 知  $\tau_{\alpha}$  是正交变换. 形如  $\tau_{\alpha}$  的正交变换称为**镜面反射**(mirror reflection).

## 例

由上一节例 ??,  $\mathbb{R}^2$  上的正交矩阵都形如

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

它们分别对应  $\mathbb{R}^2$  上的旋转和翻折, 那  $\mathbb{R}^3$  上的正交变换又是什么样的呢? 这等价于刻画所有的三阶正交矩阵.

假设  $U$  为三阶正交矩阵

根据其特征多项式  $f_U(t)$  在  $\mathbb{C}$  中的根的情况进行讨论.

$f_U(t)$  为奇数次实系数多项式, 必有实数根  $\lambda_1$ , 另外两根为  $\lambda_2, \lambda_3$

如果三根均为实数, 那么根据命题 5.11, 它们都是  $\pm 1$

如果  $\lambda_2$  是虚数, 由于虚根成对相互共轭,  $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$ , 根据命题 5.11, 我们有  $|\lambda_2| = 1$ . 此时有

$$|U| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = \lambda_1 |\lambda_2|^2 = \lambda_1.$$

情形 1.  $|U| = 1$

如果  $f_U(t)$  在  $\mathbb{C}$  中的三根  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  都是实数  $\pm 1$ , 由于其乘积为  $|U| = 1$ , 那么必有一根为 1.

如果两根  $\lambda_2, \lambda_3$  为相互共轭的虚数, 那么  $\lambda_1 = |U| = 1$ .

$U$  总有特征值 1, 存在单位向量  $\eta_1 \in \mathbb{R}^3$ , 使得  $U\eta_1 = \eta_1$ .

扩展为  $\mathbb{R}^3$  的一组规范正交基  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ .

对  $i = 2, 3$ , 我们有

$$(U\eta_i, \eta_1) = (U\eta_i, U\eta_1) = (\eta_i, \eta_1) = 0.$$

因此  $U\eta_i$  可以写成  $\eta_2, \eta_3$  的线性组合.

$U$  作为  $\mathbb{R}^3$  上的线性变换在规范正交基  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  下的矩阵形如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \mathbf{U}_1 \end{pmatrix}.$$

由定理 5.9,  $\mathbf{A}$  为正交矩阵且与  $U$  相似. 因此  $U_1$  也是正交矩阵.

由于  $|\mathbf{U}_1| = |\mathbf{U}| = |\mathbf{A}| = 1$ , 存在  $\theta \in [0, 2\pi]$ , 使得

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$U$  作用的效果是将向量绕向量  $\eta_1$  旋转角度  $\theta$ . 这样的变换称为  $\mathbb{R}^3$  一个旋转变换.

情形 2.  $|U| = -1$

根据  $f_U(t)$  在  $\mathbb{C}$  中根的情况知  $U$  必有特征值  $-1$

存在非零向量  $\alpha$  使得  $U\alpha = -\alpha$ .

令  $\tau_\alpha$  为相应的镜面反射.

假设  $\tau_\alpha$  在标准基  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  下的矩阵为  $U_1$ . 那么  $|U_1| = -1$ .

这样  $\sigma = U\tau_\alpha$  满足  $\sigma(\alpha) = \alpha$ ,  $\sigma$  在标准基  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  下的矩阵  $UU_1$  为行列式为 1 的正交矩阵.

因此  $\sigma$  为绕  $\alpha$  的一个旋转变换.

故,  $U = \sigma\tau_\alpha$  为一个镜面反射和一个旋转变换的复合.