

5.4. 实对称矩阵

我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 上由实对称矩阵给出的线性变换

引理 (5.12)

实对称矩阵在 $\mathbb{C}$ 中的特征值都为实数.

证明. 假设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 而 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是其特征值

即存在 $\mathbb{C}^n$ 中的非零向量 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$, 使得 $\mathbf{A}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$.

两边取转置, 共轭得 $\bar{\lambda}\bar{\mathbf{z}}^T = \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{A}}^T = \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{A}$.

两边同时乘 $\mathbf{z}$ 得

$$\bar{\lambda}\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{A}\mathbf{z} = \lambda\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{z}.$$

由于

$$\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{z} = \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \dots + \bar{z}_n z_n = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \neq 0$$

因此 $\bar{\lambda} = \lambda$, 即 λ 为实数.



引理 5.12 一个实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式 $f_{\mathbf{A}}(t)$ 的根都是实数, 没有虚数, 因此 $f_{\mathbf{A}}(t)$ 可以分解为

$$f_{\mathbf{A}}(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都是实数.

定理 (5.13)

对实对称矩阵 $\mathbf{A}$, 存在正交矩阵 $\mathbf{U}$, 使得 $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}$ 为对角矩阵.

由于 $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$, 这个定理实际上告诉我们, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一组规范正交基, 使得 $\mathbf{A}$ 作为线性变换在这组基下的矩阵为对角矩阵, 特别地, $\mathbf{A}$ 是可对角化的.

问题. 我们是否可以求出满足定理 5.13 的正交矩阵 U ? 也就是找出 $\mathbb{R}^n$ 的一组规范正交基, 使得 A 作为线性变换在这组基下的矩阵为对角矩阵.

我们可以假设

$$f_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} (t - \lambda_2)^{n_2} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 为两两不同的实数.

A 可对角化. 每个特征值的几何重数等于其代数重数

$$\dim V_{\lambda_i} = n_i, i = 1, 2, \dots, r.$$

可给每个特征子空间 V_{λ_i} 找一组规范正交基 B_i (正交化方法)

$$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_r$$

是否构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组规范正交基? 答案: 是的!

只需要下面这个引理即可

引理 (5.14)

实对称矩阵对应不同特征值的特征向量彼此正交.

证明. 假设 α, β 为实对称矩阵 A 的特征向量, 对应的特征值分别为 λ, μ 且 $\lambda \neq \mu$. 如果 $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta \neq 0$, 那么

$$\lambda \alpha^T \beta = (\lambda \alpha, \beta) = (A\alpha, \beta) = \alpha^T A^T \beta = \alpha^T A \beta = \mu \alpha^T \beta.$$

从而 $\lambda = \mu$, 与假设矛盾.

□

例

设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

求一个正交矩阵 $\mathbf{U}$, 使得 $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}$ 为对角矩阵.

解. 先计算 $\mathbf{A}$ 的特征多项式

$$f_{\mathbf{A}}(t) = |t\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (t - 2)^2(t - 8)$$

求得 $\mathbf{A}$ 的互不相同的特征值为 2 和 8.

再求特征子空间的规范正交基. 对于特征值 2, 求齐次线性方程组 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将其正交单位化, 得到

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

这样 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 组成特征子空间 V_2 的一组规范正交基.

对特征值 8, 解齐次线性方程组 $(\mathbf{A} - 8\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得单位特征向量

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\eta}_3$ 是特征子空间 V_8 的一组规范正交基.

将特征子空间的规范正交基拼在一起, 令

$$\mathbf{U} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

则 $\mathbf{U}$ 是正交矩阵, 并且

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$