

5.5. 二次型与对称矩阵

初中: 反比例函数, 对应的方程是 $xy = 1$, 图形是“双曲线”

高中: 双曲线的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

这两者是否是和谐统一的?

更一般的, 怎样判断空间中的二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = G$$

是何种曲面?

定义 (5.15)

$\mathbb{R}$ 上的 n 元二次齐次多项式

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} b_{ij} x_i x_j$$

称为一个实二次型(quadratic form).

我们主要关心怎样把一个二次型化为只有平方项的形式?

对不同的问题, 允许的方式也不同!

对于二次曲面, 我们要求保持曲面的形状, 只允许正交变换. 问题即为是否存在一个正交矩阵 $\mathbf{U}$ 以及

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

使得 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = ax'^2 + by'^2 + cz'^2$?

一般来讲, 对于实二次型 $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 如果 $\mathbf{P}$ 可逆, 那么

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称为变量的非退化线性替换

例如, 对于 $x^2 - xy + y^2$, 令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

则有

$$x^2 - xy + y^2 = \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 - \left(u + \frac{1}{2}v\right)v + v^2 = u^2 + \frac{3}{4}v^2.$$

由此可见 $x^2 - xy + y^2$ 恒非负.

为将一个二次型通过线性替换的方式化为只剩平方项的形式, 我们先将二次型写为矩阵乘法的形式. 实际上,

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_i x_j \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} & \cdots & \frac{b_{1n}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} & \cdots & \frac{b_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{1n}}{2} & \frac{b_{2n}}{2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例如

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} & \cdots & \frac{b_{1n}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} & \cdots & \frac{b_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{b_{1n}}{2} & \frac{b_{2n}}{2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

则有 $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 简记为 $q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. 这里 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ 是对称矩阵.

对于非退化线性替换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}, \text{ 其中 } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T,$$

我们有

$$q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y}.$$

$\mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y}$ 只含 y_i 的平方项当且仅当 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 是对角矩阵.

由此, 寻找使得二次型化为只含平方项的线性替换的问题, 就转化为了寻找可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 为对角矩阵的问题.

如果要求 $\mathbf{P}$ 是正交矩阵, 这个问题在上一节已经解决了: 对每个实对称矩阵 $\mathbf{A}$, 都能找到正交矩阵 $\mathbf{U}$ 使得 $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}$ 为对角矩阵.

但也有个技术上的难点, 就是需要

- 将 $\mathbf{A}$ 的特征多项式 $f_{\mathbf{A}}(t)$ 分解为一次因式的乘积
- 求出特征值, 进而求各个特征子空间规范正交基
- 将这些规范正交基组合成一个正交矩阵 $\mathbf{U}$

如果不要 $\mathbf{P}$ 为正交矩阵, 是否有更为简洁的方法呢?

定义 (5.16)

对于 n 阶矩阵 A, B , 如果存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^T A P$, 那么称矩阵 A 与 B **合同** (congruent).

矩阵的合同满足下面几个性质.

- ① **反身性**: 任何方阵都与自身合同, 因为 $A = I^T A I$;
- ② **对称性**: 如果 A 与 B 合同, 那么 B 与 A 也合同. 实际上, 如果 $B = P^T A P$, 其中 P 可逆, 令 $Q = P^{-1}$, 有

$$Q^T B Q = P^{-T} P^T A P P^{-1} = A;$$

- ③ **传递性**: 如果 A 与 B 合同, B 与 C 合同, 那么 A 与 C 也合同. 因为如果 $B = P^T A P$, $C = Q^T B Q$, 令 $R = P Q$, 有 R 可逆且

$$R^T A R = Q^T P^T A P Q = C.$$

三种初等矩阵, 很容易发现

$$\mathbf{P}_{ij}^T = \mathbf{P}_{ij}, \quad \mathbf{D}_i(\lambda)^T = \mathbf{D}_i(\lambda), \quad \mathbf{T}_{ij}(c)^T = \mathbf{T}_{ji}(c).$$

- 对于 $\mathbf{P}_{ij}$, $\mathbf{P}_{ij}^T \mathbf{A} \mathbf{P}_{ij}$ 就是交换 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和第 j 行, 再交换第 i 列和第 j 列;
- 对于 $\mathbf{D}_i(\lambda)$, $\mathbf{D}_i(\lambda)^T \mathbf{A} \mathbf{D}_i(\lambda)$ 就是将 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和第 i 列的元素都乘以 λ ;
- 对于 $\mathbf{T}_{ij}(c)$, $\mathbf{T}_{ij}(c)^T \mathbf{A} \mathbf{T}_{ij}(c)$ 就是将 $\mathbf{A}$ 的第 i 行的 c 倍加到第 j 行, 再将 $\mathbf{A}$ 的第 i 列的 c 倍加到第 j 列.

一个对称矩阵可以通过初等行列变换的方式合同于对角矩阵.

定理 (5.17)

假设 $\mathbf{A}$ 是数域 F 上的 n 阶对称矩阵, 则存在 F 上 n 阶可逆矩阵使得 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 是对角矩阵.

推论 (5.18)

对于任意二次型 $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 都存在一个非退化的线性替换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, 使得

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \dots + c_r y_r^2, \quad (1)$$

其中 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 都不为零.

式 (1) 中的 $c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \dots + c_r y_r^2$ 是只含平方项的二次型, 称为**对角型**(diagonal form), r 称为**二次型的秩**(rank of a quadratic form). 这里的 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 并不是唯一确定的.

例

对矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

求可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 为对角矩阵.

解: 对 $\mathbf{A}$ 进行合同变换, 但只记录列变换, 具体过程如下.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ \hline & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ \hline & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \hline & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{列}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -3 & 0 & & & \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ 1 & -2 & -\frac{1}{3} & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -3 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ 1 & -2 & -\frac{1}{3} & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array} \right)$$

横线下方记录的是合同变换过程中的列变换. 因此, 有可逆矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ & 1 & -\frac{1}{3} \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

使得 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag}[1, -3, \frac{7}{3}]$. 整个过程说明, 二次型

$$q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

通过非退化的线性替换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, q 可化为对角型

$$q = y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2.$$

配方法. 对一个二次型, 我们也可以不借助矩阵, 直接用配方的方式将其化为只含平方项的形式. 对二次型

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

情形 1: 某个平方项的系数 $a_{ii} \neq 0$. 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 将所有含 x_1 的项写到一起进行配方, 可得

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n) + \sum_{i,j \neq 1, i \leq j} a_{ij}x_ix_j \\ &= \frac{1}{a_{11}} \left(a_{11}x_1 + \frac{a_{12}}{2}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{2}x_n \right)^2 + \sum_{i,j \neq 1, i \leq j} b_{ij}x_ix_j. \end{aligned}$$

等式后面 $\sum_{i,j \neq 1, i \leq j} b_{ij}x_ix_j$ 不含 x_1 , 是关于 $x_2, x_3, \dots, x_n$ 的二次型.

情形 2: 所有的 a_{ii} 都是零. 此时假设某个 $a_{ij} \neq 0$, 其中 $i < j$. 不妨设 $a_{12} \neq 0$. 我们可以作线性替换, 由

$$x_1 = x'_1 + x'_2, \quad x_2 = x'_1 - x'_2, \quad x_k = x'_k, \quad k > 2$$

可得,

$$a_{12}x_1x_2 = a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2)$$

这样转化为关于 $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ 的二次型且平方项 $x_1'^2, x_2'^2$ 的系数都不为零, 即转化为情形 1.

例

用配方法将二次型

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 + 2x_3x_4$$

化为对角型.

解: 按上面的方法进行配方可得

$$\begin{aligned} q &= (x_1^2 + 2x_1x_2) + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 + x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2^2 + 4x_2x_3) + 4x_3^2 + 2x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + 2x_3x_4. \end{aligned}$$

作线性替换, 由 $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, x_3 = x'_3 + x'_4, x_4 = x'_3 - x'_4$ 可得

$$q = (x'_1 + x'_2)^2 + (x'_2 + 2x'_3 + 2x'_4)^2 + 2x'^2_3 - 2x'^2_4.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x'_1 + x'_2 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x'_2 + 2x'_3 + 2x'_4 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x'_3 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ y_4 = x'_4 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

有 $q = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2$ 为对角型.

二次型的方法来讨论二次曲线或者曲面的形状, 此时需要线性替换保持向量的长度, 即对应的矩阵为正交矩阵.

需要用到上一节的方法, 上面的合同变换和配方法则**不再适用!**

例

确定 $x_1 O x_2$ 平面上二次曲线

$$x_1^2 - \sqrt{3}x_1x_2 + 2x_2^2 = 1$$

的图形.

解: 考虑二次型 $q = x_1^2 - \sqrt{3}x_1x_2 + 2x_2^2$, 它对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $f_{\mathbf{A}}(t) = t^2 - 3t + \frac{5}{4}$, 特征值分别为 $\frac{5}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$, 对应的单位特征向量分别为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

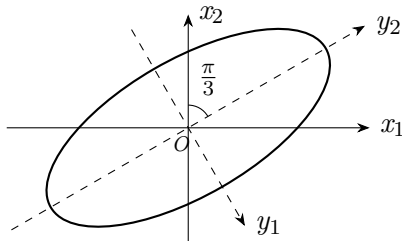
将它们拼成一个正交矩阵 $\mathbf{U} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)$, 则有

$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \text{diag}[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$. 作正交替换 $\mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, 则 y_1, y_2 满足的方程为

$$1 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{y} = \frac{5}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2.$$

由此可以发现该曲线是一个椭圆, 长半轴为 $\sqrt{2}$, 短半轴为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

注意到 U 对应的变换是逆时针旋转 $-\frac{\pi}{3}$, 即顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$. 我们可以画出这个平面曲线的图形如下图所示.



例

判断

$$5x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 6xz - 6yz = 36$$

表示何种二次曲面.

解: 令 $f(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 6xz - 6yz$ 以及

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

则有

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

计算 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $f_{\mathbf{A}}(t) = t(t-4)(t-9)$. 特征值分别为 9, 4, 0, 相应的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

进行单位化可得

$$U = \left(\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}, \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

作正交替换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{U}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

则有

$$f(x, y, z) = (u, v, w) \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 9u^2 + 4v^2.$$

所以 $f(x, y, z) = 36$ 为椭圆柱面. 其中心轴与 α_3 平行, 如图所示.

