

5.6. 正定二次型

利用上一节定理 5.17 可以得到下面的推论.

推论 (5.19)

对 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$, 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 形如

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & & \\ & -\mathbf{I}_{r-p} & \\ & & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $r = \text{rank}(\mathbf{A})$. 对应的, 对于任意实二次型 $q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 都存在线性替换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, 使得

$$q = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

证明. 由定理 5.17, 存在可逆矩阵 Q , 使得

$$Q^T A Q = \text{diag}[c_1, c_2, \cdots, c_r, 0, 0, \cdots, 0].$$

我们可以假设 $c_1, c_2, \cdots, c_p$ 为正, 而 $c_{p+1}, c_{p+2}, \cdots, c_r$ 为负, 否则, 我们可以通过交换行列的方式交换它们的位置. 令 Q_1 是如下对角矩阵

$$\text{diag}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}, \frac{1}{\sqrt{c_2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{c_p}}, \frac{1}{\sqrt{-c_{p+1}}}, \frac{1}{\sqrt{-c_{p+2}}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{-c_r}}, 1, 1, \cdots, 1\right],$$

再令 $P = Q Q_1$, 则 $P^T A P = Q_1^T Q^T A Q Q_1$ 形如矩阵 (1).

推论 5.19 中

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

称为二次型 $q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的**典范型**(canonical form). 这里 $r = \text{rank}(\mathbf{A})$ 是由 $\mathbf{A}$ 唯一确定的.

下面的定理表明 p 也是由 $\mathbf{A}$ 唯一确定的.

定理 (惯性定律)

假设实对称矩阵合同于下面两个矩阵

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & & \\ & -\mathbf{I}_{r-p} & \\ & & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}' = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{p'} & & \\ & -\mathbf{I}_{r-p'} & \\ & & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

则 $p = p'$.

我们把 $\mathbf{A}$ 的秩 r 称为对应的二次型 $q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的惯性指数(inertia index);

下面的 p 称为 q 的正惯性指数(positive inertia index),

而 $r - p$ 称为 q 的负惯性指数(negative inertia index),

正、负惯性指数的差

$$p - (r - p) = 2p - r$$

称为 q 的符号差(signature).

我们关心过一个实二次型是否恒非负的问题, 这里我们把情形分得更细致一点. 假设 $q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 为 n 元实二次型.

- ① 如果对于任意非零向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 都有 $q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, 那么称 q **正定** (positive-definite);
- ② 如果对于任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 都有 $q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, 那么称 q **半正定** (positive-semidefinite).

如果一个实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 对应的二次型是正定 (半正定) 的, 那么称 $\mathbf{A}$ 是正定 (半正定) 矩阵.

半正定与正定的区别是, 当 $\mathbf{A}$ 半正定时, 有可能存在非零向量 $\mathbf{x}$ 使得 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$, 此时 $\mathbf{A}$ 不正定. 例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

是半正定而非正定的. 根据定义, 正定二次型也是半正定的.

类似地, 我们可以定义

- 负定(negative-definite)
- 半负定(negative-semi- definite)

矩阵和二次型. 根据定义, 对称矩阵 $\mathbf{A}$ 是负定 (半负定) 的当且仅当 $-\mathbf{A}$ 是正定 (半正定) 的.

问题: 怎样才能判断一个二次型 (实对称矩阵) 是否是正定的呢?

首先是否正定与合同变换无关.

引理 (5.21)

假设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶实对称矩阵且 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同. 那么 $\mathbf{A}$ 正定当且仅当 $\mathbf{B}$ 正定, $\mathbf{A}$ 半正定当且仅当 $\mathbf{B}$ 半正定.

我们就可以把实对称矩阵的正定性问题转化为形如矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & & \\ & -\mathbf{I}_{r-p} & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

的问题.

总结起来, 对于 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$, 我们得到如下结论.

- ① $\mathbf{A}$ 正定, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 的正惯性指数为 n , 当且仅当 $\mathbf{A}$ 与对角线都为正的对角矩阵合同, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 与单位矩阵合同, 即存在可逆实矩阵 $\mathbf{P}$ 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{I} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}$$

特别地, $|\mathbf{A}| = |\mathbf{P}|^2 > 0$;

- ② $\mathbf{A}$ 半正定, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 的负惯性指数是零;
- ③ $\mathbf{A}$ 负定, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 的负惯性指数是 n , 即 $\mathbf{A}$ 与 $-\mathbf{I}$ 合同;
- ④ $\mathbf{A}$ 半负定, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 的正惯性指数为零.

根据第 4 节定理 5.13:

对任意实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 都存在正交矩阵 $\mathbf{U}$ 使得 $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$ 为对角矩阵 $\mathbf{\Sigma}$,

$\mathbf{\Sigma}$ 对角线元素由 $\mathbf{A}$ 的特征值构成.

此时 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{\Sigma}$ 合同.

所以 $\mathbf{A}$ 正定当且仅当 $\mathbf{\Sigma}$ 正定,

当且仅当 $\mathbf{A}$ 的特征值均为正数;

$\mathbf{A}$ 半正定当且仅当 $\mathbf{\Sigma}$ 半正定, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 所有的特征值都非负.

实际上, 对于实对称矩阵的正定性, 我们还可以通过其某些特定的子式的符号来判定.

对于 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$, 其前 k 行前 k 列对应的 k 阶子式称为 $\mathbf{A}$ 的 k 阶**顺次主子式**(leading principal minor).

定理 (西尔维斯特准则)

实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 正定, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 的所有顺次主子式都大于零.

例

判定二次型

$$q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

是否正定.

解: 二次型 q 对应的对称矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

其顺次主子式

$$|\mathbf{A}_1| = 5, \quad |\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad |\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}| = 1$$

全部为正. 因此 $\mathbf{A}$ 正定, 从而 q 正定.

我们将判定实对称矩阵正定的等价条件总结为下面的推论.

推论 (5.23)

对于实对称矩阵 A 来说, 下面几条等价.

- ① A 正定;
- ② A 合同于一个主对角线元素全为正的对角矩阵;
- ③ A 与单位矩阵 I 合同;
- ④ A 的特征值全为正;
- ⑤ A 的顺次主子式全为正.

正定二次型可以用来求某些多元函数的最值. 我们知道二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$ 在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处取得最小值.

下面的例子告诉我们, 在多元函数中也有类似的结论.

例

假设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶正定实对称矩阵, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. 证明: n 元函数

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{b} + c$$

在 $\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 时取得最小值.

证明. 记 $\mathbf{x}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, 则

$$f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{A} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \right) + \mathbf{x}_0^T \mathbf{b} + c = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{b} + c.$$

注意到 $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{b}$, 因此

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \left(-\frac{1}{2} \mathbf{b} \right) - \left(-\frac{1}{2} \mathbf{b} \right)^T \mathbf{x} + \mathbf{x}_0^T \left(-\frac{1}{2} \mathbf{b} \right) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{b} + \frac{1}{2} (\mathbf{b}^T \mathbf{x})^T + c - \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{b} - c \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{b} + c - \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{b} - c \\ &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{A}$ 正定, 因此

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq 0,$$

等号成立当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. 所以 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处取得最小值.

将二次型与定理 5.13 相结合, 可以得到一个非常重要的应用

奇异值分解(singular value decomposition).

定理 (5.24)

假设 $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, 秩为 r . 那么存在 m 阶正交矩阵 $\mathbf{U}$ 和 n 阶正交矩阵 $\mathbf{V}$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$,

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}_{m \times n}$$

并且满足 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.